MEMORIE

DI

MATEMATICA

E FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

TOMO I.

VERONA

PER DIONIGI RAMANZINI

MDCCLXXXII.

NATURAL HISTORY

Nd' è mai, che la nazione Italiana, feconda in ogni tempo d'ingegni ſingolari, par quaſi inoperoſa a paragone d'altre non poche in Europa, intente a ſegnalarſi tutto giorno, e fare a gara progreſſi luminoſi nelle Scienze? E' egli perchè o non ſia in Italia conceduto libero campo di eſercitarſi agl'intelletti, o perchè manchino i Mecenati, i mezzi, gl' incoraggiamenti? Ma tanto ſon fatti comuni i lumi della buona Filoſofia, e della ſana Morale, che non v' è per così dire regione, in cui non ſia permeſſo a' dì noſtri in materie ſcientifiche il penſare, e lo ſcrivere liberamente. Le Accademie poi, i Licei, le Univerſità, d'uomini provvedute per ogni conto ragguardevoli, paleſano a chiare note l'impegno magnanimo con cui i Principi d' Italia gli ſtudj favoriſcono, e la cultura della nazione. Nè ad altro ſono inte-

ſe le pubbliche Biblioteche, le Specule, le Collezioni di Storia naturale, le Sale di macchine, e ſuppelletili per la Fiſica Sperimentale, i Teatri Anatomici, i Laboratorj di Chimica, ed altri egregj ſtabilimenti, fuorchè al grande oggetto di promuovere l'applicazione de' nazionali, e di porger loro i ſuffragj più prezioſi. O ſarebbe di ciò cagione radicale l'eſſere ſeparati gl'Italiani, e nell'eſercizio diviſi delle proprie forze; tal che non può averſene il frutto, che all'unione di loro verrebbe fatto di mettere indubitatamente? Non è già che non ſia tutt'altra la condizione noſtra d'oggidì da quella de' tempi andati, in cui le civili diſcordie, le invaſioni de' barbari, le ſucceſſive alternazioni di Governi, di Leggi, d'Idiomi tenevano l'Italia in continuo ſconvolgimento, e contrappoſto di umori, e coſtumi; ove gli ſtudj nazionali, ſe ve ne aveva, confondevanſi cogli ſtranieri; ove il nativo genio era avvilito, oppreſſo il valore, e tolta ogni via di pacifica intelligenza. Ma l'eſſere or pure partita l'Italia in dominj d'indole, e d'inſtituzione non una, fa che ſieno neceſſariamente l'un dall'altro diſgiunti gli uomini illuminati, che natura ha diſtribuito imparzialmente; difficulta e reſtrigne le relazioni; ſparge un ſeme impercettibile

di mutue geloſie; e arreſta quel reciproco e libero ſcambio di lumi, ch'e' farebbero naturalmente in comunione d'intereſſi, e di volere. Quindi è che lo ſplendore di loro, quantunque viviſſimo, riverbera a ſtento, e languidamente ſull'intera nazione. E non è raro il caſo, che in una parte d'Italia s'ignorino perſino le produzioni dell'altra, i progreſſi, le ricchezze letterarie, o non vengano elle in pregio ed onore, ſiccome alle ſtraniere è conceduto. Come può mai in sì fatta oppoſizione di coſe, in tanto abuſo de' mezzi proprj e naturali copioſiſſimi, ampiarſi il fondo delle cognizioni utili, e il luſtro aumentarſi, e la gloria della nazione? Certo è che l'unione de' dotti in Società patrie è l'epoca de' progreſſi, che ſi ſon fatti in Europa nelle Scienze e nelle Arti, e della reputazione altiſſima in cui ſon venute a' dì noſtri moltiſſime regioni. Sbandita la pedanteria, l'illuſione de' ſiſtemi; preſo per iſcopo il vero, l'utile degli obbietti; appianate agli Studioſi le vie onde avanzarſi, ed eccitato coll'emulazione, e coll'eſempio un guſto univerſale per l'applicazione, tutto per mezzo di queſte Unioni concorre ad ingrandir la nazione; e non è meraviglia, che fatte ricche di tante e migliori forze combinate divengano poi elle arbitre

dell'opinione, e quasi santuario d'ogni arte, d'ogni dottrina nazionale. Ma se dobbiam convenire per una parte, esser questo il mezzo più valido e sicuro onde conciliare col promovimento delle Scienze il bene delle nazioni; e non possiamo dissimulare dall'altra, che lo svantaggio d'Italia è l'aver ella le sue forze disunite; come tentarne l'unione? e per qual mezzo libero da contrarietà associare le cognizioni e l'opera di tanti illustri Italiani separati, di cui non può a talento variarsi la costituzione? Non è invero ardua impresa in uno Stato anche vasto, ove la mente di un solo o di pochi dirige e regola il destino della nazione, il disporre ed effettuare il trapiantamento, e la concittadinanza eziandio di parecchi uomini, sotto gli occhi, e gl' influssi benefici del Governo. Così è che veggiam sorte felicemente tante insigni Compagnie, che illustrano la Francia, l'Inghilterra, la Prussia, la Moscovia, la Svezia, ed altri floridi Stati di Europa. Ma in Italia, qualunque siasi l'istituzione o il sistema che voglia immaginarsi, repugna alla condizione delle cose, che possano in simil guisa avvicinarsi ed unirsi gl' Italiani in un corpo di Scienziati nazionale, animato da un solo fiato vivificante. Non resta pertanto, ponde-

rato il tutto a bilancia, che un ſolo tentativo da farſi, ch'è quello di ricorrere ad un principio motore degli uomini, principio ſempre attivo, e talora operante con entuſiaſmo, l'amor della Patria. Non v'ha certamente riſguardo che poſſa obbiettarſi ad un amichevole accordo, ad un legame innocente tra uomini della ſteſſa nazione, i quali ſenza mancare alle naturali occupazioni o a' doveri del proprio ſtato conſacrar vogliano parte del loro tempo al vantaggio, e al luſtro nazionale. Tutto eſſendo di elezione e di libera volontà, non può avervi altra legge per una Compagnia fondata ſu queſta baſe, ſuorchè quella, ch'eſſa vorrà imporſi da sè, e cui l'amor patrio, e il genio naturale per le Scienze potranno rendere tollerabile, ed accetta. E queſta terrà luogo di obbligazione e di vincolo; manterrà in vigore la mutua amica corriſpondenza; animerà la comune applicazione, l'induſtria, e il fervore di tutti. Ecco i fondamenti di una Società, che prende a formarſi in Italia per l'avanzamento delle Scienze; ed ecco in queſto Volume il primo Saggio di ſue produzioni, combinate, come meglio le circoſtanze il permiſero ſul ſuo naſcimento. Da ora innanzi eſciranno regolarmente alla luce le Sociali Memorie, ſiccome ſuol farſi nelle al-

tre Accademie dell' Europa ; e faranno elle , a ſcanſamento di competenze , diſpoſte ne' Volumi coll' ordine alfabetico de' Cognomi. Ognuno riſponderà per sè , e delle proprie meditazioni, ed eſperienze; de' proprj calcoli , e riſultamenti , come ſe ne faceſſe ſeparatamente la pubblicazione. E perchè abbia ciaſcheduno un agio convenevole, onde conciliare co' riguardi della propria condizione il buon genio di adoperarſi per l' incremento di queſta Società, è ſtabilito intanto , che reſti libero un anno intero dall' uſcita di un Volume alla ſtampa del ſuſſeguente ; sì che comparirà il ſecondo Tomo nel 1784., il terzo nel 1786., e così ſucceſſivamente. Qualunque volta l' Autore il richiegga , ſarà , sì per ſalvezza e aſſicuramento di proprietà nelle ſcoperte , e sì ancora per qualche motivo di nobile emulazione in uno ſteſſo argomento , ſegnata a piè di pagina la data del ricevimento della Memoria di lui . Se la quantità degli Opuſcoli oltrepaſſaſſe le miſure di un diſcreto Volume , ſarà diviſo il Tomo in due col titolo di Parti. L' edizione potrà farſi in qualunque città d' Italia, ove riſieda uno o più membri della Società per la neceſſaria e fedele conſerva delle Memorie , e pel mantenimento dell' ordine convenuto; e quivi ſarà fatta ſcelta

di

di abili Soggetti per la reviſione, e correzione della Stampa, a' quali potranno indirizzarſi gli Autori per aggiunte, troncamenti, od altre modificazioni, che voleſſero ne' proprj Scritti. Il governo economico è fondato con ſicure e ferme provvidenze, sì che potranno diſtribuirſi coſtantemente a ciaſcun membro della Società un Volume degli Atti in dono, e alcuni eſemplari della riſpettiva Diſſertazione. Le Matematiche, e la Fiſica in generale ſono le Scienze peculiari della Società, la quale perciò in due Claſſi principali ſi dirama. A ſcelta e giudizio di queſte verrà ammeſſo nella Compagnia ogni Italiano, il quale abbia un merito maturo, e per più opere date in luce, ed applaudite riconoſciuto univerſalmente; sì che venendo propoſto alcuno da aggiugnerſi all'una o all'altra Claſſe, non potrà aver luogo l'aſſociazione di lui, ſe l'intera Claſſe non vi acconſenta. Ma ad ogni Socio è conceduta libertà d'inſerire negli Atti una ſcoperta utile, un' importante e nuova produzione anche di perſona non aggregata, purchè voglia, come di coſa propria, riſponderne egli ſteſſo inverſo la Compagnia. E perchè ſuol eſſer dolce a' poſteri, toccante, e di lodevole emulazione la ricordanza di que' pochi uomini, che ſi ado-

perano a prò di tutti gli altri, farà compilato l' elogio d' ogni membro della Compagnia, che Morte andrà togliendole di tanto in tanto; cioè teſſuta la vita del Filoſofo, non quella dell'uomo ſemplicemente. Non è ammeſſo negli Atti della Società altro idioma, fuorchè l' Italiano: idioma proprio a tutto, e fatto ormai per l' Europa agli uomini non inculti familiare. Se una lingua viva ſtende vie più il ſuo impero, quanto più ſale in reputazione chi la parla, e quanto più il pregio delle opere ſcritte s' aumenta; una collezione ſcelta de' progreſſi nelle Scienze di una Nazione merita abbaſtanza di eſſere conoſciuta, perchè la lingua in cui è fatta divenga, quant'altra mai, autorevole e importante. Queſto è il piano ſemplice e concordato della Società Italiana. Parrà talvolta ſterile a primo aſpetto una ſcoperta di Anatomia, un Medico cimento, un' eſperienza di Chimica, una nuova verità di Geometria o di Calcolo. Ma ſe qualche ſoggetto non è immediatamente applicabile, è ſempre vero, che o s' attiene ad altri che il ſono, o vi ci conduce neceſſariamente. E v' ha ancora tal indole di verità, la quale ſenza il concorſo di molte altre non può per sè eſſere applicata immediatamente; ve n' ha che s' ap-

plicherebbero, ſe ci foſſe permeſſo di veder tutto, e di concatenare le anella innumerabili di una Scienza; e ve n'ha perfine, che ſtaranno probabilmente ozioſe in perpetuo, quaſi monumenti di luſſo della mente umana. Ma quand' anche ciò foſſe, non è mai inutile un' indagine, che conduce per lo meno a qualche nuova rifleſſione; in cui l'intelletto brama ardentemente d' internarſi; che lo illumina e paſce con viva e dolce ſoddisfazione: avendo egli pure i ſuoi biſogni, i ſuoi piaceri, e non di rado qualche capriccio da appagare. La Società non ſi propone, che l' inveſtigazione del vero in che che ſia, e di far conferva delle ricerche de' ſuoi, intorno a ciò che è conceduto agli uomini di ſviluppare nelle Scienze con la meditazione, col ragionamento, e con l' oſſervazione. Il connettere tutto inſieme, e il rendere fruttuoſo eziandio quello, che ſembrar può oggidì infeconda ſpeculazione, è opera del tempo, e bene ſpeſſo di accidentali, e non atteſe combinazioni. Queſto è il bene, il vantaggio capitale, che mancava all' Italia, in cui, non il poſſedimento d' uomini illuſtri, e nelle Scienze quant' altri mai perſpicaci e profondiſſimi, ma ben l' unione di loro in un ſol corpo regolato poteva altrui invidiarſi da gran tempo.

Così avverrà, che ſi rivendichino pienamente i dritti di una regione, che fu prima dell' altre ricovero e ſede delle Scienze, e dell' Arti, e donde attinſe da' primi ſecoli l' Europa ſtudj, inſtituzioni, e cultura.

INDICE
DELLE MEMORIE
PRIMA SEZIONE.

INtroduzione a' nuovi principj della Teoria elettrica dedotti dall' Analisi de' Fenomeni dell' elettriche punte

Del P. CARLO BARLETTI delle Scuole Pie Professore di Fisica nell' Università di Pavia . . pag. 1

Teoria del nuovo Astro osservato prima in Inghilterra

Del Sig. Ab. RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH Professore di Ottica al Dipartimento della Marina a Parigi 55

Risultati di Sperienze sopra l' elasticità de' fluidi aeriformi permanenti sul mercurio

Del Sig. FELICE FONTANA Direttore del Gabinetto Fisico di S. A. R. il G. Duca di Toscana . 83

Principj Generali della solidità e della fluidità de' Corpi

Del Medesimo 89

Articolo di Lettera scritta dal Medesimo al Fratello Professore di Matematica nell' Università di Pavia *sopra la Luce, la Fiamma, il Calore, e il Flogisto* . 104

Sopra la misura della luce in generale, e sopra l' illuminazione de' varj segmenti del Disco solare tagliati dall' orizzonte nel tempo del nacere e tramontare del Sole

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie Professore di Matematica nell' Università di Pavia. 111

Sopra la discesa de' Gravi per la convessità de' Canali Curvilinei

Del Medesimo 174

Sopra i logaritmi delle quantità negative, e sopra gl' immaginarj

Del Medesimo 183

Descrizione di una Macchina Meteorologica per mezzo della quale si determina di ora in ora la durata e quantità della pioggia

Del Sig. CAVALIERE MARSILIO LANDRIANI 203

Ricerche ed Osservazioni sociali fatte per perfezionare il Barometro

Del Sig. PIETRO MOSCATI Regio Professore, e Sig. CAVALIERE MARSILIO LANDRIANI 225

Nuova Investigazione della Somma Generale delle Serie

Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Direttore delle Scuole Militari di Verona 268

Ricerche intorno al Calcolo Integrale dell' Equazioni Differenziali finite. Memoria I.

Del Medeſimo 373

Sperienze ſopra il Precipitato Porpora ottenuto dal Gaz ricavato dallo Stagno, e dalla ſua Calce

Del Sig. CONTE MOROZZO 431

Delle Vibrazioni Sonore de' Cilindri

Del Sig. CONTE GIORDANO RICCATI . . 444

Oſſervazioni ed eſperimenti ſopra la ſcompoſizione del Sale Ammoniaco per mezzo della Calce terrea

Del Sig, CONTE SALUZZO 526

Riſultati di eſperienze ſopra la riproduzione della Teſta nelle Lumache Terreſtri

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Profeſſore di Storia naturale nell' Univerſità di Pavia 581

Memoria intorno alla maggior perfezione dell' Argano

Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di S. A. R. il G. Duca di Toſcana 613

SECONDA SEZIONE.

Lettera del Sig. FELICE FONTANA Direttore del Reale Muſeo di Fiſica e di Storia Naturale di Firenze

Al Sig. ADOLFO MURRAY Profeſſore di Anatomia

a Upſal. Scritta il dì 20. di Ottobre 1781. 648

Dell' irreducibilità della Formula Cardanica a forma finita, algebraica, e libera da aſpetto immaginario

Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Direttore delle Scuole Militari di Verona 707

Eſpoſizione Anatomica delle parti relative all' Encefalo degli Uccelli

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle Regie Terme Acqueſi, e Chirurgo Maggiore del Real Preſidio di Turino 747

Eſame critico di un Problema di Probabilità del Sig. Daniele Bernoulli, e ſoluzione di un altro Problema analogo al Bernoulliano

Del Sig. GIO: FRANCESCO MALFATTI Profeſſore di Matematica nell'Univerſità di Ferrara . . . 768

Nuovo uſo della Chinachina nel Vajuolo

Del Sig. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI. 825

INTRODUZIONE

A nuovi Principj della Teoria Elettrica dedotti dall' analiſi de' fenomeni delle Elettriche punte.

Del P. CARLO BARLETTI, Delle Scuole Pie, Profeſſore di Fiſica nell' Univerſità di Pavia.

PARTE PRIMA.

SUppongo notiſſime le prime ſperienze ſulle Elettriche punte, pubblicate da *Franklin*, e da le *Roi*, non meno che le più recenti di *Franklin* medeſimo, di *Wilſon*, di *Naime*, e di *Barbier* de *Tinan*. Come però le prime non ſono che fatti iſolati, incapaci di formare induzione; così le altre ſono unicamente riſtrette all' uſo delle punte ſteſſe nel riparare le fabbriche da' danni del fulmine; e perciò non tendono a perfezionare la teoria delle punte; e per mancanza appunto di quella teoria reſtano in ſeſteſſe meno eſpreſſive. Ho fatto io qualche ſaggio per ripigliare le coſe da capo, e tentarne una teoria, che renda meno incerte e precarie quelle prime, ed inſieme più chiara l' eſpreſſione delle ultime. Eſporrò primieramente alcune ſperienze con tutta la brevità.

Comincio dal miſurare l' azione di una elettrica punta oppoſta alla ſuperficie armata di uno ſtrato reſiſtente; indi al roveſcio diretta dalla ſuperficie ſteſſa da un conduttore elettrico. Mi ſembrò queſta la più ſicura via per ridurre a miſura ed a proporzione ciò che ſino qui non ſi maneggiò ſe non a maſſe confuſe.

Nella macchina elettrica a diſco di pulito criſtallo iſolo il cuſcinetto ſtrofinante, ed a queſto unisco un con-

duttore fatto a tubo di ottone lungo pollici 18, del diametro di pollici 2, in tutta la ſua lunghezza cilindrico, che termina in cono dalla parte che guarda il cuſcinetto ſtrofinante, ed all'oppoſta eſtremità finiſce in globo più groſſo di un mezzo pollice che non è il diametro del tubo. Alla più eſtrema convexità di queſto globo nella direzione ſteſſa dell'aſſe del tubo attacco un filo di ottone groſſo una linea, lungo pollici tre, linee nove, terminato in punta conica acutiſſima.

Lo ſtrato reſiſtente è una laſtra rettangolare di vetro di Germania alta pollici $17\frac{1}{2}$, larga pollici $12\frac{2}{7}$, coperta di foglia di ſtagno egualmente nelle due oppoſte ſuperficie con un labbro da ambe le parti nudo e pulito di pollici $1\frac{1}{2}$, talchè reſta un'armatura diſtante dall'altra pel giro di pollici tre intorno all'orlo del vetro.

Dalla cima di ciaſcuna armatura pende nel mezzo un ſottil filo di lino lungo pollici 11, teſo in fondo con un globetto di midolla di ſambuco groſſo linee tre.

Sta queſto quadro ſoſtenuto verticalmente ſecondo la ſua altezza ſopra due baſi iſolanti, col moto delle quali può a piacimento appreſſarſi, o ſcoſtarſi dalla punta qui ſopra fiſſata nel tubo. Ed appunto reſtando queſta diretta a due terzi di altezza d'un'armatura, ed appoggiando all'armatura oppoſta un groſſo filo di ottone, acciocchè la ſteſſa per tal via comunichi liberamente col ſuolo, e poſſa il quadro coricarſi; io eccito colla rotazione del diſco la reſinoſa elettricità nel tubo, e nelle varie diſtanze di quel quadro dalla punta ſteſſa faccio la ſeguente Serie di ſperienze. Avverto ora per ſempre, che in ciaſcuna variazione delle diſtanze dalla minima fino alla maſſima reſta ſempre eguale l'eccitamento di elettricità nella macchina, ed eguale è il numero de' giri del diſco in ciaſcun atto d'ogni progreſſione delle diſtanze medeſime. Furono que' giri in alcune progreſſioni trenta, in altre ſeſſanta, ma ſempre in egual numero ad ogni diſtanza della intera progreſſione.

SERIE PRIMA.

1. Ritiro paſſo paſſo il quadro dal contatto colla punta fino alla diſtanza di quattro pollici, e trovo ad ogni paſſo nel quadro piena la forza della carica ſcuotente e fulminante.

2. Seguo gradatamente a ritirare il quadro fino alla diſtanza di pollici ſei, e trovo che ne' frappoſti intervalli comincia a comparire alquanto diminuita la forza della carica.

3. Per diminuirla notabilmente e renderla ſotto la metà della piena ſua forza fa d'uopo ritirare il quadro fino alla diſtanza di pollici otto.

4. Dagli otto fino a' dodici andò ſcemando la forza della carica, la quale però fu tuttavia bene ſcintillante e ſcuotente. Scemò per altro tale forza con progreſſione più aſſai decreſcente al di là degli otto pollici, che non faceva fino agli otto.

5. La provai ancora ſenſibile tanto nella ſcintillazione, come nella ſcoſſa, ritirando il quadro fino ai quattordici pollici lontano dalla punta. In queſte ultime degradazioni per accertarmi più ſicuramente ſcarico il quadro facendone paſſare la ſcoſſa tra l'indice e il pollice della mia mano, co' quali tocco inſieme le oppoſte armature.

6. Al di là de' quattordici pollici più non s'impreſſe nel quadro forza di carica, atta a ſcuotere ſenſibilmente, ma ſoltanto a dare tenue ſcintillazione, e in fine tenui moti nel pendolino anneſſo all'armatura nell' atto che continuava a girare il diſco.

7. I cuſcinetti e il tubo, che porſero perenne vena di elettricità in tutte queſte ſperienze, non erano perfettamente iſolati dai corpi intorno, ſe non alla diſtanza di otto pollici: il che ſi deve tener a mente pel ſucceſſivo confronto.

8. Misurai la forza della scintilla nel tubo, mentre si caricò il quadro in tutte le distanze precedenti; e trovai, che nelle distanze de' primi numeri era tanto languida l'elettricità, che appena poteva trarsi la scintilla, accostando il dito al tubo ad una linea o due; ed anche alle maggiori distanze del quadro, notate negli ultimi numeri, la scintilla comparve sempre dal tubo assai fiacca alla distanza di tre linee appena.

La punta unita al tubo in questa prima Serie si chiamerà per compendio *punta di elettricità resinosa*.

PREPARAZIONE.

Ritengo l'antecedente preparazione, e soltanto stacco la punta dal globo, e la fisso nella medesima altezza e direzione dell'asse del tubo sull'armatura del quadro. Presento quella punta al globo, cui stava prima unita, e rinnovando ad ogni varietà delle distanze i trenta o sessanta giri del disco, che replico egualmente in ciascuna progressione, ho la seguente Serie di sperienze.

SERIE SECONDA.

1. Parto al rovescio dell' antecedente Serie della distanza di quattordici pollici, ed arrivo fino alla distanza di sei pollici, prima di trovare nel quadro il minimo cenno di que' moti e di quella luce, che erano ancor tanto notabili nella prima Serie molto al di là de' quattordici.

2. Dopo la distanza di sei pollici comincia qualche volta a comparire alcun tenue moto, e poi alcuna luce, ma senza verun indizio di scossa.

3. Per avere nello scaricare il quadro qualche costante segno di luce scintillante dopo i trenta o sessanta giri del disco, d'uopo è appressare la punta al globo fino

ai quattro pollici, nè queſti ancora baſtano per renderne ſenſibile la ſcoſſa.

4. Inoltrata ancor di più la punta ſotto ai tre pollici dal globo, comincia a ſentirſi nel quadro picciola ſcoſſa, come nella Serie antecedente alla diſtanza di quattordici.

5. Per avere un ſenſo di ſcoſſa equivalente a quello, che ſi ebbe nell' antecedente Serie al di là degli otto pollici, fu qui neceſſario inoltrare la punta ai due pollici dal globo.

6. In fine la piena ſcarica fulminante non ſi ottiene mai, ſe non portata la punta a diſtanza non meno di un pollice.

7. L' iſolamento del tubo era in tutta queſta Serie perfetto, come nell'antecedente ad otto pollici.

8. La forza dell'elettricità nel tubo, mentre ſi caricò il quadro, fu tale, che eſſendo la punta alla diſtanza di quattro pollici non mancò di trarſi dal tubo ſcintilla piena viviſſima e frequente, preſentando il dito anche al di là di un pollice. Ed accoſtandoſi la punta ai tre, ai due, e per fino verſo ad un pollice, non ſu mai tanto fiacca la ſcintilla, come lo fu nell' antecedente Serie, quando il quadro era lontano dalla punta verſo i quattordici.

La punta unita al quadro in tutta queſta Serie la chiamerò per brevità *punta oppoſta alla reſinoſa elettricità*.

Corollari.

1. La punta di elettricità reſinoſa induce la carica nell' oppoſto quadro con forza per lo meno quadrupla della punta oppoſta alla ſteſſa elettricità.

Quella in diſtanza di quattordici pollici imprime nel quadro tanta carica (*Ser.* 1. *n.* 5), come queſta ai tre (*Ser.* 2. *n.* 4); e nuovamente quella agli otto pollici tanta, come queſta ai due (*Ser.* 2. *n.* 5); e in fine

quella ai quattro pollici, come queſta ad uno (*Ser.* 1. *n.* 1, *e Ser.* 2. *n.* 6).

2. La punta di elettricità reſinoſa diſperde la ſua ſpecie raccolta, o accorrente di continuo nel ſuo conduttore con forza per lo meno ſettupla della punta oppoſta alla ſteſſa elettricità.

Le ſcintille nel tubo con punta, quando il quadro fu alla diſtanza di quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 8), reſtarono ſempre minori, che quando la punta del quadro fu vicina al tubo anche più di due pollici (*Ser.* 2. *n.* 8). Ora quelle ſcintille ſono la più eſatta miſura della elettricità reſidua, cioè non diſperſa.

3. La punta di reſinoſa elettricità induce notabile forza di carica nell' oppoſto quadro, benchè queſto ſia rimoſſo fino a' limiti dell' iſolamento.

I limiti dell' iſolamento ſono otto pollici (*Ser.* 1. *n.* 7), e la forza della carica ſi trova ancora in que' limiti poco meno della metà (*Ser.* 1. *n.* 3).

4. E ſegue ad indurre ancora qualche forza nel quadro rimoſſo alla diſtanza di tre quarti al di lá di que' limiti.

La forza della carica è ancor ſenſibile oltre ai dodici fino a' quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 4, 5), cioè ſei pollici al di là de' limiti dell' iſolamento, e queſti ſono appunto tre quarti di otto.

5. La forza della carica, impreſſa dalla punta ſteſſa nel quadro al di là dei limiti dell' iſolamento, non corriſponde alla diminuzione di forza, che ſi oſſerva nella ſcintilla tratta dal tubo.

Nella ſeconda Serie non fu mai la ſcintilla tanto fiacca, anche quando nel quadro s' impreſſe la piena forza della carica, come lo era nella prima Serie, quando la carica fu tenuiſſima alla diſtanza di quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 5, 8. *Ser.* 2. *n.* 8). Tale ſcintilla è lenta, e ſpicca appena a tre linee dal tubo; quando la ſcintilla piena, tolta la punta, ſpicca frequente a diſtanza di un

pollice ; e frattanto la carica è tenuiſſima . Dunque l' elettricità del tubo non concorre, che in picciola ſua parte a far queſta carica.

6. Viceverſa la punta oppoſta all' elettricità reſinoſa non induce nel quadro veruna carica, nè ſcema punto la forza della ſcintilla nel tubo, finchè l' armatura ſteſſa, cui ſta unita la punta , non arriva entro i limiti dell' iſolamento.

Finchè la punta non è vicina verſo i quattro pollici al tubo, non compariſce nel quadro menoma carica, e appena qualche tenue luce (*Ser.* 2. *n.* 3). Ora il filo della punta è lungo pollici tre e nove linee, come ſi avvertì da principio. Aggiunti queſti a' quattro pollici, ſanno pollici ſette e nove linee, che corriſpondono dentro i limiti dell' iſolamento.

7. Nè comincia la carica a farſi notabile nel quadro, ſe non quando l' armatura ſteſſa è inoltrata verſo un quarto entro i limiti dell' iſolamento.

Inoltrata la punta ſotto i tre pollici, e fino ai due ſi ha nel quadro notabile la ſcoſſa (*Ser.* 2. *n.* 4, 5). Aggiunti queſti alla lunghezza del filo della punta fanno verſo i pollici ſei, che portano l'armatura inoltrata due pollici, cioè verſo un quarto inoltrata entro i limiti dell' iſolamento.

8. E qui la diminuzione di ſcintilla, tratta in quell' atto dal tubo, è corriſpondente al ſucceſſivo aumento della carica impreſſa nel quadro.

Fino ſotto ai quattro pollici, ove niuna fu la carica nel quadro, reſtò piena e frequente la ſcintilla; nè andò queſta ſcemando, ſe non in proporzione che maggiore s' impreſſe nel quadro la carica (*Ser.* 2. *n.* 6, 8).

PREPARAZIONE.

Mi ſervo della ſteſſa macchina, e tubo, e quadro, e punta, ſe non che tolto l' iſolamento de' cuſcinetti, pre-

ſento il tubo nel modo ſteſſo di prima, non più ai cuſcinetti, ma al diſco, in diſtanza da quelli d' un ſeſto circa della periferia del diſco. Talchè in vece di reſinoſa elettricità raccolgo nel tubo la vitrea, e ſo con queſta la Serie di ſperienze corriſpondenti alle due premeſſe. Comincio pertanto ad applicare la punta al globo del tubo, e preſento a queſta il quadro ſimilmente, come nella prima Serie, nelle diſtanze ſeguenti con trenta e ſeſſanta giri del diſco in ciaſcuna.

SERIE TERZA.

1. Dal contatto del quadro colla punta, ritirandolo fino verſo la diſtanza di due pollici, s' induce nello ſteſſo piena forza di carica.

2. Ai tre pollici ſi riconoſce già alquanto diminuita: ai quattro è già verſo la metà.

3. Indi va per modo ſcemando, che a' ſei è già molto al di ſotto alla metà della piena ſua forza.

4. Rimoſſo il quadro a piccioli tratti da' ſei fino a' dieci pollici, reſta ad ogni ſucceſſivo tratto diminuita la carica, talchè ai dieci è alquanto minore, che non era nella prima Serie alla diſtanza di dodici.

5. Dai dieci fino ai dodici pollici ſi riduce all' ultimo termine la forza ſcuotente, e non reſtano al di là, che tenui ſcintillazioni, come erano nella prima Serie al di là dei quattordici.

6. Volli qui proſeguire a ritirar tanto il quadro da veder fin dove reſtaſſero ſenſibili quelle ſcintillazioni; e le trovai notabilmente diminuite ai quattordici pollici; indi però continuarono, ma appena notabili fino ai pollici venti; al di là de' quali non comparvero che tenuiſſimi ſegni di luce, nel toccare col pollice e indice inſieme le due oppoſte armature del quadro, fino alla diſtanza di pollici ventitre; oltre i quali non reſtò che fino ai ventiquattro pollici alcun tenue moto nel pendolino

dolino anneſſo all'armatura nell'atto che continuava a girare il diſco.

7. L' iſolamento del tubo in tutta queſta Serie era perfetto ai dieci pollici.

8. Le ſcintille al tubo, benchè ſi caricaſſe il quadro vicino alla punta più d'un pollice e mezzo, non furono mai tanto fiacche, come lo furono nella prima Serie, quando era il quadro al di là de' quattordici.

9. Quando ſi caricò il quadro al di là de'quattro pollici, la ſcintilla ſi ebbe già viva e frequente; e infine ritirato il quadro al di là degli otto pollici poco era lontana dalla prima ſua forza; alla quale giunſe, e reſtò mai ſempre, qualora era il quadro diſtante più di pollici dieci.

Si chiamerà in tutta queſta Serie *la punta di elettricità vitrea*.

PREPARAZIONE.

Rimane la ſteſſa preparazione, ſe non che traſporto la punta del globo, e la fiſſo nella ſteſſa altezza e direzione all'armatura del quadro. Indi come nelle precedenti Serie la preſento al globo ſteſſo nelle ſeguenti diſtanze.

SERIE QUARTA.

1. Comincio dalle maggiori diſtanze, e dopo trenta o ſeſſanta giri del diſco ſcorgo ſoltanto a' dieci pollici i primi moti al pendolino anneſſo all'armatura.

2. Succedono ai moti i primi cenni di luce, mentre tento di ſcaricare il quadro: ed ai nove pollici già è ſenſibile inſieme alla ſcintillazione una lieve forza di ſcuotere.

3. Più innanzi di nove pollici creſce la carica ſcuo-

tente per modo, che a' sei è già ben vicina alla metà della piena sua forza.

4. Ai quattro pollici è alquanto maggiore, che non era nella terza Serie alla stessa distanza; ed al di là dei tre si ha sempre piena la carica scuotente, e fulminante.

5. L' isolamento fu lo stesso che nell' antecedente Serie.

6. E le scintille comparvero dal tubo come nella Serie antecedente (*n.* 9); se non che qui in parità di quelle distanze furono alquanto più tarde e più deboli.

Dirò in tutta questa Serie *la punta opposta alla vitrea elettricità*.

COROLLARJ.

1. La punta di vitrea elettricità induce la sua specie nell' opposto quadro, finchè questo è dentro i limiti dell' isolamento con forza notabilmente minore della punta opposta alla stessa elettricità; ma quando il quadro è fuori de' limiti dell' isolamento, quella imprime nello stesso la sua specie con forza non meno d' un terzo maggiore di questa.

Finchè il quadro è dentro i limiti dell' isolamento, quella induce piena carica sotto la distanza di due pollici (*Ser.* 3. *n.* 1), questa fa lo stesso alla distanza di tre (*Ser.* 4. *n.* 4). In quella ai sei pollici la carica è molto meno di metà (*Ser.* 3. *n.* 3). In questa alla stessa distanza è già ben vicina alla metà (*Ser.* 4. *n.* 3); ed ai quattro pollici è qui maggiore che in quella (*Ser.* 4. *n.* 4).

Fuori de' limiti poi quella induce carica da far senso di scossa alla distanza di dodici pollici (*Ser.* 3. *n.* 4). Questa fa lo stesso soltanto a' pollici nove (*Ser.* 4. *n.* 2), nella quale distanza è il quadro fuori dell' isolamento per la maggior lunghezza del filo della punta. E perciò col confronto delle scosse, e delle sole distanze dalle

punte ſarebbe quella maggiore d' un terzo eſatto. Ma ſiccome col confronto degli ultimi cenni di luce quella arriva al di là de' ventitre (*Ser.* 3. *n.* 5), e queſta non ſi eſtende al di là de' dieci (*Ser.* 4. *n.* 1), a' quali aggiunti pollici tre linee nove della lunghezza della punta, non arrivano a' quattordici; perciò non ho ſtimato di ſcoſtarmi dalla verità eſprimendone la proporzione non meno d'un terzo.

2. La punta di vitrea elettricità diſperde la ſua ſpecie raccolta o accorrente di continuo nel conduttore con forza minore della punta oppoſta alla ſteſſa elettricità.

Le ſcintille, che moſtrano i reſidui dell' elettricità non diſperſa, furono ſempre minori in pari diſtanze colla punta oppoſta alla vitrea elettricità, che colla prima (*Ser.* 3. *n.* 9. *Ser.* 4. *n.* 6). Dunque la punta di vitrea elettricità diſperde meno.

Ma queſta minor diſperſione ſi prova ancor più eſattamente dalla maggior forza, colla quale quella ſpinge nell' oppoſto quadro i ſegni della ſua elettricità. Poichè quella inoltra la carica ſenſibile fino ai dodici pollici (*Ser.* 3. *n.* 4), e gli ultimi ſegni fino ai ventiquattro pollici (*ivi n.* 5). Queſta nella carica non oltrepaſſa i nove, e negli ultimi ſegni non paſſa i dieci pollici (*Ser.* 4. *n.* 1, 2). Sommando queſte ragioni ſono come 36 : 19, e perciò quella diſperſione è poco meno di ſubdupla.

3. La punta di vitrea elettricità non induce nell' oppoſto quadro ſe non tenue forza di carica, quando queſto è rimoſſo ai limiti dell' iſolamento.

Riſulta dall' immediato confronto del n. 4 e 7 della terza Serie.

4. E non arriva ad indurne forza ſenſibile al di là d' un quinto de' limiti dell' iſolamento.

Non oltrepaſſa tale forza dodici pollici (*Ser.* 3. *n.* 5), e l' iſolamento è dieci.

5. La forza della carica impreſſa dalla punta ſteſſa nel quadro, tanto entro, come oltre i limiti dell' iſo-

lamento, ha proporzionale diminuzione di ſcintilla tratta dal tubo nell' atto che ſi fa quella carica.

Colla progreſſione, che ſi allontana il quadro, ſcema la forza della carica impreſſa (*Ser.* 3. *n.* 3, 4, 5); e nella ſteſſa progreſſione creſce la frequenza e la vivacità della ſcintilla (*Ser.* 3. *n.* 9).

6. Viceverſa la punta oppoſta alla vitrea elettricità continua ad indurre nel ſuo quadro qualche forza di carica fino alla diſtanza di nove decime dell' iſolamento del tubo, e quando l'armatura del quadro è poco meno di tre decime fuori de' limiti dell'iſolamento.

Ai nove pollici è ancor ſenſibile nel quadro la forza di ſcuotere (*Ser.* 4. *n.* 2), e l'iſolamento è dieci.

Per dichiarazione dell' ultima parte non ſi ha, che aggiugnere ai nove altri pollici tre e linee nove, che ſono poco meno di tre decime fuori de' limiti dell'iſolamento.

7. E la carica impreſſa arriva alla metà della piena ſua forza, quando la punta è diſtante dal tubo tre quinti dell'iſolamento, e quando l'armatura è ancor di poco inoltrata entro que' limiti.

Si ha la metà della carica a pollici ſei della punta (*Ser.* 4. *n.* 3), che ſono tre quinti dell' iſolamento dieci. Ma l'armatura è più in dietro per tutta la lunghezza della punta, che è pollici tre linee nove. Dunque in tal atto l' armatura è appena inoltrata di tre linee ne' limiti dell'iſolamento.

8. E qui pure nell'atto che ſi fa la carica ſi ſcorge la ſcintilla nel tubo diminuita in proporzione dell' aumento della carica ſteſſa.

Si prova dal numero 4 e 6 della quarta Serie col raziocinio ſimile a quello del Corollario quinto, ſe non che qui a diſtanze eguali a quelle del Corollario quinto la carica è alquanto maggiore, e in proporzione minore la ſcintilla. Fuori poi de' limiti dell'iſolamento, come niuna è la carica, così niuna è la diminuzione della ſcintilla.

INTRODUZIONE

Alla teoria delle punte negli elettrici fenomeni.

NOn altro avendo io riconoſciuto colla privata meditazione de' fenomeni delle elettriche punte deſcritte dai celebri Fiſici, che ſul bel principio accennai, ſe non anguſtie d' inveſtigazione, anche ne' più grandioſi apparati, e figlia di quelle la confuſione e la contraddizione, quanto fatte per eccitare meraviglia e ſorpreſa, altrettanto inette per iſtruire; mi propoſi di riſolvere tutti i poſſibili fenomeni delle punte ciaſcuno ne' ſuoi diſtinti elementi, e di ridurre ciaſcun elemento a miſure e proporzioni, quanto più ſi poteſſero, preciſe. Trovai a queſti oggetti inſufficiente l' uſo degli elettrometri anche più delicati, come altrove dimoſtrerò; e fui per le diſaſtroſe e lunghe vie dell' analiſi condotto in fine a nuove e luminoſe ſperienze, che ho diſtribuite in tre parti. Formano la prima quelle quattro Serie di ſperienze co' Corollarj ſin qui propoſti, e co' ſeguenti Teoremi. Comprende la ſeconda parte altra Serie di ſperienze con punte oppoſte a punte, e ſuperficie a ſuperficie, ne' Corollarj e Teoremi delle quali ſaranno vie più confermate le verità ſtabilite nella prima parte; e compariranno alfine ſfatati il pennello, la ſtelletta, e ſimili apparenze di elettrica luce. Abbraccia la terza parte le combinazioni delle punte e delle ſuperficie procedenti dalle oppoſte facce di bocce o quadri caricati di elettricità, le quali ſecondo l' uſo noſtro poſſono maneggiarſi con tale eſpreſſione che fanno dai veri fonti, e naturalmente ſcorrere tutte

le novità con ſingolare diligenza deſcritte da *Franklin*, da *Bergman* (*), da *Barbier* de *Tinan*, e da *Naime*.

Ripigliando frattanto il filo della prima parte oſſerverò, che non per altra ragione io arrivai a dedurre chiare e diſtinte proporzioni in una materia, quanto ribadita, altrettanto confuſa, e perciò riputata alieniſſima dalla matematica preciſione, e dal calcolo, ſe non perchè raccolſi in quel quadro verticale l' elettricità del conduttore, e la riduſſi non meno nella ſcintilla, che nella ſcoſſa agli eſtremi e ai termini ſenſibili colle indicate diſtanze. E qui benchè io ſia alieniſſimo dalla novità di nomi, co' quali ſogliono alcuni abbacinare il volgo, e rarefare i più ſemplici principj delle ſcienze, fui non oſtante coſtretto a diſtinguere le precedenti Serie di ſperienze ciaſcuna col proprio nome per non involgere i miei lettori e me ſteſſo in un labirinto di vani paradoſſi, che ſorgono inevitabili qualunque volta ſotto l' ambiguità di nomi celiamo un continuo cambio di mezzo termine, ed in vece di ſeguir fedelmente l' ingenuità de' fenomeni vogliamo a bello ſtudio deviare dalla diſtinzione delle idee e de' vocaboli che le eſprimono.

Sarebbe dopo ciò più la noja che l' utile, ſe voleſſi qui trattenermi nel racconto delle varie combinazioni, e de' replicati tentativi, per mezzo de' quali fui condotto a quelle ſperienze luminoſe. Gioverà piuttoſto avvertire, che avendo provato le Serie ſteſſe con varietà d' apparato, d' iſolamento, e di elettricità, trovai in ogni Serie proporzionali le diſtanze e gli effetti; ed ho preſcelte queſte proporzioni delle diſtanze e degli effetti,

---

(*) Le ſperienze di *Bergman* quanto ſono più belle, tanto meno ſono conoſciute. Le riporterò qui colle ſteſſe ſue parole: *Apices poſitivi flant, & negativi quoque; quod ad oculum monſtrari poteſt, phoſphoro illito. Nam vapores alias vage e corpore non electriſato ſurgentes, inſtar caudæ cometæ tam poſitivi quam negativi ad magnam diſtantiam ejectant. Difficulter cum privatione, rarefactione, & adfluxu fluidi electrici conciliari poſſunt phænomena allata.* Nelle Tranſazioni Filoſofiche di Londra Vol. 54 ann. 1764 pag. 87.

come le medie, e più coſtanti, dopo averle ripetute non meno di ſei volte in ciaſcun atto e termine loro.

E ſiccome le prime Serie mi hanno preſentato facili e chiari i Corollarj precedenti; così colla combinazione di queſti fra loro e colle ſteſſe ſperienze mi vedo naſcere inaſpettati Teoremi, che comincierò ad eſporre coll' ordine più naturale.

TEOREMA I.

La punta di reſinoſa elettricità induce nell' oppoſto quadro la ſua carica con forza per lo meno quadrupla, che non la punta di vitrea elettricità.

Nella reſinoſa la carica ancor piena è alla diſtanza di quattro pollici, che ſono pur quattro entro l' iſolamento, nè arriva ſotto alla metà, che agli otto, limite dell' iſolamento (*Ser.* 1. *n.* 3, 8); e l' ultimo termine della carica è ai quattordici pollici, che ſono tre quarti fuori del limite dell' iſolamento (*Ser.* 2. *Cor.* 4).

Nella vitrea non è piena la carica, che ſotto ai due pollici, che ſono piedi otto dentro l' iſolamento (*Ser.* 3. *n.* 1, 2, 7); a' ſei pollici è gia molto meno di metà, benchè ſia ancor quattro entro l' iſolamento (*ivi n.* 3); e l' ultimo termine è ai dodici pollici (*ivi n.* 4), che ſono un quinto fuori del limite dell' iſolamento, nel qual limite, come colla reſinoſa era la carica poco meno di metà, così qui non è, ſe non proſſima all' ultimo decadimento (*ivi n.* 4).

Calcoliamo queſte proporzioni, che ſono
nella piena carica in diſtanza di pollici -- 4 : 2
entro l' iſolamento ſono pollici - - - - - 4 : 8
Ma ſiccome l' iſolamento fu aumento maggiore di forza, così dovrà inver-

terſi (*) la ſeconda ragione, e ſaranno

perciò comparandole, come ------ 32 : 8
Similmente verſo la metà della carica
ſono le diſtanze pollici -------- 8 : 6
Entro l' iſolamento pollici -------- 0 : 4
Invertendo i termini dell' iſolamento ſo-
no come ---------- 32 : 6
L' ultimo termine della ſcoſſa ſono pol-
lici quattordici ai dodici, che ſono
come pollici ---------- 7 : 6
Fuori dell' iſolamento ſono $\frac{7}{5} : \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 5}{4}$
come ---------- 15 : 4

E perciò compongono la ragione, come 105 : 24

Ai confini dell' iſolamento, ove non rimane che la ſemplice ragione della forza di carica, è queſta nella prima poco meno di metà, nella ſeconda è proſſima all' ultimo decadimento.

Ora tanto in queſta ultima ſemplice, come nelle antecedenti proporzioni, preſe ſolitarie, o ſommate (**), è in alcuna fino a quintupla, non è mai in veruna meno di quadrupla quella forza, come abbiamo propoſto.

TEOREMA

(*) Eſſendo che l' iſolamento maggiore corriſponde alla minor diſtanza del quadro dalla punta: e quella ſa creſcere, come la maggior diſtanza fa ſcemare la carica impreſſa nel quadro; perciò nel miſurare la forza, che la imprime, aſſumo la funzione dell' iſolamento in ragione ſemplice inverſa dentro i limiti, e diretta fuori di que' limiti, benchè ſia forſe in ragione maggiore, che non ſono quelle ſemplici miſure. Per un Matematico che bramaſſe d' inveſtigare la funzione degl' iſolamenti vi ſono dati ſufficienti nelle Serie di ſperienze.

(**) Come ſi tratta di gradi, o varietà corriſpondenti di effetti ſimili, le ragioni devono comporſi ſommando: quando poi ſi conſiderano diverſi elementi, che concorrono a compire un effetto ſolo, come le diſtanze, e gl' iſolamenti in ciaſcun termine della forza della carica, devono comporſi moltiplicando.

TEOREMA II.

La punta di reſinoſa elettricità unita ad un conduttore diſperde l'elettricità raccolta o accorrente di continuo nello ſteſſo con forza per lo meno decupla della punta di vitrea elettricità.

L'elettricità non eſtinta, nè diſperſa dalla punta, che parte da un conduttore, ſi riconoſce colla frequenza e colla vivacità delle ſcintille che a quello ſi traggono. Ora quando al conduttore non fu unita la punta, le ſcintille di reſinoſa elettricità comparvero più rapide e vivaci, che quelle della vitrea.

Colla punta unita al conduttore nell'una e nell'altra ſpecie di elettricità fu tanto notabile la differenza, che poſto nella vitrea il quadro vicino alla punta più d'un pollice e mezzo e fin verſo ad un pollice, ſi ebbero ancora dal tubo conduttore aſſai meno fiacche le ſcintille, che non lo furono colla reſinoſa poſto il quadro al di là dei quattordici pollici (*Ser.* 3. *n.* 8).

Se ſi voleſſe anche qui comporre la ragione delle diſtanze con quella degl'iſolamenti, riſulterebbe di lunga mano maggiore la vera ſuperiorità di forza diſperdente della reſinoſa in confronto della vitrea elettricità. Ma laſcieremo a que' pochi, che ſanno riconoſcere ne' fiſici fenomeni la preciſione matematica, il piacere di rintracciarla, e di convincerſene da per ſe ſteſſi; e dall'immediata ragione dell'indebolimento di ſcintille, e dalle diſtanze di quattordici pollici a meno di uno e mezzo, concluderemo frattanto eſſere nella reſinoſa elettricità la diſperſione per lo meno decupla, che nella vitrea, come abbiamo propoſto.

TEOREMA III.

La punta di reſinoſa elettricità ſpinge la ſua ſpecie raccolta e accorrente da un conduttore iſolato contro uno ſtrato reſiſtente oppoſto 1. fuori de' limiti dell'iſolamento con forza preſſochè quadrupla, che non la punta di vitrea elettricità. 2. dentro i limiti dell'iſolamento con forza non meno di dupla della punta di vitrea elettricità.

1. Quella ne' limiti dell'iſolamento induce nel quadro forza di carica tanto notabile, che è verſo la metà (*Ser.* 2. *Cor.* 3), e ſegue ad indurla ſenſibile anche a tre quarti al di là di que' limiti (*ivi Cor.* 4).

Queſta non induce che tenue forza, quando il quadro è verſo i limiti dell'iſolamento (*Ser.* 4. *Cor.* 3), e non arriva ad indurne ſe non l'ultimo grado ſenſibile al di là d'un quinto di que' limiti (*ivi Cor.* 4).

Ora paragonandoſi la metà della carica con piccioliſſima forza della ſteſſa può prenderſi con ſicurezza non meno di quadrupla di queſta; e così ne' limiti dell'iſolamento ſarà la forza impreſſa in ragione di 4 : 1.

Al di là de' limiti l'ultima carica ſenſibile è nella prima oltre i tre quarti, nella ſeconda ad un quinto appena. Ridotta la ragione di $\frac{3}{4} : \frac{1}{5}$ riſulta ſimilmente per lo meno come 15 : 4, cioè preſſochè quadrupla, come ſi è propoſto.

2. Dentro i limiti dell'iſolamento quella fa piena carica ſino ai quattro pollici (*Ser.* 1. *n.* 1), la quale ſoltanto a' ſei è alquanto ſcemata (*ivi n.* 2), agli otto, ch'è l'ultimo confine dell'iſolamento, è appena ſotto la metà (*ivi n.* 3).

Queſta ai due pollici è appena carica piena (*Ser.* 3. *n.* 1), ai tre già ſcema, ed ai quattro è già verſo la metà (*ivi n.* 2), a' ſei è di molto ſotto la metà (*ivi*

n. 3), ai dieci, ch'è l'ultimo confine dell'isolamento, è vicina all'ultimo grado sensibile (*ivi n.* 4).

Raccogliendo queste proporzioni di semplici distanze, sono

Piena carica come - - - - - - - - - - - - 4 : 2
Prima diminuzione di carica come - - - - 6 : 3
Verso la metà per lo meno come - - - - 8 : 4

le quali sono tutte di ragion dupla.

OSSERVAZIONE.

Abbiamo anche in questo Teorema calcolate le semplici ragioni delle distanze, tanto dentro, come fuori de' limiti dell'isolamento; e non la ragione composta, come nel primo Teorema. Se ci piaccia di calcolarla, risulterà in questo, come in quello, non solo più di quadrupla, ma ancora più di sestupla. Eccone il calcolo

Piena carica - - -	4 : 2	Prima diminuzione di carica -	6 : 3	Verso la metà -	8 : 4
Entro l'isolamento - -	4 : 8 - - - - - - - -		2 : 7	- - - -	0 : 6
moltiplicate	32 : 8 - - - - - - - -		42 : 6	- - - -	48 : 4
invertendo	42 : 6				
la seconda	48 : 4				
Sommate - -	122 : 18				

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione poco meno di settupla

Volli ridurre gl'isolamenti a misura comune per via delle frazioni seguenti

Piena carica $\frac{1}{2} : \frac{4}{7}$. Prima diminuzione $\frac{1}{4} : \frac{7}{10}$. Metà di carica 0: e perciò si trascura quest'ultima ragione, e si compongono colle distanze le due prime soltanto.

Ridotte adunque	le ſteſſe frazioni ſono		
Piena carica -	5 : 8	Prima diminuzione -	10 : 28
Diſtanze corriſpondenti ---	4 : 2	----------	6 : 3
Invertendo gl' iſolamenti	32 : 10	----------	168 : 30
	168 : 30		
I prodotti ſommati ſono	200 : 40		

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione quintupla.

TEOREMA IV.

L'armatura oppoſta alla punta di reſinoſa elettricità continua a raccogliere (*) nel quadro 1. al di là de' limiti dell' iſolamento la carica in proporzione tanto maggiore dell' armatura oppoſta alla punta di vitrea elettricità come 15 : 4. e 2. dentro i limiti dell' iſolamento quella raccoglie la forza della carica con proporzione tanto maggiore dell' armatura oppoſta alla vitrea elettricità, quanto lo è la piena forza della carica a poco più della metà, o come la metà di carica al grado proſſimo all' ultimo della forza di ſcuotere.

1. L' ultimo grado ſenſibile di ſcoſſa in quella è ai tre quarti fuori de' limiti dell' iſolamento (*Ser.* 2. *Cor.* 3), in queſta non oltrepaſſa un quinto fuori dell' iſolamento

(*) Queſto termine di *raccogliere* non ſi prenda in equivoco, quaſichè foſſe l' elettricità emanante, o ſparſa dal conduttore; ma s' intenda di raccogliere l' elettricità, che intorno all'eſtenſione dell' armatura ſteſſa viene ſmoſſa, o ſciolta da quella del conduttore per azione della punta, e per la via del continuo mezzo frapposto.

(*Ser.* 4. *Cor.* 4); onde ridotte queſte ragioni ſono, ſecondo che ſi è propoſto nella prima parte, come 15 : 4.

2. Nell' armatura oppoſta alla punta di reſinoſa elettricità, entro i limiti dell' iſolamento vi è piena carica ai quattro pollici, ch'è la metà dell' iſolamento (*Ser.* 1. *n.* 1), ed è ancor vicina la metà ai pollici otto (*Ser.* 1. *n.* 3), ch'è l'ultimo confine dell' iſolamento.

Nell' armatura oppoſta alla punta di vitrea elettricità la carica è verſo la metà tra i pollici quattro e i ſei (*Ser.* 3. *n.* 2, 3), e così può prenderſi più della metà ai cinque pollici, che ſono la metà del ſuo iſolamento. Ai dieci pollici, che è il confine di queſto iſolamento, la carica è proſſima all' ultimo grado (*Ser.* 3. *n.* 4).

Ritenendoſi adunque i termini comuni delle diſtanze di metà, e de' limiti degl' iſolamenti riſulta in ambedue la proporzione propoſta nella ſeconda parte (*).

TEOREMA V.

Viceverſa la punta oppoſta alla reſinoſa elettricità, conſiderate le ſole diſtanze, induce la carica nel quadro, da cui parte, con forza per lo meno ſubtripla della punta oppoſta alla vitrea elettricità.

Alla diſtanza d' un pollice dal conduttore quella fa piena la carica (*Ser.* 2. *n.* 6), nè reſta vicina alla metà di carica oltre alla diſtanza di due pollici (*ivi n.* 5), nè principia la carica ſenſibile prima di tre (*ivi n.* 3).

Queſta comincia la carica ben ſenſibile ai nove pollici (*Ser.* 4. *n.* 2), ai ſei è vicina alla metà (*ivi n.* 3), ai tre è piena la carica (*ivi n.* 4).

(*) Ho ſtimato di ſervirmi di queſte proporzioni di fenomeni, che eſprimono una funzione da inveſtigarſi; dell' andamento però della quale abbiamo idea molto ſenſibile, e reale, benchè non determinata in numeri.

Abbiamo dunque le distanze per la prima carica - - - - - - - - - - - - - - - - = 1 : 3
per la metà di carica - - - - - - - - - = 2 : 6
per principio sensibile - - - - - - - - - = 3 : 9

Le quali o sommate, o prese distintamente, anche senza comporle coll' altra funzione degl' isolamenti, che le renderebbero assai minori, danno la proposta ragione per lo meno subtripla.

OSSERVAZIONE.

Se si vuole introdurre la funzione degl' isolamenti, eccone il calcolo:

Piena carica -	1 :	3	Metà	2 :	6	Principio sens.	3 :	9
Distanze corrispond. entro l'isolamento -	7 :	7	- - -	6 :	4	- - - - - - -	5 :	1
Moltiplicate	7 :	21	- - -	8 :	36	- - - - - - -	3 :	45
invertendo	8 :	36						
quest' ultima	3 :	45						
Sommate	18 :	102						

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione anche meno di subquintupla.

Provai anche la riduzione degl' isolamenti a comune misura, come nel seguente calcolo

Piena carica - - -	1:	3	Metà	2:	6	Princ. sens.	3:	9
Frazioni corrispondenti - - - - -	7:	7	- -	3:	2	- - - - - -	5:	1
	8:	10		4:	5		8:	10
Ridotte - - - - -	70:	56	- -	15:	8	- - - - -	50:	8
Moltiplicate colla prima ragione invertendo i termini di questa, e in fine sommate sono	56:210		- -	16:90		- - - - -	24:450	
	16: 90							
	24:450							
	96:750							

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione anche meno di ſubſettupla.

TEOREMA VI.

La punta, oppoſta alla reſinoſa elettricità, ſcema l'elettricità del conduttore, a cui ſi preſenta con forza minore di ſubdupla della punta oppoſta alla vitrea.

Colla punta oppoſta alla reſinoſa elettricità continuò la ſcintilla dal conduttore in tutta la ſua forza, finchè quella punta non ſi accoſtò più di quattro pollici; e ſeguitò aſſai viva ai tre, e perfino al di là dei due pollici (*Ser.* 2. *n.* 8).

Colla oppoſta alla vitrea non fu mai piena la ſcintilla, che ritirata la punta al di là dei dieci pollici; agli otto era bene inferiore alla piena ſua forza; ai quattro ancor più tarda e debole (*Ser.* 3. *n.* 9. *Ser.* 4. *n.* 8).

Sono dunque per lo meno le diſtanze di

piena ſcintilla - - - - - - - - - - come	4	10
di prima diminuzione - - - - - - - - -	3	8
di maggior diminuzione - - - - - - - -	2	4
	9	24

Le quali o ſommate, o diſtinte dimoſtrano molto minore di ſubdupla la propoſta ragione.

TEOREMA VII.

La punta oppoſta alla reſinoſa elettricità 1. fuori de' limiti dell'iſolamento non induce alcun cenno di elettricità nell'armatura, o conduttore, da cui parte, mentre la punta oppoſta alla vitrea ne induce i primi ſegni; 2. e dentro que' limiti non ha forza d'indurre la carica ſe non tanto minore della punta oppoſta alla vitrea, quanto lo è il primo grado di carica ſenſibile alla piena forza della carica.

Quella fino ai quattro pollici non dà segni costanti nel suo quadro (*Ser.* 2. *n.* 3); comincia piccolissima carica ai tre (*ivi n.* 4); ai due è meno di metà (*ivi n.* 5); e la prima carica è meno d' un pollice (*ivi n.* 6).

Questa ai limiti comincia moti (*Ser.* 4. *n.* 1); ai nove pollici già è sensibile carica (*ivi n.* 2); a' sei ben vicina alla metà (*ivi n.* 3.); ai quattro è di molto sopra la metà (*ivi n.* 4); al di là dei tre è di piena forza (*ivi n.* 5).

Riduciamo in una tavola queste ragioni:

Dalla punta opposta alla resinosa elettricità	alla punta opposta alla vitrea
distanze pollici 10 - - - - - - - o	ai primi segni
9 - - - - - - - o	carica sensibile
6 - - - - - - - o	carica verso la metà
4 primi segni :	carica sopra la metà
3. carica sensibile :	piena carica
2. carica meno di metà }	carica ridondante
1. piena carica }	

Dalla semplice esposizione di queste ragioni è manifesta la prima parte; e alla distanza di pollici tre si riconosce in termini la proporzione fissata nella seconda parte (*).

TEOREMA VIII.

L' armatura, da cui parte la punta opposta alla resinosa elettricità nello sforzo, o capacità di ricevere segni, o carica elettrica, sta all' armatura, da cui parte la punta opposta

---

(*) E qui pure esprimiamo senza numeri queste ragioni, perchè comprendono quella ragione composta, che lasciamo da investigare ai Matematici; la quale frattanto porge a noi idea ben reale della vera efficacia delle specie di elettricità.

opposta alla vitrea fuori de' limiti dell'isolamento, 1. come zero alla metà della carica. 2. e dentro que' limiti quella sta a questa, come sono i primi segni di elettricità a più di metà della carica, ovvero come lo è meno di metà alla carica piena.

Abbiamo nel Teorema quinto fissate le proporzioni delle punte opposte alla resinosa elettricità, ed alla vitrea colla semplice considerazione delle distanze loro dal conduttore: e nel precedente Teorema settimo abbiamo considerate le distanze stesse in riguardo ai limiti dell'isolamento. Non ci resta qui che di paragonare le distanze dal conduttore delle armature, dalle quali partono quelle punte tanto fuori, come entro i limiti dell'isolamento. Per questo fine a ciascuna delle distanze della tavola precedente aggiugneremo pollici tre e linee nove, che sono la lunghezza del filo della punta stessa fissato su quelle armature.

Armatura opposta alla resinosa sta all'armatura opposta alla vitrea elettricità

Dist. pollici	13. lin. 9	- - - - - - - - - -	o. primi segni
	12. 9	- - - - - - - - - -	o. carica sensibile
	9. 9	- - - - - - - - - -	o. verso la metà di carica
	7. 9	primi segni - - -	: molto sopra la metà
	6. 9	carica sensibile - -	: piena carica
Segg. dist.pol.	5. lin. 9	carica meno di metà	} carica ridondante
	4. 9	carica piena	

E richiamando in mente, che l'isolamento nella resinosa è di pollici otto, e nella vitrea di dieci, deduremo dalla precedente le seguenti proporzioni.

1. Quella oltre i limiti dell'isolamento, e ne' limiti non dà segni, nè carica, questa dà i primi segni quando è ancor fuori dell'isolamento pollici tre linee nove; presenta la prima carica sensibile ancor fuori di que' limiti pollici due linee nove; e porta la carica verso la

metà quando è ancor fuori di que' limiti linee tre: onde risulta la proporzione fissata nella prima parte, come zero alla metà della carica.

2. L'armatura opposta alla resinosa sta all'armatura opposta alla vitrea elettricità entro i limiti dell'isolamento

Distanze lin. 3. primi segni di elettricità } carica molto sotto
lin. 15. prima carica sensibile } la metà
27. carica ancor meno di metà: piena carica
39. piena carica - - - - - -: carica ridond.te

Onde alle distanze di linee tre, e di linee quindici entro i limiti dell'isolamento abbiamo la proporzione in primo luogo fissata nella seconda parte; ed abbiamo l'altra in termini alla distanza di linee ventisette.

OSSERVAZIONE.

Con questi primi Teoremi la causa d'ogni elettrica teoria, fin qui agitata fra le ipotesi e le scolastiche forme, io la produco al tribunale de' Matematici, che sono in fine i veri giudici dell'evidenza; e consegnandola nelle mani loro io ne rimetto a' medesimi la cognizione e la sentenza. Prima dunque di passar oltre a svolgere i distinti elementi delle elettriche punte, i quali non possono far meno di non guidarci a' veri fonti della teoria, da cui derivano, gioverà raccogliere in una tavola, e rappresentare in un colpo d'occhio le distinte proporzioni di questi fondamentali Teoremi, per dedurne con maggior sicurezza, e comprenderne con più facilità le conseguenze.

COROLLARIO.

La punta di resinosa elettricità sta alla punta di elettricità vitrea,

1. Nella forza d'imprimere la carica in ragione per lo meno quadrupla.

2. Nel diſperdere l'elettricità raccolta in ragione decupla.

3. Fuori de' limiti dell' iſolamento per imprimere carica ha forza quadrupla, entro que' limiti non meno di dupla.

4. L'armatura oppoſta alla punta di reſinoſa elettricità ſta all'armatura oppoſta alla punta di elettricità vitrea nel raccogliere la carica,

fuori de' limiti dell'iſolamento, come 15:4.

entro que' limiti, come la piena carica alla ſua metà, ovvero come la metà di carica al grado proſſimo all' ultima ſcoſſa ſenſibile.

5. La punta oppoſta alla reſinoſa elettricità ſta alla punta oppoſta alla vitrea nella forza d'indurre carica in ragione ſubtripla.

6. Per diſperdere, o ſcemare l'elettricità del conduttore in ragione ſubdupla.

7. Per indurre elettricità fino ai limiti dell'iſolamento, ſiccome zero a' primi ſegni.

Entro que' limiti, come il primo grado di carica alla carica piena.

8. L'armatura, da cui parte la punta oppoſta alla vitrea nel raccogliere la carica fuori de' limiti dell'iſolamento, come zero alla metà della carica.

Entro que' limiti, come meno di metà alla carica piena.

TEOREMA IX.

L'iſolamento, o mezzo reſiſtente influiſce ne' fenomeni delle elettriche punte, 1. Come recipiente, e quaſi vaſo contenente l' una ſempre a fronte dell' altra le due ſpecie d'elettricità. 2. Come oſtacolo frappoſto da ſuperarſi dalle medeſime nel compiere la loro unione. 3. Ma qualſivoglia conſiderazione del mezzo è per ſe

ſola inſufficiente per adeguare la ſpiegazione di que' fenomeni.

1. L'iſolamento, e mezzo reſiſtente altro non è, che l'oſtacolo frapposto a qualſivoglia ſpecie di elettricità raccolta o accorrente, che tende a riunirſi coll'opposta ſpecie ſmoſſa attraverſo del mezzo ſteſſo, o raccolta nelle ſuperficie conduttrici eſteſe in tutto o in parte dagli eſteriori limiti del mezzo, o ſtrato iſolante.

(*a*) Dopo le luminoſe oſſervazioni del celebre *Epino* non è più permeſſo di chiamare effuſione di elettricità la sfera di elettrica azione attraverſo i mezzi reſiſtenti. Le piane, o cilindriche, o ſferoidali ſuperficie d'un conduttore elettrico ſono come l'armatura interiore d'una boccia Leidenſe; l'aria ambiente co' corpi iſolanti, che ſoſtengono quel conduttore, ſono come la ſoſtanza del vetro della boccia ſteſſa; e i corpi non iſolanti intorno all'eſteriore limite dell'aria ambiente ſono come l'eſteriore armatura della boccia.

(*b*) A norma di queſte idee l'interiore ſuperficie del mezzo reſiſtente (*), che circonda un conduttore elettrico, può conſiderarſi (quaſi come in Idraulica ſi conſidera la capacità d'un vaſo per contenere i liquidi) come la capacità ſteſſa di contenere l'elettricità raccolta, o concorrente in quel conduttore. Colla differenza però, che in Idraulica quella capacità corriſponde alla cavità del vaſo o recipiente; qui in vece non ſono le ſole miſure della ſuperficie ambiente che determinano quella capacità, ma ſotto le ſteſſe miſure queſta ſoggiace a leggi di capacità da quelle aſſai diverſe. E primieramente deve conſiderarſi la forza propria della elettricità ſteſſa raccolta; la qual forza, per inſiſtere ſulla premeſſa

(*) Sia il mezzo ſolido, o fluido; ſia uniforme, e di una ſola ſoſtanza, come nelle bocce, e ne' quadri, ovvero di ſoſtanze diverſe, come intorno a' conduttori ſoſtenuti da corpi ſolidi, cioè ſete, reſine, o vetri, e nel reſto circondati dall'aria.

ſimilitudine, corriſponderebbe alla ſpecifica gravità de' varj liquidi. Inoltre ſi deve tener conto della mobilità della ſpecie oppoſta di elettricità, che attraverſo del mezzo ſteſſo deve ſmuoverſi. In terzo luogo viene da conſiderarſi la fluidità, o fiſſità delle parti del mezzo ſteſſo, nel che conſiſte la differenza de' mezzi ſolidi o fluidi. Poichè ſebbene in ſoſtanza nulla monti per l' iſolamento la ſolidità, o fluidità; pure i fluidi per la mobilità delle loro particelle ſono dalla elettricità ſteſſa agitati con moto inteſtino non meno delle proprie parti, che de' corpicciuoli eſtranei fra quelle innatanti, che ſi rende viſibile qualora ſono inveſtiti dalla luce d' un raggio ſolare; e con tale moto ſi facilita l' inſenſibile e continua riunione delle oppoſte elettricità in proporzione che vengono ſmoſſe, o raccolte. Creſce infine quella capacità ſecondo la facilità, colla quale il mezzo, o ſtrato reſiſtente ſi preſta a ritener vicine in maggior copia, ſenza però che attraverſo di quello poſſano mai riunirſi, le due oppoſte elettricità, come ne' ſottili ſtrati di vetro abilitati a tale effetto con le armature eſterne non iſolate (*). Poichè l' uffizio del mezzo non è, che di reſiſtere all' unione delle oppoſte elettricità, ma non mai d' impedire la tendenza mutua a tale unione. Che anzi quella tendenza incontra nel frappoſto mezzo capacità di eſercitarſi; e in tale eſercizio conſiſte l' ammaſſamento delle oppoſte elettricità nelle bocce, ne' quadri, e nelle elettriche batterie.

(c) Quindi è, che le oppoſte elettricità non poſſono mai conſiderarſi ſolitarie, e intieramente diſgiunte l' una dall' altra. Non può una ſcioglierſi, che non reſti

(*) Vi è un' altra maniera di accreſcere la capacità de' conduttori, oſſervata da Gordon, e Monnier, dalla quale io ho dedotto altrove (*Phyſ. Spec. art.* 5.) la coſtruzione di paradoſſi elettrici a ſomiglianza de' veri paradoſſi idroſtatici.

ſciolta inſieme l'altra; nè può ciaſcuna adunarſi, o raccoglierſi, ſenza che ſi ſmuova, o ſi raccolga intorno l'oppoſta ſpecie. Ma lo ſmovimento o ſcioglimento di elettricità nel mezzo reſiſtente non è mai dell'omologa a quella del conduttore movente. Poichè queſta omologa reſta libera e ſciolta ſoltanto indirettamente; ond'è, che ne' conduttori frappoſti, o immerſi in tal atto nel mezzo ſteſſo, ſi raccoglie e ſi porta l'omologa in fuori, e la oppoſta in dentro, cioè verſo il confine della elettricità movente; come riſulta dalle più eſatte ſperienze de' moti elettrici, e ſi riconoſce direttamente nelle oppoſte armature iſolate d'una boccia, o d'un quadro mentre ſi carica.

(*d*) Ora come il modo e la ſpecie e la quantità di tali elettriche ſoluzioni interamente deriva dalla ſpecie e quantità raccolta nel conduttore; così la figura e l'andamento delle ſoluzioni medeſime ne' ſucceſſivi ſtrati del mezzo ambiente dalla ſola figura di quel conduttore pienamente ſi regge, e ſi determina. Se tale figura ſia piana, ovvero di cilindrica, o ſferoidale curvatura uniforme, non può non eſſere ſimilmente uniforme, ed equabilmente diſtribuito lo ſforzo dell'elettricità muovente contro tutti i ſucceſſivi punti del mezzo ambiente; e perciò reſtano le elettricità ſciolte ſucceſſivamente a onde, o ſtrati uniformi in tutta la maſſa del mezzo a ſeconda di quella prima figura. Talchè le varie onde o ſtrati delle elettricità ſmoſſe nelle ſucceſſive diſtanze uguali dalla ſuperficie del conduttore rappreſentano come altrettanti indumenti o coperte della ſuperficie ſteſſa, che vanno attenuandoſi nelle ſucceſſive diſtanze, e ſono uniformi ſoltanto in ciaſcuna. Si può in queſto ſenſo dire, che ſi diffonde e propaga queſta elettrica azione quaſi per raggi divergenti dal conduttore, come diciamo del calore, e della luce, che ſi propagano intorno ne' mezzi uniformi quaſi in una ſfera procedente dal corpo infuocato, o lucido, come da centro. E per ſeguitare in

queſte idee non ancora abbaſtanza note e familiari a ſollevare l' intelletto colle ſimilitudini di coſe già ben inteſe, dirò, che tolta l' uniformità e la proporzione di lunghezza nel conduttore, ſuccede nell' andamento di quell' elettrico ſforzo ciò, che ſuccede alla luce introdotta in lenti, o in mezzi più refringenti, che non più è quella ne' ſucceſſivi intervalli uguali uniformemente diffuſa, nè propagata in forma di ſfera.

(*e*) Ciò che ſono le lenti in Ottica, lo ſono le punte nella elettricità. Turbano queſte l' uniforme azione delle elettricità, e le raccolgono talvolta in modo, che ſi eſercitano come per vortice, e ſimulano una effuſione. Qualora pertanto nell' armatura, o nel conduttore iſolato vi ſieno allungamenti di ſuperficie, ovvero ſpigoli, o punte, le quali altro non ſono che ſpigoli più allungati, lo ſforzo della elettricità in quel conduttore raccolta converge nell' apice di tale allungamento, e ne riſulta un aumento di ſforzo nella ſteſſa, che può per ſimilitudine paragonarſi alla velocità, che vien nominata *adulta* in Idraulica, colla quale i liquidi eſcono dagli anguſti fori, o lumi di vaſi molto ampj; ovvero a quell' impeto, con cui dall' eſiliſſimo becco d' una eolipila eſce il vapore, o altro fluido elaſtico. Dico *per ſimilitudine* in quanto alla ſomma dell' aumento, ma non nel modo. Poichè qui non è, come in quelle, ſemplice impeto ed effuſione, ma vera efferveſcenza ed eſploſione con infiammazione.

(*f*) Ciò che ſi è detto del conduttore, che è come l' interiore armatura del mezzo reſiſtente, s' intende con proporzione de' conduttori poſti intorno a' limiti dell' iſolamento, che ne rappreſentano l' eſteriore armatura. Se in queſta vi ſieno allungate ſuperficie, o ſpigoli, o punte, ivi ſi facilita lo ſviluppo delle oppoſte elettricità moſſo da quel conduttore, in quanto che nell' apice di quelle punte ſi raccoglie, e confluiſce l' oppoſta ſpecie (*c*), che ſenza di queſte reſterebbe uniformemente dif-

fusa nel limite di tutta l' estensione degli esterni conduttori (*d*). E può quest' azione per similitudine paragonarsi alla scintilla, che dallo spolverino si comunica a svolgere tutta la massa della polvere inchiusa, e ristretta in un cannone. Se non che ivi si fa l' esplosione per mera espansione verso la bocca del cannone; ma qui succede attraverso lo strato resistente una subita e veementissima efferveseenza, immediato effetto della riunione delle opposte elettricità, che per tal via viene eccitata e promossa con rapidissima progressione. Ed in questa via dell' allungamento di superficie consiste principalmente l' uso dell' *arco conduttore* (*), col quale eccitiamo l' esplosione delle bocce caricate. Quelle parità non sono che per sussidio dell' imaginazione; sono simili in certi riguardi, e nel rimanente conducono a riconoscerne meglio colla similitudine le proprietà, e le diversità. Il prenderle a rigore si chiamerebbe roveseiare le idee, e far torto alla Meccanica ed alla Chimica, non per difetto de' loro principj, ma per la chimerica applicazione.

(*g*) Così s' intende l' azione della elettricità frenata e raccolta dal mezzo resistente frapposto, e accresciuta per la figura allungata o acuta non meno dell' esterno conduttore, che delle conduttrici superficie poste intorno, o sporgenti in dentro del mezzo isolante.

A più chiara intelligenza deve qui notarsi il diverso stato delle specie di elettricità soltanto smossa ne' varj stati del mezzo, e di quelle che sono raccolte nell' estensione de' conduttori. A queste conviene il momento di accelerazione,

(*) Indi accade, che la punta posta all' estremità dell' arco, che si presenta per cavar la scarica, ne accresce per modo il momento, che indebolisce la forza dell' esplosione, e in certo modo la previene. Indi similmente le punte procedenti da qualsivoglia conduttore ne disperdono l' elettricità quasi in proporzione, che in esso si raccoglie, purchè sieno a distanze, ed a stato di mutua azione con la opposta specie.

accelerazione, che ſpiegai, analogo all' adulta velocità, e non a quelle, finchè ſtanno fra loro in tale poſitura e diſtanza, che poſſono egualmente o ſepararſi o riunirſi l' una con l' altra a onde e ſtrati finitimi per qualunque picciola mutazione di forza movente, o accreſciuta, perchè reſtino diviſe, o diminuita, perchè tornino a riunirſi. Queſto ſtato di elettricità è ciò che io chiamo ſmovimento delle contrarie ſpecie, che coſtituiſce i primi gradi della loro ſoluzione, o ſeparazione, che ſi eſtende gradatamente minore a grandiſſime diſtanze attraverſo i mezzi reſiſtenti, ed in quello ſtato ſuſſiſtono finchè ſono come involte nella ſoſtanza de' mezzi ſteſſi reſiſtenti. Se da queſti paſſano dentro o intorno a ſoſtanze conduttrici, allora ſi raccolgono più diviſe, e ſciolte ciaſcuna nella ſua ſpecie, e ſi muovono perciò in qualche ſomiglianza come gli altri fluidi.

2. Che ſe in ſecondo luogo ſi conſideri il mezzo come ſemplice oſtacolo frappoſto alla riunione delle oppoſte elettricità, anche per la via delle punte viene quell' oſtacolo notabilmente diminuito. Poichè l' intero prodotto della reſiſtenza del mezzo conſiderato preciſamente contra tale unione non altrimenti riſulta, ſe non dalla groſſezza del mezzo ſteſſo moltiplicata per la ſua larghezza come baſe. Ora quando queſta larghezza ſi riduce all' apice d' una punta, reſta la baſe infinitamente picciola; e perciò la colonna o maſſa del mezzo reſiſtente rimane in quella proporzione minore; ed oppone conſeguentemente tanto minore oſtacolo alla riunione della elettricità. Ed in queſta diminuzione di oſtacolo, e nell' accreſciuto momento, che abbiamo qui ſopra ſpiegato, conſiſte la facilità, con cui le ſteſſe forze aſſolute, ed oppoſte ſi riuniſcono più prontamente per la via delle punte, che delle piane o ſferiche ſuperficie. E qui noteremo, che mal ſi prenderebbero queſti elementi preciſamente; ma d' uopo è aver riguardo alle forze aſſolute delle elettricità, e allo ſtato di mutua loro azione, e

distinguere inoltre i casi, ne' quali si riducono ad agire per la via delle punte le specie già accumulate in copia maggiore, o minore, e le specie stesse, che cominciano soltanto, e progrediscono ad accumularsi.

3. Sebbene però l'uno e l'altro de' suddetti modi influisca nella piena azione delle punte, nondimeno nè ciascuno, nè l'uno e l'altro insieme hanno sufficienza per adeguarne i fenomeni. E primieramente quel primo aumento si fonda sulle forze reali, e vere potenze esistenti tanto nell'interno, che nell'esterno conduttore, e suppone inoltre fra quelle forze mutua azione. Senza le quali forze, e senza l'azione loro vicendevole sarebbe lo stesso il conduttore negli effetti delle punte, che se si pretendesse in Meccanica di accrescere il momento per la via delle macchine senza potenza alcuna, ovvero con applicare la potenza senza opposizione, e senza unità di centro del moto comune della resistenza.

Nè similmente può prendersi quella diminuzione di ostacolo proccurata dalla costruzione delle punte per una efficienza, o aumento di forza delle punte stesse. Si riunisconо le opposte elettricità con quel residuo dell'assoluta e mutua forza loro, che non restò dispersa, e distrutta nel mezzo frapposto. Ora questo residuo non sussiste tanto maggiore, se non quanto per la via delle punte si fa minore la resistenza del mezzo. Ma qui pure, come nell'antecedente, se si prende in considerazione il mezzo come resistenza, e si prescinde poi dall'assoluta efficacia, e cospirazione delle elettriche forze, si fa lo stesso, che assumere l'astratto per la realtà, e sostituire l'artifizio per diminuire gli ostacoli alla esistenza, ed all'idonea applicazione delle forze naturali. Al Meccanico non bastano le macchine, ci vogliono le forze. Come al rovescio quando le forze non bastano, si ricorre ad unire con queste il sussidio delle macchine.

Ciò poi, che soprattutto dimostra l'insufficienza delle sole considerazioni del mezzo, o isolamento, per ad-

eguare la ſpiegazione de' fenomeni delle punte, ſono le inſigni varietà che nelle ſteſſe circoſtanze di mezzo, e d' iſolamento, riſultano da' precedenti Corollarj, e Teoremi, della quale varietà diremo più opportunamente ne' ſeguenti.

TEOREMA X.

L' azione delle elettriche punte non è ſemplice; nè queſte conſiderate aſſolutamente per ſe ſteſſe altro preſentano, che fenomeni confuſi, e irreducibili.

(*a*) Le punte conſiderate per ſe ſteſſe altro non ſono, che una diminuzione di ſuperficie per eſemp. di una baſe di cilindro, la quale con ſucceſſiva diminuzione ſi riduce ad apice d' un cono (*). Per dichiarare ciò adequatamente, ſupponganſi da principio due eguali baſi di cilindro a certa diſtanza oppoſte, le quali abbiano tale quantità di vicendevole azione, che ſia rappreſentata diviſa in parti eguali con un dato numero di fili paralleli fiſſati ad altrettanti punti corriſpondenti di quelle baſi. Se mentre una di queſte reſta intera, l' altra va ſucceſſivamente diminuendoſi, è manifeſto, che per far ſuſſiſtere quella prima loro azione vicendevole, ogni volta che in quella diminuzione s' incontra un punto, cui ſta fiſſo alcuno di que' fili, che ne rappreſentano le parti, dovrà queſto riportarſi fiſſo ad altro punto di quei, che reſtano nella baſe diminuita; e così continuando la diminuzione reſteranno per ultimo tutti que' fili fiſſati al ſolo apice del cono, in cui finalmente fu ridotta.

(*) E' dunque il nome di punta termine relativo, che ſignifica confronto di ſuperficie minore con altra maggiore; e però anche la ſfera, e qualſivoglia ſuperficie a fronte d' una maggiore può rappreſentare una punta.

(*b*) Al contrario se in proporzione che fu diminuita la base, si fossero troncati i fili, che fissati ne' punti di quella ne esprimevano la intera somma, è altresì manifesto, che tale azione più non sussisterebbe, se non per quell' unica parte, che corrisponde all' unico punto e filo residuo nell' apice del cono. E perciò questo sarà tratto a sè dalla base opposta con tanta superiorità di forza, quanta è la somma di tutti que' fili divisa per quell' unico.

(*c*) Riduciamo ora ambedue queste ipotesi alla estimazione de' momenti delle forze, che si usa in Meccanica. Si fa, che le potenze, e le resistenze, ossia qualsivoglia genere di forze, si rappresentano nelle macchine con pesi o masse corrispondenti. Si fa, che due sono le vie di rendere in equilibrio due masse rappresentanti forze di qualsivoglia genere; cioè, se ineguali sono le masse, si fa che dal centro del moto della macchina non descrivano, e non possano nello stesso tempo non descrivere, che spazj reciprochi alle masse medesime. Tolto l' uno, o l' altro di questi modi, più non sussiste l' equilibrio; ma vi è preponderanza in ragione delle masse, quando eguali sono gli spazj, o in ragione degli spazj, quando le masse sono eguali, o in ragione composta delle masse, e degli spazj, se quelle e questi sono ineguali.

(*d*) Nella prima ipotesi adunque sussiste l' equilibrio di azione della punta colla intera superficie dell' opposta base per la sola ragione, che colla successiva diminuzione della prima base non si rende punto alterata la vicendevole azione coll' opposta; ma ciascun filo, che da questa procede, va successivamente raccogliendosi, e concentrandosi perfino nell' ultimo punto, a cui la prima si riduce. Supponendosi ora all' uso meccanico, che ciascun punto corrispondente rappresenti una eguale quantità di massa, niuno è che non veda espressa colla base una massa tanto maggiore, che non è la massa della punta,

quanto lo è il numero de' punti diviſi per quell' unico, a cui fu ridotta la punta. Onde non rimane qui altra via di equilibrio, che la reciprocità degli ſpazj colle maſſe medeſime. E ſiccome in Meccanica la reciprocità degli ſpazj, poſto, come lo è nelle macchine, eguale il tempo, equivale alle reciproche velocità; non altrimenti ſuſſiſterà l' equilibrio della punta colla baſe intera, ſe non con altrettanta velocità nella punta ſopra la velocità della baſe, quanta è la ragione della ſomma dei fili o punti, che rappreſentano la maſſa della baſe, al filo unico, che rappreſenta la maſſa della punta.

(*e*) E queſto modo di conſiderare la vicendevole azione elettrica fra la punta e la più ampia ſuperficie oppoſta, dedotto dal meccanico principio della reciprocità degli ſpazj e delle velocità colle maſſe, non altro eſprime, ſe non che ciaſcun punto dell' oppoſta ſuperficie eſercita nello ſteſſo tempo la ſua attività contro il ſolo corriſpondente alla punta, e queſta a vicenda eſercita l' azione ſua in un ſol tempo contro ciaſcun punto della baſe; onde ne deriva eguale nella punta e nella baſe la quantità di moto, o di ſforzo a muoverſi, che eſprime nella ſua eſtimazione la indicata velocità reciproca colle maſſe; nel che conſiſte il meccanico momento delle punte.

(*f*) Queſto *momento meccanico* è diverſo da quello, che ſpiegato abbiamo colla ſimilitudine della velocità *adulta*, il quale perciò potrebbe a maggior diſtinzione chiamarſi *momento idraulico*. Poichè quello procede dalla ſimultanea azione delle parti del fluido contenute nel vaſo, o nella capacità del conduttore elettrico, prementi per ogni verſo, e raccolte contro quelle parti, che eſcono dalla punta, come da un tenue foro; e qui il momento naſce preciſamente al roveſcio, cioè per l' azione della elettricità della punta non già ſpinta dall' omogeneo fluido contenuto nel conduttore, ma eſteriormente accreſciuta dalla ſimultanea e mutua azione di tante

parti eguali di oppoſta elettricità, quanti ſono i punti che le eſprimono nella ſuperficie della baſe.

(*g*) Siccome però ſuſſiſterebbe quel momento primo per ſola preſſione o sforzo del fluido raccolto nel conduttore, come in vaſo, da cui parte la punta; e queſto acciocchè ſuſſiſta eſige la vicendevole azione colla elettricità dell'oppoſta ſuperficie; così non doveano l'uno coll'altro confonderſi. Maſſimamente perchè queſto meccanico momento ha luogo ſenza quel primo, come accade aſſai frequente, quando un corpicello elettrico ſenza veruna unione con altro conduttore ſi preſenta per ſe ſteſſo ad una ſuperficie più ampia inveſtita da contraria elettricità; nel qual caſo ſi eſercita la vicendevole azione loro; e ne riſulta l'attrazione, per la quantità del moto richieſta dal meccanico momento, che ora ſpiegato abbiamo. Come al contrario, da che lo ſteſſo corpicello arriva al contatto della più ampia ſuperficie, ed ivi s'inveſte della ſua elettricità, ſe ſi trovi a quella adattato in modo, che preſenti come uno ſpigolo o punta procedente dalla ſteſſa ſuperficie, allora in vigore di quell'idraulico momento, che nel precedente Teorema ſpiegai, ſarà riſpinto e ripulſo inſieme alla propria elettricità, purchè ſia queſta ſuperiore di forza alla gravità, o alla coeſione del medeſimo.

(*h*) Siamo qui ridotti ad anticipare di paſſaggio un cenno della vera cagione efficiente degli elettrici moti. Poichè dai premeſſi principj ognuno per ſe ſteſſo comprende, che ſe la maſſa rappreſentante la punta ſia mobile dovrà accoſtarſi, e indi ſcoſtarſi dalla più ampia ſuperficie con tanto eccesſo di velocità, quanto è reciprocamente l'eccesſo delle maſſe che rappreſentano le forze loro. Combinandoſi poi, e riſolvendoſi così le varie ragioni di velocità, e di maſſe, di mobilità, o immobilità col primo, o ſecondo genere di momento nel concorſo de' varj corpi inveſtiti dalle elettriche potenze, che rappreſentano la baſe, o la punta, ſi porta all'ul-

tima evidenza, come altrove dimoſtrerò, la ragione de' moti elettrici, non meno che delle adeſioni, la quale reſtò finora involta nella più denſa caligine di vani ſforzi d'ingegno.

(*i*) Proſeguendo frattanto nella propoſta materia, l'azione della punta non ſuſſiſte altrimenti per ſe ſteſſa. Poichè ſe ſi preſcinde dalla vicendevole azione permanente, e non mutata nella ſucceſſiva diminuzione della punta oppoſta alla baſe, entriamo immediatamente nella ſeconda ipoteſi (*b*); nella quale ben lungi dal ſuſſiſtere l'equilibrio colla reciprocità degli ſpazj, ci riduciamo alla ſemplice ragione delle maſſe, la quale è tanto maggiore nella baſe, che non nella punta, quanto è il numero de' fili al ſolo filo reſiduo (*b*, *c*.).

(*k*) La punta adunque per ſe ſteſſa diminuirebbe il momento delle elettriche potenze in ragione della maſſa diminuita; il che è contrario ai più noti ſenomeni. Se poi ci rivolgiamo alla varietà degli effetti delle punte, che nella reſinoſa ſono di forza or quadrupla, or decupla della vitrea (*Teor.* 1, *e* 2), e della ſteſſa punta, che oppoſta all'una o all'altra ſpecie di elettricità non ha nell'una, ſe non forza or ſubdupla, or ſubtripla dell'altra (*Teor.* 5, *e* 6); ſarà fuori d'ogni dubbio, non altro ſcorgerſi nelle punte conſiderate in ſe ſteſſe, che nodi ineſtricabili.

(*l*) Ma ſe conſideriamo le punte in riguardo all'oſtacolo da ſuperarſi, cominciamo ad accreſcere l'effetto delle elettriche potenze colla diminuzione della maſſa ſteſſa oppoſta dal mezzo, come oſtacolo (*Teor.* 9. *n.* 2). Se poi ſi riguardano come un foro più anguſto d'un vaſo aſſai ampio, da cui eſce l'azione dell'elettrica potenza, ſeguono ad accreſcerne il momento, come ſanno in Idraulica i liquidi, che eſcono con adulta velocità (*Teor.* 9.*e*, *f*). Se in oltre ſi aggiunga il meccanico momento, che più ſopra ſpiegato abbiamo, e ſi componga cogli antecedenti, c'inoltreremo vie più nella cognizione

degli elementi diversi, che concorrono a formare l'intera azione delle elettriche punte, ma non la compiono finora, nè ciascuno per sestesso, nè composti insieme, come seguitiamo a spiegare ne' seguenti Teoremi.

TEOREMA XI.

Sussistono que' confusi, e irreducibili fenomeni, finchè si considera l'azione delle punte, come effetto d'una forza sola procedente in qualsivoglia modo dal solo conduttore elettrico, da cui quelle partono, o a cui si presentano.

Si richiamino qui i fenomeni, che dopo la seconda Serie (*Cor.* 1, *e* 2), e dopo la quarta (*Cor.* 1, *e* 2.) abbiamo stabilito: cioè, che la punta di resinosa elettricità induce carica con forza quadrupla, e disperde la sua specie con forza settupla della punta opposta alla specie medesima; e viceversa la punta di vitrea elettricità induce la carica con forza or minore, or d'un terzo maggiore, e disperde la sua specie con forza sempre minore della punta opposta alla specie medesima.

E siccome questi fenomeni comprendono le proporzioni dell'elettrica forza procedente dal conduttore, da cui nello stesso modo partono, o a cui si presentano quelle punte; così essendo quelle proporzioni tanto diverse non potranno ripeterssi da una forza sola, senza che questa non comparisca contraddittoria ne' suoi effetti, e nelle proporzioni loro, che sono le sole vie, che ci guidano a conoscerne l'esistenza, e l'identità, o la diversità.

Ma rendesi vie più manifesta questa contraddizione nell'ipotesi d'una sola forza procedente dal conduttore, da cui parte la punta, o a cui si presenta, se si rivolge lo sguardo alle proporzioni ristrette nel Corollario universale de' primi otto Teoremi.

Poste le quali io ragiono così: Se unica fosse la forza, o un solo il fluido, che costituisce la potenza nelle elettriche punte, posti eguali tutti gli altri elementi, che

che concorrono a formare il momento, come ſono il mezzo, e l'applicazione delle punte ſteſſe, eguale e coſtante dovrebbe di neceſſità riſultare l' azione ſua tanto nell'imprimere la carica, come nel diſperdere la ſpecie raccolta, o accorrente. E qui per farmi vie meglio intendere nella novità di queſte idee ricorrerò novamente alle ſimilitudini d' idee già note e familiari nella ſcienza naturale. Quando in Idraulica ſi calcola l' effetto dell' adulta velocità, poſte le medeſime proporzioni di grandezza del vaſo, e del lume, da cui eſce il liquido, ſe queſto pure è ſempre lo ſteſſo, niuna differenza nè varietà s'incontra giammai nell'eſtimazione dell' effetto. Che ſe, mutata la ſpecie del liquido, riſultano colla identità di vaſo e di lume delle differenze di effetto, riconoſciamo queſte ſenza meno provenienti dalla diverſa maſſa, o gravità ſpecifica de' liquidi ſteſſi, e concludiamo con certezza, che per eſtimare l'intero effetto del liquido profiliente non baſta il ſolo elemento di adulta velocità, ma deve queſto comporſi coll'altro, ch' è intrinſeco ai diverſi liquidi, e corriſponde alla ſpecifica loro gravità.

Non altrimenti dobbiamo ragionare dell'azione delle elettriche punte; e perciò ſiccome, poſti eguali i precedenti elementi, che concorrono a compierne il momento, ſi preſentano tante e tanto inſigni differenze, forza è di concludere, che tali differenze provengono dall' intrinſeca diverſità di que' fluidi, ai quali corriſpondono, e che coſtituiſcono le oppoſte ſpecie di elettricità. Onde nel calcolare l'intero effetto delle elettriche punte d' uopo è aggiugnere ai precedenti elementi la ſpecifica forza di ciaſcun fluido, come in Idraulica ſi aggiugne la gravità ſpecifica di ciaſcun fluido emanante.

Nè, paragonando io la ſpecifica forza de' fluidi elettrici colla ſpecifica gravità de' liquidi, voglio in verun modo indicare, che quella abbia nulla di comune con

questa, o possa l'una coll'altra sostituirsi. Che anzi, se taluno da me ricerchi, in che consista quella specifica differenza delle opposte elettricità, io dirò apertamente, che sono contento per ora di averla dimostrata reale, ed esistente, e lascio a più felice incontro, o a più felici ingegni la cura di rintracciarla. Così l'immortale *Neuton* nell' analisi della luce fu contento di aver dimostrata con esatte esperienze e proporzioni la diversa refrangibilità de' raggi, che la compongono; e ne lasciò il modo, e la natura all'arbitrio, e alla futura investigazione.

TEOREMA XII.

Nè porgesi più felice scioglimento di quel confuso e inestricabile nodo de' fenomeni, qualora si consideri l'azione delle punte, come effetto d'una sola forza procedente dall'armatura o conduttore non elettrico, da cui quelle partono, o a cui si presentano.

(*a*) Appartengono a questo Teorema i fenomeni de' Corollarj 6, 7, e 8, tanto della seconda, che della quarta Serie di sperienze, e più distintamente le proporzioni de' medesimi fenomeni raccolti in fine del Corollario universale dai Teoremi 5, 6, 7, e 8.

(*b*) Ragionando sopra di questi similmente, come sopra quelli, che furono esposti nell' antecedente Teorema, ne siegue per necessità, che non può in verun modo assumersi una sola forza, o un fluido solo smosso dal conduttore elettrico nell' armatura del quadro, o conduttore non elettrico, da cui parte quella punta, o a cui si presenta.

(*c*) Ma siccome nella varietà delle antecedenti proporzioni abbiamo riconosciuta non meno la diversa attività delle due specie di elettrici fluidi, che l'esistenza, e realtà de' medesimi; così nella presente varietà delle proporzioni di attività della punta stessa procedente

dal conduttore non elettrico, ed oppoſta or all' una or all'altra ſpecie di elettricità, ovvero or dall' una or dall'altra di queſte preſentata alla ſteſſa non elettrica armatura, dovremo ſimilmente riconoſcere nell'armatura o conduttore non elettrico non meno la diverſa facilità di ricevere l'azione dell' oppoſta elettricità, che l'influenza, o neceſſità di queſta facilità ſteſſa nella piena eſtimazione, e riſoluzione di que' compoſti fenomeni.

(*d*) E qui pure gioverà farſi ſtrada alle nuove idee col parallelo di principj familiari a chi non è affatto nuovo nelle Fiſiche teorie. Per calcolare in Idraulica l'azione di un fluido proſiliente, non vaga ed aſtratta, ma effettiva e reale, non baſta, come già oſſervai, tener conto dell' adulta velocità, e inoltre della ſpecifica gravità del liquido; che queſti due elementi non riguardano, ſe non l'attività in ſe ſteſſa. Ma ſe queſta ſi riduce all'atto di produrre un dato effetto, d'uopo è allora di riguardare anche l'altro termine dell'effetto medeſimo, come ſarebbe per eſempio, l'ala d'una ruota da muoverſi, contro la quale quel liquido percuote. Ora la quantità della percoſſa corriſponde è vero in aſtratto alla formola di velocità adulta, e di gravità ſpecifica del liquido, l'effetto però è vario ſecondo la maggiore o minore ſuperficie dell'ala percoſſa, e in oltre, ſupponendoſi coſtante, anzi la ſteſſa direzione, occorre varietà nell'effetto, ſecondo la diverſa mobilità della ruota, cui quell'ala appartiene; e ſono queſti gli elementi dell'altro termine, in cui ſi compie l'effetto di quella formola prima.

(*e*) Siccome adunque in Idraulica dalle varietà e dai limiti, che riconoſciamo nell'applicazione della ſola formola aſſoluta al determinato effetto d'una ruota da muoverſi, concludiamo ſicuramente l'influenza, e la realtà degli elementi dell' altro termine, in cui ſi compie l'azione; così la varietà di proporzioni provenienti dalle punte, che partono da un conduttore non elettrico, o

a queſto ſi preſentano, porgeranno la prova, e la miſura della diverſa facilità, con cui l'elettricità naturalmente equilibrata e fiſſa ne' corpi non elettrici ſi muove, e ſi ſvolge per l'azione dell'una, o dell'altra ſpecie già ſciolta, e raccolta nell'oppoſto conduttore.

(*f*) Or queſta facilità, che ſi ſcorge nella elettricità fiſſa ne' corpi ad eſſere ſmoſſa e ſciolta per opera delle oppoſte elettricità, coſtituiſce un nuovo e diſtinto termine, che concorre a compiere l'azione delle elettriche punte; e vuole perciò eſſere conſiderato più diſtintamente. In primo luogo la punta, che procede da conduttore non altrimenti elettrico, non ha ſe non minima azione, che da queſto ſi eſtenda all'oppoſto conduttore elettrico; e perciò entra nell'ipoteſi, che fu antecedentemente ſpiegata (*Teor.* 10, 6, 4), poichè ben lungi dall'influire nell'aumento di vicendevole azione, non presenta a queſta, ſe non ſoggetto tanto minore, quanto è minore la ſuperficie ſteſſa della punta, a confronto di quella dell'armatura, e dei conduttori. Il che, ſebbene ſia chiaro per ſe ſteſſo, e confacente alle verità precedenti, può nondimeno direttamente dedurſi dalle ſtabilite proporzioni.

(*g*) Invero la punta oppoſta alla reſinoſa elettricità ſta alla punta oppoſta alla vitrea in forza d'indurre nel quadro la carica fuori de' limiti dell'iſolamento, come zero ai primi ſegni di elettricità; e dentro i limiti dell'iſolamento come il primo grado di carica alla carica piena (*Teor.* 7).

(*h*) E l'armatura, da cui parte quella punta, ſta all'armatura, da cui parte la ſeconda, in forza d'indurre la carica fuori de' limiti dell'iſolamento, come zero alla metà della carica; e dentro i limiti come meno di metà alla carica piena (*Teor.* 8).

(*i*) Per riconoſcere in queſte proporzioni la ſuperiorità delle ſuperficie in confronto della punta, ſi compongano in uno i termini della prima ragione delle punte fuori

de' limiti dell'isolamento; e si compongano similmente in uno i termini della prima ragione delle armature fuori degli stessi limiti; e sarà il prodotto delle punte al prodotto delle armature, come sono i primi segni alla metà della carica.

(*k*) Si compongano similmente i termini dell' altra ragione delle punte, ed i corrispondenti delle armature entro i limiti dell' isolamento; ed essendo in ambedue comune il termine di carica piena, sarà il prodotto delle punte a quello delle armature, come sono i primi termini fra loro, cioè come sta il primo grado di carica incirca alla metà della carica stessa.

(*l*) Quindi è tanto maggiore l' azione mutua del conduttore elettrico, e del quadro, quanto è maggiore certa funzione della superficie dell' armatura sopra la superficie della punta.

(*m*) La punta adunque, finchè non ha nel conduttore, da cui parte, qualche specie di elettricità smossa e sciolta, è inetta ad accrescere la mutua azione.

(*n*) Quando poi siavi nel conduttore, da cui la punta si parte, elettricità sciolta, allora si riduce alla prima ipotesi già spiegata (*Teor.* 10. *a*), ed acquista l'elettricità stessa per la via della punta quel momento che dichiarai (*Teor. 9. n.* 1 *e*, *f*); e che sarebbe superfluo di spiegare più diffusamente. Aggiugnerò soltanto, che di questo stesso momento ne abbiamo esempio nella celere progressione di aumento di carica, che si osserva nella Serie seconda, e nella quarta delle sperienze in confronto dell' altre due corrispondenti; nella prima delle quali dai pollici tre all' uno ascende alla piena carica, e nella seconda dai nove ai tre arriva alla carica piena: quando all' opposto nelle corrispondenti Serie, nelle quali l' armatura non ha punta, la prima ha la differenza dai quattordici pollici fino ai quattro, e la terza dai dodici fino ai due per arrivare alla prima forza della carica.

(*o*) Che se poi si consideri nella elettricità natural-

mente equilibrata e fissa la rispettiva o specifica facilità ad essere smossa e sciolta dalle opposte specie, risulta dalle proporzioni stesse precedentemente citate (*g*, *b*), che tanto nelle punte, come nelle armature, si svolge più facilmente la specie opposta alla vitrea, che alla resinosa. Poichè nelle stesse distanze rispettivamente delle punte, e delle armature, tanto entro come fuori de' limiti dell' isolamento, è sempre insignemente maggiore la forza di carica raccolta nel quadro colla vitrea, che colla resinosa elettricità del conduttore. Il che servirà per convincerci tanto più efficacemente della maggiore mobilità, o facilità di scioglierſi nella specie resinosa, se si riflette, che la forza specifica della resinosa essendo per lo meno quadrupla della vitrea (*Teor.* 1), dovrebbe il conduttore elettrico di quella specie imprimere quadrupla la carica nell' opposta armatura, quando la mobilità delle due specie, che devono smoversi a tal effetto, fosse in ambedue eguale. Ora quando non s' imprime quadrupla, ma di gran lunga minore colla resinosa, che colla vitrea, non può ciò d' altronde ripetersi, che dalla proposta differenza di mobilità nelle specie stesse che si sciolgono.

(*p*) Sembrano fin qui ridotti a tale distinzione e realtà i varj elementi, che concorrono a compiere l' azione delle elettriche punte, che può ciascuno di essi riconoscersi ne' suoi effetti, e persino calcolarsi nella sua quantità. Ci piace prima di por termine a questo Teorema d' indicarne alcun esempio tra i molti, che si presentano ne' precedenti Corollarj e Teoremi. Si rifletta alle proporzioni delle distanze, e alle differenze che risultano tra la prima carica sensibile e la piena carica nelle quattro Serie poco fa indicate in fine del penultimo paragrafo (*n*). Nella Serie prima le differenze della distanza della prima carica sensibile fino alla carica piena sono dai quattordici pollici fino ai quattro; e nella terza dai dodici fino ai due, cioè in ciascuna dieci pollici, i

quali ſommati ſono venti. Per contrario nella Serie ſeconda ſono dai tre fino ad uno, cioè due pollici; e nella quarta dai nove fino ai tre, cioè ſei; i quali ſommati cogli antecedenti due fanno otto pollici. Siccome dunque le diſtanze calcolate anche cogl' iſolamenti ci conduſſero negli antecedenti Teoremi a conoſcere la forza ſpecifica delle ſpecie ſciolte di elettricità; così queſte ci porgeranno dati per calcolare la diverſa mobilità delle ſpecie, che devono ſcioglierſi: e ſiccome nella Serie prima, e terza, nelle quali la punta ſi trova unita al conduttore elettrico, oltre la ſpecifica forza di ciaſcuna elettricità, ha luogo l' Idraulico momento di accelerazione per la via della punta; così nella Serie ſeconda, e quarta, nelle quali la punta appartiene all' armatura ſteſſa, in cui ſi ſciolgono quelle elettricità, oltre alla riſpettiva e ſpecifica mobilità o facilità a ſcioglierſi in ciaſcuna ſpecie, avrà pure luogo l' Idraulico momento, in proporzione che vengono ſciolte. Ma baſti di aver ciò accennato, che ſi ſpiegherà pienamente con nuovi appoggi di ſperienze nella Parte ſeconda, e terza della preſente Analiſi.

TEOREMA XIII.

L' azione delle elettriche punte è compoſta; nè altrimenti corriſponde ai fenomeni, ſe non ſi riſolve ne' ſuoi diſtinti elementi 1. del mezzo reſiſtente come oſtacolo frappoſto alla riunione delle oppoſte elettricità, 2. del meccanico momento di reciproca azione, 3. della ſpecifica forza di ciaſcuna ſpecie di elettricità eccitata, o ſciolta, 4. della ſpecifica mobilità o facilità a ſcioglierſi di ciaſcuna ſpecie, quando ſono naturalmente equilibrate ne' corpi, 5. dell' Idraulico momento d' iſolamento conſiderato come capacità, o recipiente delle ſciolte elettricità.

1. La quantità di oſtacolo del mezzo frappoſto può diminuirſi in due modi. Primo, con diminuirne la groſſezza ſtando ſalva l' ampiezza della baſe; e queſto mo-

do facilita bensì l'azione vicendevole delle oppoſte elettricità, e concorre in ragione della capacità del mezzo a formare de' grandi ammaſſi di oppoſte elettricità; ma non ne compie giammai l' unione, ſe non per la rottura del mezzo ſteſſo, ovvero ſoltanto di quelle particelle, nelle quali la groſſezza frappoſta ſia ridotta a zero. E furono queſte le vie, colle quali giunſe *Epino* ad imitare non ſolamente la boccia Leidenſe con ſuperficie ſimili oppoſte alla ſuperficie d'un elettrico conduttore; ma inoltre a rendere eſteriormente inſenſibile l'azione delle contrarie elettricità ſciolte, e accumulate, e farla nuovamente, e ad arbitrio, ſenſibile colla ſola ſeparazione, e diſtanza delle ſuperficie ſteſſe, nelle quali quelle erano raccolte.

Si diminuiſce in oltre l'oſtacolo con diminuirne la baſe, ſalva reſtando la groſſezza del mezzo; e ciò ſi ottiene per la via delle punte, come a ſuo luogo ſi dichiarò (*Teor. 9. n. 2*). Indi il maſſimo effetto dell' elettrica ſcarica, che è la riunione ſteſſa delle oppoſte elettricità, ſi ha ſempre fra due punte diſpoſte a conveniente diſtanza; e ſe ad una punta ſi opponga più ampia ſuperficie, il maſſimo effetto ſi trova ſempre raccolto dalla parte della punta, e diviſo al contrario in tutta quella parte di ſuperficie, nella quale ſi eſtende l'elettrica azione, ſecondo certa funzione delle diſtanze, e della ſpecifica forza delle elettricità. Che ſe ſi paragoni l'azione d'una ſpecie di elettricità ſpinta da un conduttore per la via d'una punta ad una oppoſta ſuperficie non elettrica; o viceverſa dalla ſuperficie elettrica del conduttore ſpinta contro una punta non elettrica, allora riſulta il maſſimo dell'azione tanto nello ſciogliere, che nel riunire le contrarie elettricità; e ſimilmente la maſſima eſploſione, o forza di ſcintilla, che corriſponde alla minima diminuzione della elettricità raccolta nel conduttore ſecondo le funzioni delle diſtanze compoſte cogli altri elementi di forza ſpecifica, e di ſpecifica mobilità. Talchè anche colla

punta

punta opposta al conduttore elettrico si trova tale distanza, nella quale piena rimane in questo la forza della scintilla non altrimenti, che se allo stesso opposta fosse una eguale superficie a distanza tanto minore (*Ser.* 2. *Cor.* 8. *e Ser.* 4. *Cor.* 5, *e* 8).

2. Ed in queste reciprocità di superficie colle distanze, alle quali si estende la vicendevole azione delle elettricità o sciolte o da scioglierli, consiste quel meccanico momento, che più sopra dichiarato abbiamo, e proposto in secondo luogo, come distinto elemento delle elettriche punte.

3. Della specifica forza delle opposte elettricità sciolte nulla ci rimane da aggiugnere, essendo già colcolata la resinosa per lo meno quadrupla della vitrea nell' indurre la carica, e per lo meno decupla nella propria dispersione (*Teor.* 1, *e* 2).

4. Similmente nulla aggiugneremo della mobilità, o maggiore facilità a sciogliersi nella specie opposta alla vitrea sopra la specie opposta alla resinosa; essendosi già ridotta a certe proporzioni tanto di numeri, come di fenomeni (*Teor.* 5, 6, 7, 8) più distintamente nel Teorema duodecimo.

Non tralascierò qui d' avvertire, che tanto la specifica forza in terzo luogo proposta, quanto questa specifica mobilità delle due specie di elettricità potrebbe calcolarsi più precisamente secondo le Osservazioni aggiunte ai Teoremi 3, e 5; e secondo le funzioni dell' isolamento, e de' fenomeni, ai quali ridotte ne abbiamo le proporzioni. A noi però basta per ora di averne stabilita l' esistenza, e l' andamento, riservandoci a calcolarne giustamente le proporzioni in progresso dell' Opera col sussidio di nuovi dati, che ci somministreranno le successive sperienze.

5. Intorno all' Idraulico momento tanto della elettricità sciolta e raccolta, come di quelle che si vanno successivamente sciogliendo e radunando ne' conduttori

due sole riflessioni ci sembrano degne di particolare memoria, dopo ciò che detto ne abbiamo negli antecedenti Teoremi.

Primieramente come in Idraulica non ogni apertura di lume è opportuna per proccurare la massima velocità del fluido emanante, ma ogni determinata altezza, e grandezza di recipiente ha tale apertura, o lume, per cui esce il liquido colla massima velocità, e colla minima resistenza: non altrimenti negli elettrici fenomeni ogni forma o grandezza di conduttore, o di armatura ha il suo massimo per questo momento nelle varie proporzioni di palla, o punta smussata, o più acuta, secondo la corrispondente forma, o lunghezza, o grandezza di que' conduttori, come vedremo in altre sperienze a questo fine dirette.

In secondo luogo a questa idea d' Idraulico momento non vorremmo che taluno associasse altri modi o altre idee di forza espansiva, o di elasticità; quasichè ciascuna specie di elettricità avesse in se stessa principio e termine di questo momento. Sembra a noi all' opposto, che tanto in questi come universalmente in altri fenomeni di elettricità non debba mai prescinderſi dalla mutua azione delle specie stesse fra loro, senza la quale si riduce la cosa a mere finzioni, ed a casi imaginarj; mentre in realtà non vi è mai verun segno di elettricità, che non prenda principio, e incremento dalla proporzione stessa di mutua azione delle due opposte specie. In questo senso ridurremo qui principalmente que' soffj, e quasi sbuffi, che sembrano partire spontanei dai limiti degl' isolamenti, ove sono scabrezze, e termini acuti di corpi conduttori, non ostante che siano quegli involti e coperti da un sottile intonaco di ceralacca, o di mastice, quando è assai forte l' elettricità. Così quando lo strato resistente sia di simili materie resinose si fora similmente, e si trapassa con facilità, e resta perciò inetto a raccoglier carica, se ha

punte ſporgenti internamente dall'una all'altra armatura. Per ſimile ragione infine i conduttori e le armature ſopraccariche e ridondanti di elettricità ſembrano ſoffiare e sbuffare ſpontaneamente per forza interna da ogni loro ſcabrezza, o ſpigolo, o prominenza; perchè appunto per queſte vie maſſimamente eſtendono la vicendevole azione coll'oppoſta elettricità ſmoſſa a grandiſſime diſtanze ne' corpi ambienti.

Osservazione.

In queſta prima Parte della noſtra Analiſi delle punte ragionando, non come ſi è fatto da molti finora, dalla generale ipoteſi ai particolari fenomeni, ma bensì dal particolare all'univerſale, e dalla riſoluzione del compoſto al ſemplice, che ſono le uniche vie di Fiſica induzione, ci ſi preſenta naturalmente innanzi una idea delle elettriche forze ben diverſa da quella, che corre tanto alla moda della Franklíniana ipoteſi. Se dobbiamo giudicare della realità di queſta ipoteſi, che *Kinnersley* chiamò lepidamente *ortodoſſia elettrica*, dalla confuſione, e contraddizione introdotta non meno ne' fenomeni delle elettriche punte, che in ogni altro ben diſtinto fenomeno di elettricità, non ſappiamo trovar nulla, che ci rechi il minimo ſcrupolo di eſſerci ſcoſtati da quella mal concepita ortodoſſia elettrica. Chi avrà forza di ſpirito da eſaminare con imparzialità le opere degli Autori celebri, che hanno coltivate le coſe elettriche dopo *Franklin* ſeguendo la ſua ipoteſi, potrà per ſe ſteſſo convincerſi, che hanno eſſi più ſovente ſottilizzato, che analizzato, e troverà in quelle piuttoſto rarefatte, che eſteſe le cognizioni. Si forzano e ſi ſoggiogano i nuovi e diſtinti fenomeni ai precarj principj della ipoteſi; s'involgono e ſi compongono quelli con queſti; e ſi coniano di ſiffatta miſura nuovi nomi per tener fermi i ſettarj, ed abbagliare i proſeliti; in vece di

eſtendere, o limitare, o variare que' principj ſecondo l'ingenuità, e l'eſpreſſione de' ſemplici fenomeni.

A prendere le coſe nella vera ſorgente l'appellazione, e la preferenza di *poſitiva elettricità*, e di *fluido unico* attribuita a quella ſpecie, che ſi eccita nello ſfregamento de' vetri liſcj, ſembra non avere altro fondamento, che l'azzardo per cui *Franklin*, in quelle ſue belliſſime ſperienze, ſulle quali edificò la ſua ipoteſi, non ebbe per mano ſe non vetri, e criſtalli più toſto che zolfi, e reſine; ovvero perchè raccolſe piuttoſto l'elettricità dal vetro ſtrofinato, che dal cuſcinetto ſtrofinante. Se aveſſe da principio fatte le ſperienze ſteſſe con globi di zolfo, come poi le fece *Kinnersley*, forſe il nome di poſitiva elettricità non toccava mai più alla vitrea, ma reſtava per lo ſteſſo titolo di primogenitura in infinito a tutta la linea de' corpi reſinoſi. Per verità nella prima Riſpoſta a *Kinnersley* ſi trovò *Franklin* molto ſorpreſo da quelle ſperienze; e le ſoſpettò piuttoſto fallaci ed equivoche per ſola differenza di quantità, che non per diverſità nella ſpecie, o nella direzione. E nella ſeconda Riſpoſta non le eſaminò diſtintamente, ma contentandoſi di averne replicate alcune con quell'apparato, che ſi trovò più comodo, che perfetto, non ſeppe ricuſarne la verità; ed imaginandoſi da quelle poche ripetute anche la realtà delle altre, le ſpiegò colla ſua idea di *elettricità negativa*, e col *difetto* di quel fluido unico, ch'egli avea ſtabilito nel vetro. *Mais* (conchiude egli ſteſſo) *ce ne ſont ici que des penſe'es jette'es à la hate*.

Grande fu il genio di *Neuton;* e la ſua nobile Teoria della luce, e de' colori regge coſtante nelle vicende dei tempi, perchè non fu egli pago di gettarla a lampo d'ingegno, ma invecchiò prima di ridurre a termine l'analiſi de' fenomeni, ſui quali ſeppe fondarla. Fu pur grande il genio di *Carteſio;* ma le ſue ipoteſi perirono con lui, perchè inſofferente nella oſſervazione, e nell'analiſi fiſica, ſi contentò di ridurle a meri voli d'in-

gegno. Grande è il genio di *Franklin;* ma qual confidenza dovrà averſi in un ſuo penſiero azzardato ſopra le due oppoſte ſpecie di elettricità, delle quali egli non ebbe idea ben diſtinta? Tanto più che ebbe egli idea affatto falſa della sfera di attività delle medeſime, che fu impropriamente detta, e continua a dirſi *elettrica atmosfera*, la quale idea venne poi rettificata da *Epino*.

Indi fu con non minore ſpirito, che giudizio, da qualche Fiſico non volgare propoſto il problema, non mai prima d'ora ſciolto, nè rigettato, cioè: " Suppo- „ ſta vera ſecondo l'opinione di *Franklin* la realità e „ l'azione d'un fluido ſolo ne' fenomeni delle due op- „ poſte ſpecie di elettricità, dimoſtrare direttamente, „ che quel fluido abbia ſede piuttoſto nella vitrea, che „ nella reſinoſa; ovvero a quale di queſte due realmente „ convenga il nome di poſitiva ". Poteva in queſto aſpetto la *Franklíniana* opinione annoverarſi fra quelle ipoteſi verſatili, che ſogliono inverterſi egualmente ſenza verun pregiudizio, che ſenza vantaggio veruno della verità.

Che ſe poi voglia ridurſi ad eſattezza di miſure e di proporzioni, che ſono la vera pietra di paragone della realtà degli effetti, e delle cauſe, ſi ſcorge mancante non ſolo ne' fenomeni delle elettriche punte, ma coi più ſolenni fenomeni della elettricità. Dimoſtro in altre Memorie ſeparate l'incoerenza de' cardinali principj, da' quali ſi deriva la ſpiegazione della boccia Leidenſe. Quante fallacie, e quante illuſioni non s'intruſero poi, e non laſciano tuttavia di ſoſtenerſi tra il volgo de' Fiſici nelle vere leggi degli elettrici moti, non bene da principio conoſciute da *Franklin*, e poco felicemente in ſeguito dichiarate, o diſſimulate dai *Franklíniani*? Chi inteſe mai col ſolo difetto, o coll'aſſenza d'un fluido le ripulſioni tra i corpi dotati di reſinoſa elettricità non meno inſigni, nè meno coſtanti, che tra i corpi inveſtiti dalla vitrea? Come s'inteſero colla ſola forza eſ-

panſiva d'un fluido unico le elettriche adeſioni, o coeſioni? Eppure ſono queſte il primo, e più coſtante tra gli elettrici fenomeni. Poichè allo ſtrofinamento per eccitare l'elettricità immediatamente ſuccede l' adeſione de' corpi ſtrofinati fra loro, come mi occorrerà di rendere altrove manifeſto colle più ſplendide prove; e gli altri elettrici ſegni non ſi manifeſtano mai altrimenti, che inſieme, o dopo la ſeparazione di que' corpi ſtrofinati, e aderenti; la quale ſeparazione ſi fa egualmente alzando, o ſtriſciando la ſuperficie ſtrofinante, che traendo, o ruotando la ſtrofinata. Ma delle elettriche adeſioni non ebbe *Franklin*, che idea aſſai vaga; e i *Franklíniani* o le diſſimularono affatto per comodo della loro ipoteſi, non annoverandole neppure fra i ſegni; o ne declinarono la ſpiegazione con chiamarle *fenomeni acceſſorj*: quaſichè la diſſimulazione, o la tergiverſazione foſſero vie degne di un Fiſico per accoſtarſi alla verità.

TEORIA

Del nuovo Aſtro oſſervato prima in Inghilterra.

Del Sig. Ab. RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH Profeſſore di Ottica al Dipartimento della Marina a Parigi.

PROPOSIZIONE I.

Trovare la diſtanza, la poſizione, e la grandezza dell' arco deſcritto dal nuovo Aſtro per mezzo di quattro oſſervazioni fatte nell' intervallo di più meſi.

LA brevità del cammino percorſo da queſt' Aſtro in ſei meſi fa conoſcere abbaſtanza eſſer egli molto remoto; ſi dee quaſi tutto alla parallaſſe dell' orbe annuo della terra. L' arco deſcritto deve eſſere aſſai proſſimamente rettilineo, e la velocità in eſſo ſenſibilmente coſtante. Quindi la di lui diſtanza, poſizione, e grandezza potranno determinarſi per mezzo di quattro oſſervazioni, applicando a tale determinazione il problema di una retta ſegante in modo quattro rette date di poſizione, che tre ſegamenti di eſſa intercetti dalle ſteſſe rette ſiano in data ragione, cioè nella proporzione degl' intervalli del tempo. Queſto problema, anche dal *Neuton* propoſto nella ſua Aritmetica univerſale per le orbite rettilinee delle comete, è ſtato altra volta da me dimoſtrato non aver luogo per l' orbite comuni delle comete (*Diſſert. de Cometis An.* 1746.), e più

diffuſamente in altra Operetta ſu lo ſteſſo ſoggetto, che il Signor *Caſtillon* aggiunſe nell'ultimo Tomo dell'Aritmetica Neutoniana da ſe con egregie annotazioni illuſtrata. Ma nel noſtro caſo la brevità del cammino corriſpondente alla ſmiſurata diſtanza ne permette l'uſo. Trovata la diſtanza in ſuppoſizione d'un moto rettilineo ed uniforme, agevolmente ſi potrà conoſcere, che la correzione, la quale dovrebbe corriſpondere alla curvatura ed ineguaglianza della velocità, ſfugge realmente ogni ſenſo nel caſo noſtro.

Siano T, T', T'', T''', (*Fig. I.*) quattro luoghi della terra, P, P', P'', P''' quattro luoghi dell'Aſtro ridotti al piano dell'ecclittica a traverſo i quali paſſano le direzioni delle longitudini oſſervate TE, $T'E'$, $T''E''$, $T'''E'''$. Si tratta di trovare la diſtanza, la poſizione, e la grandezza della retta PP''', i cui ſegamenti PP', $P'P''$, $P''P'''$ ſiano nella proporzione data degl'intervalli del tempo infra quelle oſſervazioni.

Siano A, A', A'' le interſezioni della retta TE colle rette $T'E'$, $T''E''$, $T'''E'''$, e le rette $P'''B$, $P'B'$ parallele alle rette E'T', E''T'' s'incontrino colla medeſima retta TE ne' punti B, B'.

Nel triangolo TST' dalle date diſtanze ST, ST' del ſole dalla terra, e coll'angolo dato TST' uguale al moto del ſole tra la prima oſſervazione e la ſeconda, ſi ricaverà la corda TT' cogli angoli STT', $ST'T$: gli angoli STA, $ST'A$ ſi ſcopriranno dalla differenza delle longitudini del ſole, e dell'Aſtro. Quindi ſi avranno gli angoli ATT', $AT'T$, che faranno la ſomma o la differenza degli angoli STT', STA, ed STT, $ST'A$. Una figura anche trivialmente delineata, che contenga i luoghi T, T' nell'orbita circolare della terra colle rette TE, $T'E'$ indefinite, farà vedere ſe prender ſi debba la ſomma, o la differenza. La ſomma ſarà da uſarſi nel caſo eſpreſſo dalla figura per l'angolo ATT'; la differenza per l'$AT'T$. Anzi baſterà trovare l'uno ſolamente

ſolamente di quegli angoli, eſſendo il terzo TAT' la differenza data delle longitudini dell'Aſtro nella prima, e ſeconda oſſervazione. Quindi ſi troverà la retta TA, e nel modo ſteſſo troverannoſi le rette TA', TA'' nei triangoli $A'TT''$, $A''TT'''$ col mezzo de' raggi ST'', ST''', degli angoli TST'', TST''', e degli angoli $TA'T''$, $TA''T'''$ uguali ai moti del ſole, e dell'Aſtro in longitudine dalla prima alla terza, e quarta oſſervazione.

Si dicano t, t', t'' i tempi dalla prima oſſervazione alla ſeconda, alla terza, alla quarta; m, m', m'' i moti dell'Aſtro in longitudine dalla prima oſſervazione alla ſeconda, da queſta alla terza, dalla terza alla quarta. L'angolo $A''P'''B$, il cui lato $A''P'''$ ha la direzione della longitudine quarta, e il lato BP''' parallelo all' AP' la direzione della ſeconda, ſarà $= m' + m''$, l'angolo $A''P'''B'$ ſarà $= m''$ per la direzione $B'P'''$ parallela alla direzione $A'P''$ della terza longitudine: l'angolo poi $A'BP'''$ ſarà $= m$ per le direzioni BA'', BP''' delle longitudini prima e ſeconda, e l'angolo $A''B'P'''$ ſarà $= m + m'$ per le direzioni $B'A''$, $B'P'''$ delle longitudini prima e terza. Si facciano i ſeni di queſti angoli $a =$ ſen. $(m' + m'')$, $a' =$ ſen. m'', $b =$ ſen. m, $b' =$ ſen. $(m + m')$. Si facciano pure $AA''=c$, $A'A''=c'$, $PA''=x$.

Sarà $t : t'' :: PP' : PP''' :: PA = x - c : PB = \frac{t''x - c\,t''}{t}$;

e perciò $A'B = \frac{t''x - c\,t''}{t} - x = \frac{(t'' - t)\,x - c\,t''}{t}$: così

ſen. $A''P'''B = a$: ſen. $A'BP''' = b :: A''B : A'P''' = \frac{(t''-t)bx - bct''}{at}$.

Con le ſteſſe proporzioni ſoſtituendo le rette $A'P'$, $B'P'''$ alle rette AP', BP''', e perciò i valori a', b', c', t' ai valori a, b, c, t, ſi avrà l'altro valore della medeſima $A''P''' = \frac{(t'' - t')\,b'x - b'c't''}{a't'}$. Laonde fatto $\frac{(t''-t)b}{at} = m$,

$\frac{b c t''}{at} = n$, $\frac{(t''-t')b'}{a' t'} = m'$, $\frac{b' c' t''}{a' t'} = n'$, si avrà $A'P''$ $= mx - n = m'x - n'$, e perciò $x = \frac{n-n'}{m-m'} = A'P$.

Avuto questo valore, e il valore $AP''' = mx - n$ coll' angolo $PA''P'''$, il quale è il moto in longitudine dalla prima osservazione alla quarta $= m + m' + m''$, si avrà nel triangolo PAP''' tutto il cammino PP''' cogli angoli in P, e P''', che esibiscono la di lui posizione rispetto alle rette TE, $T'''E'''$; e le distanze TP, $T'''P'''$ si avranno aggiungendo le $A''P$, $A'''P'''$ qui trovate alle trovate prima TA'', $T'''A''$; e perciò si avrà ciò che si dovea ritrovare.

SCOLIO.

Non ho qui in villa, dove sì fatte cose scrivo, la soluzione di questo Problema proposto dal *Neuton* nella sua Aritmetica universale, nè quella di *Simpson*, di cui mi sono servito nell' accennata Operetta stampata dal *Castillon*, e molto meno l' altre anteriori, di cui fa menzione il *Neuton*. Quelle si potranno riscontrare, ed usarle quando esibiscano un più spedito calcolo numerico. Il metodo però da me qui usato nella soluzione dello stesso Problema sembra assai naturale, e diretto, ed offre una formola molto semplice.

PROPOSIZIONE II.

Trovare la specie, e la grandezza dell' orbita.

Nella *fig.* 2. i punti S, T, P siano i medesimi che nella prima, e i punti A, P', T' siano gli A'', T''', P''' di quella: siano poi C C' i luoghi dell' Astro nella sua orbita. Moltiplicando TP, $T'P'$ per le tangenti della

latitudine prima ed ultima si troveranno le rette PC, $P'C'$ perpendicolari al piano dell'eclittica, e perciò perpendicolari alla retta PP', a cui se si concepisca la retta CI parallela ed uguale, sarà anch' essa cognita con la differenza $C'I$ delle rette PC, $P'C'$; e però si avrà anche la corda dell'orbita CC', ipotenusa del triangolo CIC', la quale per la latitudine di quest' Astro piccolissima appena differisce dalla retta PP'. Se questa si divida in due egualmente in H, e s' inalzi HH' fino alla corda CC', che sarà la semisomma delle rette PC, $P'C'$, e si tirino SP, SH; si avranno nel triangolo SPT i lati ST, TP coll'angolo STP, che è la differenza delle longitudini del sole, e dell' Astro, e perciò si troverà SP, e l' angolo SPT, che coll' angolo trovato APP' darà l' angolo SPH; questo poi col lato SP, e $PH = \frac{1}{2} PP'$, darà la retta SH, dalla quale e dalla retta HH' si avrà SH'. E' noto poi anche il lato $CH = \frac{1}{2} CC'$, e facilmente si troverà SC dai lati SP, PC cogniti coll'angolo retto SPC: quindi si avrà anche l'angolo $SH'C$, cioè la posizione della retta CC', la quale può prendersi per la tangente dell' orbita per rispetto al raggio vettore SH'. La perquisizione diverrà molto più semplice se si prendano PP', SH, SHC invece di CC', SH', SH'C', il che sarà lecito in quest' Astro, che ha le latitudini così picciole.

La lunghezza della corda CC' riferita al tempo tra le osservazioni estreme offre la velocità, che paragonata colla velocità del corpo che ha da rivolgersi in cerchio nella distanza SH', determinerà il genere della sezione conica, nella quale l'Astro si move, e quell' istessa velocità, insieme coll'angolo $SH'C$, determinerà la di lei specie, e la grandezza nel modo seguente. Si dica n lo spazio, che col moto medio della terra vien percorso nel tempo di un minuto, la distanza media della terra dal sole posta $= 1$, r il raggio vettore SH', c la corda CC', t il tempo dalla prima osservazione all'ul-

tima. Il quadrato dello spazio corrispondente al tempo t in quel moto medio sarà $n^2 t^2$; ed essendo i quadrati delle velocità in cerchj intorno al sole in ragione reciproca dei raggi, il quadrato dello spazio corrispondente al medesimo tempo nel circolo, il cui raggio $= r$, sarà $\frac{n^2 t^2}{r}$. Per la qual cosa il quadrato della velocità in quel circolo sarà al quadrato della velocità di quell' Astro come $\frac{n^2 t^2}{r}$ a c^2. L' altezza, da cui cadendo con un moto uniformemente accelerato con la forza, che rattiene il mobile nel cerchio, si acquisterebbe la velocità circolare, è, per li teoremi *Hugeniani* la quarta parte del diametro; di modo che per quel cerchio è $= \frac{1}{2} r$, e le altezze dovute alle diverse velocità, con pari forza, sono come i quadrati delle stesse velocità. Quindi l' altezza dovuta alla velocità dello stesso Astro sarà $= \frac{c^2 r^2}{2 n^2 t^2}$.

In una mia dissertazione, che ha per titolo, *Del modo di trovare l' orbita d' un pianeta coll' ajuto della catottrica*, ho da gran tempo pubblicata una semplicissima ed elegantissima costruzione del problema, in cui data la distanza, la velocità, e la posizione della tangente si cerca la sezione conica da descriversi; la qual costruzione ho ivi dedotta dalla soluzione d' un certo problema catottrico. Ho di poi dedotto la stessa costruzione da soli principj appartenenti alla teoria delle forze decrescenti in ragione reciproca duplicata delle distanze in altra Operetta intorno alle perturbazioni di Giove, e di Saturno, come segue.

Sieno nella *fig.* 3. i punti S, C i medesimi che nella *fig.* 2., ed H sia lo stesso che H'. Si pigli HK verso S uguale all' altezza dovuta alla velocità, ed SL terza continuatamente proporzionale a SK, SH nella

direzione SK. Si conduca LT perpendicolare alla tangente HC, e ſi prolunghi in M. L'aſſe primario della curva ricercata ſarà uguale alla retta SL; i due fuochi ſaranno S, M, e nel loro mezzo il centro N; dati i quali è manifeſto, ch'è data pure la ſezione conica.

La curva ſarà un'elliſſi, una parabola, o un'iperbola ſecondo che l'altezza HK ſarà minore, uguale, o maggiore per riſpetto al raggio SH. In queſto ultimo caſo i punti K, L giaceranno nella retta SH prolungata dalla parte di S. Nel caſo dell'elliſſi ſi avrà il circolo, ſe ſarà $SK = \frac{1}{2} SH$, e l'angolo SHC retto. Nel caſo della parabola, ſvanendo la SK, la longitudine dell'aſſe SL diventerà infinita, e i punti N, M allontanandoſi all'infinito, la poſizione dell'aſſe, e la diſtanza perielia ſi determineranno facilmente con queſt'altra coſtruzione. Col centro S, e coll'intervallo SH ſi trovi nella ſteſſa tangente il punto Q, e tagliata in due egualmente la HQ in O, ſi trovi OV perpendicolare alla retta SQ: ſarà V il vertice della parabola, SV la diſtanza perielia, la cui direzione determinerà la longitudine del perielio nell'orbita: nel caſo dell'elliſſi la direzione SM offrirà la longitudine dell'afelio, SN l'eccentricità, SL il tempo periodico, che ſi avrà dal teorema Kepleriano, qualora ſi prenda la radice quadrata del cubo della metà dell'aſſe SL, la quale eſibirà il numero degli anni.

Per ritrovare l'altezza $HK = \frac{c^2 r^2}{2n^2 t^2}$ ſi ha il valore trovato $SH = r$, $CC' = c$, e il tempo t, che aſſumer ſi deve in minuti: biſognerà in oltre trovare il valore n. Il che potrà farſi nel ſeguente modo. L'anno ſidereo è nell'Aſtronomia del Sig. *de la Lande* di giorni 365. 6^h. $9'$. $10''$ = 31558150″; lo ſpazio fatto in queſto tempo nel cerchio, il cui raggio = 1, è la circonferenza = $2 \times 3,1415927$; e però lo ſpazio n corriſ-

pondente ad un minuto, cioè a 60″, farà $\frac{12\times3,1415927}{3155815}$,

e il logaritmo del valore $\frac{1}{2n}$ 2 farà $= 7,8534090$.

Se gli si aggiunga il doppio logaritmo della distanza r, e del valor della corda c, e il doppio complemento aritmetico del logaritmo del tempo t espresso col numero de' minuti, si avrà il valore dell'altezza HK, il quale paragonato colla distanza SH esibirà un' ellissi, una parabola, o un' iperbola, secondo che per rispetto ad essa sarà minore, uguale, o maggiore.

PROPOSIZIONE III.

Trovare tutti gli elementi della Teoria di quest' Astro.

La longitudine del nodo, e l' inclinazione con facilità si troveranno anche indipendentemente dalla specie dell'orbita. Sia nella *fig.* 2. R l'intersezione delle rette PP, $C'C$: sarà SR la linea dei nodi, la di cui direzione esibirà la longitudine del nodo ascendente, se tutte due le latitudini, come qui, saranno boreali, e $P'C'$ maggiore parimenti, come qui, della PC. Fatto $P'C' - PC = C'I : PC :: PP : PR$, si troverà questo lato del triangolo SPR, in cui è manifesto anche l'angolo SPR, supplemento dell' angolo trovato SPH: il lato poi SP coll' angolo TSP si avrà nel triangolo TSP, nel quale si hanno i lati ST, TP coll' angolo in T, che è la differenza della longitudine del sole, e dell' Astro nella prima osservazione; e perciò troverassi l'angolo PSR. L' angolo STP aggiunto qui a quella longitudine del sole esibirà la longitudine eliocentrica della direzione SP, e l'angolo PSR levato da quella somma esibirà la longitudine ricercata della direzione SR tendente al nodo ascendente.

Se si concepisca un piano perpendicolare alla retta SR condotto per la retta PC, colla quale SR s' incontri in D; l' inclinazione ricercata sarà l' angolo PDC, la di cui tangente è $\frac{PC}{PD} = \frac{PC}{SP \times sen.\ PSR}$. Perciò si avrà anche l' inclinazione.

Per la longitudine del perielio si ha nella *fig.* 2. l' angolo PSH nel triangolo SPH già risoluto; il quale aggiunto qui all' angolo RSP esibirà l' angolo RSH: la di cui tangente divisa pel coseno dell' inclinazione darà l' angolo RSH'. Imperciocchè se il piano $HD'H'$ parallelo al piano PDC s' incontri con la medesima SR in D'; sarà $HD'H'$ l' inclinazione, e la retta HD sarà il coseno di quell' angolo col raggio $D'H'$, mentre queste due rette sono tangenti degli angoli RSH, RSH' col raggio comune SD'. L' angolo RSH' aggiunto qui alla longitudine del nodo, cioè della direzione SR, offrirà la longitudine della direzione SH'. Si ha l' angolo $HRD = PRD = APP' - PSR$, la di cui tangente pure moltiplicata pel coseno dell' inclinazione somministrerà l' angolo $H'RD'$. Quindi si avrà $SHC' = RSH' + H'RD'$, che è il medesimo, che l' angolo $SH\Omega$ della *fig.* 3. Il supplemento del doppio angolo $SH\Omega$ sarà l' angolo $HS\Omega$, per essere isoscele il triangolo $HS\Omega$; il quale aggiunto alla longitudine della direzione SH darà per il caso della parabola la longitudine del perielio; e dalla teoria poi generale dell' orbita parabolica la distanza perielia SV è $= SH \times$ sen.^{2} $SH\Omega$, e perciò anche que' due elementi facilmente si avranno nel caso della parabola. Qui pure si conseguirà l' effetto più facilmente se nella *fig.* 2. si assumano i punti P, H, P' invece de' punti S, H', C'.

Per il caso dell' ellissi, date nella *fig.* 3. SH, HK, si avrà SK, ed SL, la cui metà sarà il semiasse maggiore uguale alla distanza media. Si avrà ancora $HL = SL - SH$, e perciò anche LT perpendicolare alla

tangente $HC = HL \times$ sen. LHC. Quindi si avrà LM doppia di essa; ed avendosi nel triangolo SLM anche il lato SL, e l'angolo L complemento dell'angolo LHC, si troverà SM doppia della eccentricità SN, e l'angolo MSL, il quale tolto dalla longitudine della direzione SH darà la longitudine dell'afelio. Le distanze perielia ed afelia si avranno dalla differenza, e dalla somma della distanza media, e dell' eccentricità trovata, e il semiasse minore sarà medio proporzionale geometrico tra di esse. Simile è l' operazione per l'iperbola; se qualche somma non si muti in sottrazione, o viceversa secondo le leggi della trasformazione dei luoghi geometrici.

Il tempo dell'arrivo al perielio nella parabola si avrà dalla teoria generale del moto parabolico, in cui si ha un bellissimo, e poco avvertito teorema del *Neuton* nel primo libro dei Principj della filosofia naturale, di cui ho io da gran tempo fatto uso per determinare assai facilmente per ogni giorno, e ad ogni due giorni i luoghi della cometa nella parabola graficamente delineata. Il teorema è questo. Mentre la cometa progredisce in quella curva con un moto assai ineguale, il centro del circolo che passa per il sole, per il vertice dell'asse, e pel luogo della stessa cometa, si muove con un moto uniforme nella retta linea, che taglia in due parti eguali, e ad angoli retti la distanza perielia, e nel tempo, che dal perielio la cometa deviene all' anomalia di 90 gradi, percorre un segamento di essa uguale all' istessa distanza perielia. Indi poi per qualunque anomalia, data la quale si ha pur anche il raggio vettore, dividendo la distanza perielia per il quadrato del coseno di mezza l'anomalia, si deduce agevolmente la formola molto semplice, che ci dà il tempo corrispondente a quell' anomalia.

Nella *fig.* 4. le rette MN, ON che segano in due ugualmente, e ad angoli retti la distanza perielia SV, ed il

ed il raggio vettore SH s' incontrano ſcambievolmente nel punto N, ch' è il centro del circolo, che paſſa per li punti S, V, H: la retta MP è perpendicolare alla retta SH: e con eſſa s' incontra in $\mathfrak{Q}$ la retta $N\mathfrak{Q}$ parallela ad OS. Se il raggio vettore SH ſi faccia $= r$, la diſtanza perielia $SV = u$, l' anomalia $VSH = a$; ſarà $SP = \frac{1}{2} u \cos. a$, $OP = \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} u \cos. a = N\mathfrak{Q}$. L' angolo $NM\mathfrak{Q}$ ſarà eguale all' angolo $MSP = a$, eſſendo l' uno e l' altro il complemento dell' angolo SMP. Quindi ſarà $MN = \frac{N\mathfrak{Q}}{\text{ſen. } a} = \frac{r - u \cos. a}{2 \text{ ſen. } a}$.

Il numero de' giorni corriſpondenti all' anomalia di 90 gradi nella parabola avente la diſtanza perielia $= 1$ ſi chiami n; il numero ad eſſa corriſpondente nella data parabola ſarà $= nu^{\frac{3}{2}}$ e però ſe ſi faccia $SV = u$:

$$MN = \frac{r - u \cos. a}{2 \text{ ſen. } a} :: nu^{\frac{3}{2}} : \frac{nu^{\frac{3}{2}}}{2 \text{ ſen. } a} (r - u \cos. a)$$

queſto ultimo termine eſprimerà il numero de' giorni debito all' anomalia a. In oltre il numero n è $= 109,6$, e perciò il numero cercato ſarà $\frac{54,8\, u^{\frac{3}{2}}}{\text{ſen. } a} (r - u \cos. a)$.

Queſto numero aggiunto al tempo medio tra le oſſervazioni eſtreme darà il tempo dell' arrivo dell' Aſtro al perielio. In fatti la formola qui trovata è molto ſemplice, e può eſſere di grandiſſimo uſo tanto per computare la tavola parabolica dei tempi corriſpondenti alle anomalie, quanto ancor molto più per ritrovare il tempo, qualora le tavole già computate non s' abbiano alle mani, o qualora l' anomalia ecceda la maſſima di quelle, che nelle ſteſſe tavole ſi contengono. Dove ſi tratta di computare la tavola, rieſce la formola anche più ſemplice fatto $u = 1$.

Se l' orbita è poi ellittica, quel tempo ſi computerà

coll' ajuto del ſettore ellittico riferito all' area totale. Se nella *fig.* 5. i punti S, N, H ſiano i medeſimi, che nella *fig.* 3., e ſiano poi A, P i punti dell' afelio e perielio, e la retta HK perpendicolare all' aſſe attraverſo AP prolungata dalla parte di H s' incontri col cerchio circoſcritto in I, e ſi tirino le rette SI, SH, NI; ſi avrà l' angolo ASI, facendo come il ſemiaſſe maggiore trovato NI al ſemiaſſe conjugato medio geometricamente proporzionale fra le diſtanze AS, SP afelia e perielia ſimilmente ritrovate, così la tangente dell' angolo NSH avuto nella riſoluzione del triangolo SLM alla tangente di quell' angolo. Il valore dell' arco $IL = \frac{SN \times IK}{NI} = SN \times \mathit{ſen.}\ ANI$ ſi riduca alle parti angolari facendo come $113 : 355 :: NI : \frac{355}{113} \times NI$, ch' è il valore di mezza la circonferenza, così $\frac{355}{113} \times NI$: $IL = SN \times$ ſen. $ANI : 180° : \frac{113 \times 180°}{355} \times \frac{SN \times \mathit{ſen.}\ ANI}{NI}$; fatto queſto valore $= M$, ſi farà come $360°$ ad $ANI + M$, così il tempo periodico al quarto: queſt' ultimo valore ſarà il tempo corriſpondente all' anomalia ASH; trovato il quale, ſi avrà il tempo dell' arrivo al perielio.

Se il moto ſi faccia nell' iperbola, non difficilmente ſi otterrà il tempo ricercato mediante il valore dell' area iperbolica, che ſi ha per mezzo de' logaritmi: ma egli ſembra molto improbabile, che i corpi, ſe ve n' ha che ſi movano in iperbole, di tal maniera a noi s' avvicinino, che cadano ſotto gli occhi.

Se il moto ſia diretto, o retrogrado, facilmente ſi ſcoprirà dall' oſſervazione ſteſſa della *fig.* 1., delineata anche groſſolanamente dopo determinata la diſtanza della retta PP'', e la poſizione del punto A'', che è il con-

corso delle direzioni TE, $T''E''$. Si ha in oltre pur questa regola generale. Se l'uno dei punti S, A'' giacerà tra le rette $T''T$, $P''P$ indefinitamente prolungate, e l'altro fuori; il moto sarà retrogrado: altrimenti sarà diretto. Qui si troverà l'uno e l'altro dai punti di dentro: quindi il moto sarà diretto. Così tutti si avranno gli elementi della Teoria, che si dovevano determinare.

SCOLIO.

Il metodo finora esposto appoggiato alla prima Proposizione non può adoperarsi, ove si tratti delle comete comuni che non cadono sotto gli occhi se non se in distanze molto minori; perchè se si prenda l'arco maggiore, la curvatura e l'ineguaglianza della velocità si oppongono all'ipotesi, sopra di cui si fonda quella soluzione: se poi si prenda l'arco minore, in cui sembri che quella curvatura ed ineguaglianza si possa trascurare, allora l'arco eziandio descritto dalla terra è pure rettilineo sensibilmente, e vien percorso colla velocità anche meno ineguale: quindi tanto l'arco cometico, quanto l'arco terrestre si dovranno avere insieme per linee rette, l'una e l'altra delle quali da quattro direzioni della longitudine è segata nella medesima proporzione del tempo. Per altro in quell'antica mia Dissertazione sulle comete, e nello Schediasma impresso dal *Castillon* appiè dell'Aritmetica universale del *Neuton* io ho dimostrato, che nel caso che quelle quattro rette date passano per li quattro binarj de' punti appartenenti alle due rette tagliate in quei punti nella medesima ragione, riesce il problema indeterminato per tal modo, che preso qualunque punto in una di quelle rette in qualunque distanza, possa condursi altra retta, che da quelle quattro medesime sarà segata in quella stessa ragione. Donde nasce, che se si abbia la determinazio-

ne, ella non corrisponde alla natura del problema, ma ai piccioli errori dell'osservazioni, e alle quantità neglette per dar luogo alla supposizione d'un moto rettilineo ed uniforme.

Nel nostro caso va la cosa molto diversamente. Altro metodo, ch'esporrò fra poco, il quale mediante tre osservazioni ricerca la distanza nell'ipotesi d'un moto parabolico, mi fa vedere, che la distanza stessa è doppia della distanza di saturno dal sole, la quale invero mi si appalesò dover'essere di quella grandezza, anche essendo il moto circolare. In quella distanza l'arco anche di sei mesi non differisce sensibilmente da una linea retta, nè il moto s'allontana dall'uniforme, di maniera che non ne può provenire l'errore neppur d'un secondo; mentre il moto della terra in un arco così grande moltissimo differisce dalla retta linea. Quindi nella *fig.* 1. le rette linee $T'E'$, $T'E''$ segano la corda TT''' in ragione assai diversa dalla ragione dei tempi, in cui segano la corda PP''', il che toglie l'indeterminazione, e dà speranza d'uno scioglimento abbastanza accurato. L'esattezza della soluzione dipende dalla grandezza del numeratore, e del denominatore della formola trovata nella Proposizione prima $x = \frac{n - n'}{m - m'}$, la quale nel caso dell'indeterminazione renderebbe vana la soluzione, dando $\frac{0}{0}$, o una frazione derivata da' soli errori delle osservazioni. Quanto più differenti saranno tra di sè le ragioni de' segamenti di quelle corde, tanto maggiori saranno que' valori, e perciò tanto meno si altereranno per li piccioli errori delle osservazioni; per la qual cosa potrà sperarsi la determinazione abbastanza esatta, se le ultime osservazioni sieno distanti l'una dall'altra l'intervallo di sei mesi. Dopo sei mesi la corda TT''', che è la base della parallasse annua, diminuisce; il che pure nuoce ad una esatta de-

terminazione. A prima vista sembrano sommamente acconce le osservazioni fatte tre mesi avanti, e tre dopo la congiunzione col sole, che in quest' anno è succeduta poco innanzi al solstizio estivo, o l'opposizione, che si avrà presso al solstizio invernale, perchè allora quella base non sarà obbliqua; ma se si adoperino le osservazioni fatte avanti, e dopo la stazione, che si avrà prima della metà di Ottobre, i segamenti della corda TT' avranno una ragione molto più diversa dalla ragione de' segamenti della corda PP'. Questa differenza sarà ancora molto più grande, se un anno intero sia lontana l' ultima osservazione dalla prima; nel qual tempo altresì l' errore nato dalla curvatura dell' arco di quest' Astro sarà così picciolo, che si potrà trascurare, e agevolmente potrassi determinare, se piacerà, per poterne tener conto: la corda TT'' svanirà; ma le corde TT''', TT^{IV} saranno abbastanza grandi, e la soluzione avrà luogo adattata appuntino a quel caso. Intanto potrà sperarsi qualche successo dalle osservazioni fatte nel principio di Aprile, e da farsi nel principio del prossimo Ottobre con due intermedie assai distanti da quelle, e da sè scambievolmente.

Il metodo, che suppone l'orbe circolare, o parabolico, non soggiace a questo pericolo, se nella soluzione del problema si adoperi anche la relazione, che la grandezza della CC' nella *fig.* 2. deve avere alla distanza dal sole. Per l' orbe circolare bastano due osservazioni, tre pel parabolico. Esporrò questi metodi nelle due seguenti Proposizioni.

PROPOSIZIONE IV.

Trovare il raggio del cerchio nell' ipoteſi circolare col mezzo di due oſſervazioni.

Primamente queſto raggio ſi troverà poco lontano dal vero col metodo ſeguente. Nella *fig.* 2., che offre due oſſervazioni, ſi troverà la corda TT', e la retta TA, come nella Propoſizione prima: indi nel triangolo STA troveraſſi SA dai lati ST, TA, e dall' angolo in T, tutte coſe note. Poichè tutto l'angolo TAT', che è il moto totale in longitudine di queſto Aſtro aſſai lento, è di pochi gradi; ſarà l' angolo ASH molto picciolo eziandio dopo lo ſpazio di ſei meſi, e perciò la retta SH', che qui ſimilmente quaſi nulla differiſce dalla retta SH, ſarà proſſimamente uguale alla ſomma delle rette SA, AH, la prima delle quali ſe ſi chiami a, l'altra x, ſarà $SH' = a + x$. E mentre ſia il triangolo PAP' iſoſcele, la retta PP' ſarà perpendicolare alla retta AH, e perciò pochiſſimo differente dalla retta perpendicolare alla retta SH, intercetta dalle rette $AP \times AP'$, la quale ſenſibilmente non differirà dalla CC', che le corriſponde, e queſta dall' arco del circolo intercetto fra le rette TC, $T'C'$. Se poi l'angolo PAP' ſi chiami m, ſarà PP' in caſo d' iſoſceliſmo $= 2\,AH \times \text{tan.}\,\frac{1}{2}PAP' = 2x\,\text{tan.}\,\frac{1}{2}m$, in luogo di cui ſi può porre $x\,\text{tan.}\,m$, perchè le tangenti de' piccioli angoli ſono proporzionali aſſai proſſimamente agli ſteſſi angoli; e ciò ſarà aſſai proſſimamente il valore dell' arco CC'.

Nella Propoſizione ſeconda ſi è trovato lo ſpazio n, che in un minuto di tempo vien percorſo nella diſtanza media della terra dal ſole. Quindi ſe il tempo fra queſte oſſervazioni, ridotto a minuti, ſi chiami t, ſarà lo ſpazio debito a quel tempo in quel circolo nt. Ora il raggio SH di queſt' orbita circolare eſſendo $a + x$, ſa-

rà il quadrato dello ſpazio corriſpondente a quel cerchio $= \frac{n^2 t^2}{a+x}$, eſſendo li quadrati delle celerità reciprocamente proporzionali ai raggi de' cerchj. Quel valore fatto $= CC'^2 = x^2 \, tan.^2 m$, farà $x^3 + a x^2 - \frac{n^2 t^2}{tan.^2 m} = 0$ l'equazione di terzo grado, che darà il valore ricercato x il più proſſimo al vero.

Trovato il valore x per tale equazione, agevolmente ſi troverà il valore più accurato della diſtanza col metodo di falſa poſizione. Preſo quel valore per la retta AH, e il triangolo PAP come iſoſcele (dalla qual forma pochiſſimo potrà egli diſſerire) ſi avrà $HP = HP' = x \, tan. \frac{1}{2} a$, ed $AP = \frac{x}{cos. \frac{1}{2} a}$; e nel triangolo TSP ſi avrà ST, e $TP = TA + AP$ coll' angolo STP, e perciò troveraſſi il valore SP, che deve eſſere aſſai proſſimamente uguale al valore SH, e queſto al valore SH', come ancora CC' aſſai proſſimamente uguale al valore PP'. Il quadrato di queſto moltiplicato per SH' deve eſſer uguale al valore ritrovato $n^2 t^2$. La differenza farà l'errore da correggerſi per altra poſizione del valore x, il quale ſi dovrà pigliar minore o maggiore, ſecondo che per lo contrario quel prodotto riuſcirà per ſorte minore o maggiore del valore $n^2 t^2$; imperciocchè accreſciuto il valore di x s'accreſcerà tanto PP', quanto SH'. L'error nuovo paragonato col primo eſibirà il valore di x, il quale correggerà l'errore, ſe i precedenti errori ſaranno ſtati piccioli, come ſaranno di fatto: altrimenti lo diminuirà in tal guiſa, che per nuove poſizioni ſi dileguerà ben preſto.

Dalle oſſervazioni del dì 3 Aprile, e 17 Luglio ho trovato la diſtanza TP aſſai proſſimamente $= 19, 6$. Se ſi adoperi la ſeconda oſſervazione ancor più remota, trovato per mezzo di eſſa il valore TA, e da queſto

valore levato TP, il rimanente si potrà assumere per AP; così PP' per $= 2AP \times$ sen. $\frac{1}{2} PAP'$, e trovato il valore SP nel triangolo STP, si avrà $PP'^2 \times SP$, valore da paragonarsi col valore n^2t^2. In tal maniera si eviterà l'equazione del terzo grado. Ma anche più facilmente la cosa si condurrà ad effetto, dove fosse nota la longitudine dell'Astro in opposizione da paragonarsi colla longitudine in congiunzione col sole, che di leggieri si deduce dalle osservazioni del mese di Maggio, e di Luglio: imperciocchè circa la congiunzione lo stesso moto apparente, per altro lentissimo, dovette essere quasi accuratamente equabile. La differenza di queste longitudini sarà il moto angolare intorno al sole: facendo come questa differenza delle longitudini a $360°$, così l'intervallo del tempo fra quelle due posizioni al quarto termine, questo darà il tempo periodico, dal quale per la terza legge di *Keplero* risulterà la distanza dal sole.

Ho data qui una soluzione di questo problema analoga al mio metodo più generale che serve per le orbite paraboliche; ma esso si scioglie molto più facilmente per la falsa posizione in quest'altra maniera. Si prenda nella stessa fig. 2. un raggio SP arbitrario: nel triangolo TSP si avrà l'angolo in T, che è la differenza delle longitudini geocentriche del sole, e dell'Astro, e la distanza ST del sole dalla terra: così si avrà l'angolo SPT, il cui seno è $= \frac{ST \times sen.ST'P}{SP}$: esso dovrà essere aggiunto alla longitudine geocentrica dell'Astro data dalla osservazione, o dovrà esserne sottratto, secondo le diverse circostanze facili a determinarsi, per avere la longitudine eliocentrica dell'Astro medesimo. Così si avranno le due longitudini eliocentriche di esso corrispondenti a' due tempi delle due osservazioni, e però si avrà l'arco descritto in quell'intervallo di tempo. Questo si paragonerà a quello, che dovrebbe descriversi in esso

in esso intervallo in vigore della distanza assunta. Se un anno tropico sia $= a$; la distanza assunta $= r$; quell' intervallo $= t$; la circonferenza del circolo $= c$; l'arco, che corrisponde a quel tempo, sarà $= \frac{tc}{ar^{\frac{1}{2}}}$, ciò che facilmente si ricava dalla regola di *Keplero* de' quadrati de' tempi proporzionali a' cubi delle distanze: in vigor di essa il tempo periodico di esso Astro sarà $= ar^{\frac{3}{2}}$ preso r nelle unità uguali alla distanza media del sole dalla terra; e l'arco cercato sarà il quarto termine proporzionale dopo questa quantità, il tempo t, e l'intera circonferenza. Questo arco confrontato con quello, che avevano dato le due osservazioni, dà l'errore della posizione; la quale rifatta, quanto bisogna, deve dare al fine la vera distanza, da cui si ricaverà anche il tempo della rivoluzione, che avrà per numero di anni il solo valore $r^{\frac{3}{2}}$.

Convien però avvertire di correggere le osservazioni dell'Astro col liberarle dall'aberrazione del lume, e dalla nutazione, correggendo il luogo del sole colla nutazione sola: non occorre aver riguardo alla precessione degli equinozj; giacchè la rivoluzione siderale dell' Astro contiene lo stesso numero degli anni siderali, che la rivoluzione tropica degli anni tropici.

Quando nella scorsa state del 1781 composi questo opuscolo, trovai coll'altro metodo la distanza 19, 6, servendomi di due osservazioni, che erano troppo vicine fra loro, come ho detto qui innanzi, onde i piccoli errori delle osservazioni portavano un errore più considerabile nel risultato; oltrechè non aveva impiegato le picciole correzioni sopra accennate, bastandomi allora di avere a un dipresso la distanza da determinarsi meglio colle osservazioni più lontane, come appare negli Scolj seguenti. Adoperando poi delle osservazioni più lontane con questo altro metodo, e facendo uso delle debite correzioni, ho trovato la distanza di 18, 90. Un'ot-

ſervazione del 25 Aprile confrontata con una del 12 Decembre mi ha dato 18, 914, e con una del 21 Febbrajo 18, 892: il numero di mezzo, diſprezzando le milleſime, reſta il ſuddetto 18, 90. Queſto viene confermato anche dalla differenza delle longitudini nella congiunzione, ed oppoſizione, di cui ho pur fatta menzione in queſto opuſcolo. Ma per avere il tempo, e il luogo della congiunzione eſatti, e non all'ingroſſo, non ſi può ſupporre il moto geocentrico dell'Aſtro uniforme; giacchè la diſtanza della terra dal ſole, e dall'Aſtro medeſimo variandoſi, varia la velocità di eſſo moto; e come l'Aſtro non avendo latitudine ſenſibile, ed avendo una luce sì debole, reſta naſcoſto dietro al ſole per troppo lungo tempo; queſta diſuguaglianza nuoce ſenſibilmente alla determinazione cercata. Ho un metodo per evitare queſto inconveniente, che ſpiegherò in altro opuſcolo, dove darò anche l'applicazione di varie combinazioni di oſſervazioni a' metodi qui propoſti.

Aggiungerò qui ſolo, che il Sig. *de la Lande* ha trovato per la diſtanza 18, 913, e calcolando con queſta un gran numero di oſſervazioni ha trovato una differenza di pochi ſecondi; ciò che dimoſtra, che l'orbita non ſi diſcoſta molto dalla circolare, e ci aſſicura, che queſto è un vero pianeta diſcoſto dal ſole quaſi eſattamente al doppio di ſaturno.

PROPOSIZIONE V.

Trovare l'orbita parabolica col mezzo di tre oſſervazioni.

Sieno nella *fig.* 6. tre luoghi della terra T, T', T'' con tre direzioni delle longitudini TE, $T'E'$, $T''E''$, S il luogo del ſole, P, P', P'' tre luoghi dell'Aſtro nell'orbita parabolica, il cui arco in iſmiſurata diſtanza potrà qui prenderſi per rettilineo, e il moto per uniforme. Sia poi il ſegamento Tt della corda TT'' alla corda TT'', come il tempo fra la prima e ſeconda oſſervazione al tempo tra la prima e terza; e ſe la terra

ſi moveſſe con moto uniforme per la corda TT', il luogo di eſſa nella ſeconda oſſervazione ſarebbe in t, e la ſeconda longitudine avrebbe avuto la direzione tP' in vece della direzione $T'P'$ cavata dall' oſſervazione. Soſtituita queſta longitudine alla longitudine oſſervata, e ſatti t, t', t'' i tempi dalla prima oſſervazione alla ſeconda, dalla ſeconda alla terza, dalla prima alla terza, ed m, m', m'' i moti in longitudine, che corriſpondono a que' tempi, ſi avrà la ſeguente proporzione $T'P' : TP :: \frac{t'}{ſen.\ m'} : \frac{t''}{ſen.\ m''}$, e queſt' altra $T'P' : T''P'' :: \frac{t}{ſen.\ m} : \frac{t''}{ſen.\ m''}$.

Queſto teorema ſi deduce da quello, che ho dimoſtrato nella ſeconda delle due operette impreſſe nel Tomo VI. degli Opuſcoli, che dall' Accademia di Parigi ſi pubblicano col titolo di *Memoires preſentès à l' Academie*. Ivi a' luoghi della terra, e della cometa ne' ſuoi archi curvilinei piccioliſſimi ho ſoſtituito le interſezioni de' raggi vettori colle loro corde. Dimoſtrai che in caſo, che la ſaetta dell' arco deſcritto intorno al centro delle forze ſia picciola aſſai per riſpetto al raggio vettore, può prenderſi il moto di queſta interſezione per equabile; ſoſtituita poi la longitudine della direzione, tendente dall' interſezione del raggio terreſtre colla ſua corda all' interſezione del raggio cometico colla ſua, alla longitudine della direzione tendente dal luogo della terra al luogo della cometa nella ſeconda oſſervazione, ſi ottengono le proporzioni qui propoſte. Mentre alla interſezione del raggio terreſtre colla ſua corda ſi ſoſtituiſce qui il punto t ſegante la corda ſteſſa in ragione de' tempi, e non curata la ſaetta dell'arco cometico troppo picciola per la ſmiſurata diſtanza, l'interſezione del raggio cometico alla corda dell' arco ridotto al piano dell' eclittica ſi confonde in P col luogo

dell'Aſtro, è manifeſto che il medeſimo teorema deve qui pure aver luogo.

Queſto teorema ivi m'offerſe un metodo ſpeditiſſimo, onde determinare l'orbita della cometa, aſſai proſſima alla vera, col mezzo di tre oſſervazioni, adoperando il metodo di falſa poſizione. Imperciocchè, preſa la diſtanza accorciata ſeconda $T'P'$, ſi trovano con quella proporzione la prima, e la terza; e col loro mezzo per una grafica coſtruzione ſpedita, o per la riſoluzione di ſei triangoli, de' quali tre ſono rettangoli, trovaſi tanto la corda PP'', quanto la corda dell'orbita CC'' coi raggi vettori SC, SC''. Ivi poi ho dimoſtrato anche queſt'altro teorema: ſe il prodotto dal quadrato dello ſpazio, che col moto medio della terra ſi percorrerebbe in due minuti di tempo, moltiplicato nel quadrato del tempo t'' ridotto a minuti, ſi chiami a, e la ſomma di tali raggi b; deve eſſere $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$, traſcurate le quantità, che nel caſo di queſta ſaetta picciola riſpetto al raggio vettore ſicuramente poſſono traſcurarſi: il logaritmo poi di quel quadrato trovai eſſere $\odot$, 756499, al quale aggiunto il doppio logaritmo del valore t'', il valore a facilmente riſulta; ed una volta trovato rimane coſtante in tutte le propoſizioni. La differenza del valore della formola dal valore a è l'errore da diminuirſi dopo la nuova poſizione, o da correggerſi; donde naſce, che per una ſola ſerie di poſizioni ſi deviene ai valori ricercati, mentre col metodo comune ſi ricerca la ſerie di molte ſerie, il che eſige una fatica di calcoli quaſi intollerabile. Ho poi anche il metodo, con cui per le comuni comete delineata facilmente una figura molto ſemplice, ſi forma giudizio della grandezza da aſſumerſi per la prima poſizione, ſicchè ſi ha appena biſogno della terza poſizione. Agevolmente poi avute tre longitudini, e latitudini l'una dall'altra diſtanti l'intervallo di pochi giorni, e

adoperata l'operazione grafica coll'ajuto del calcolo numerario, nello ſpazio di due o tre ore ſi trovano gli elementi proſſimi ai veri, e da correggerſi poi facilmente coll'oſſervazioni più remote.

In queſto metodo ſpeſſe volte può traſcurarſi la riduzione della ſeconda longitudine, potendoſi dimoſtrare, che la retta che congiunge le interſezioni dei raggi vettori colle corde è parallela alla retta che congiunge gli ſteſſi punti degli archi, allor quando la cometa nella ſeconda oſſervazione è in congiunzione col ſole, o in oppoſizione, o sì veramente in una diſtanza dal ſole uguale alla diſtanza del ſole dalla terra; per la qual coſa in quell'Operetta ho omeſſa tal riduzione, di che però ed ivi, e in quell'antica prima Diſſertazione ſopra le comete fatto aveva menzione. Ho poi un metodo generale molto ſpedito d'aver la ragione della riduzione ſteſſa, che ho propoſto alla ſteſſa Accademia, e con molte altre coſe appartenenti alla teoria delle comete eſpoſto in un'opera di giuſta mole, che ho già da gran tempo bella e compiuta, cui già con molti ſupplementi da aggiungerſi ho accennato due anni fa in fine della nuova edizione del mio poema ſopra l'eclifſi pubblicato in Parigi colla traduzione in franceſe. Queſta riduzione è qui del tutto neceſſaria, dovendoſi a cagion del moto troppo picciolo uſare le oſſervazioni avute in uno intervallo di tempo molto più lungo, in cui ſi può bensì avere per rettilineo l'arco di queſt'Aſtro; ma la curvatura dell'arco terreſtre è sì grande, che non ſi può del tutto traſcurare. Queſta riduzione ſi farà, trovato che ſia l'angolo $T'P't$ per qualunque poſizione.

Queſt'angolo ſi conſeguirà facilmente, e tutta la rimanente perquiſizione potrà effettuarſi nel modo ſeguente. Ne' triangoli TST', TST'' con le diſtanze ST, ST', ST' del ſole dalla terra, e cogli angoli in S uguali al moto del ſole in longitudine corriſpondente ai tempi t, t'', ſi troveranno le corde TT', TT'', e gli angoli in T, T', T'', e

le distanze TA, $T''A$ nel triangolo TAT''. Facendo $t'' : t :: TT'' : Tt$, si troverà questo lato del triangolo $TT't$, in cui avrassi ancora il lato TT', e l'angolo $T'Tt$, differenza degli angoli STT'', STT'. Laonde si avrà $T't$, e l'angolo $TT't$, dal quale se si levi l'angolo $TT'E'$ differenza dell'angolo $ST'T$ dall'allungazione $ST'E'$, si avrà l'angolo $tT'E$. Queste cose dovranno trovarsi una volta; le quali saranno poi le medesime per tutte le posizioni insieme col valore a una volta trovato per mezzo del logaritmo o, 756499 aggiunto al doppio logaritmo del tempo t'' ridotto a minuti.

Ora preso un valore arbitrario per la distanza $T'P'$, si avranno nel triangolo $P'T't$ i lati $T'P'$, $T't$ coll'angolo in T', ch'è il medesimo che il trovato $tT'E'$. Laonde ritroverassi l'angolo $T'P't$ da aggiungersi qui alla longitudine della direzione $T'P'$ per aver la longitudine della direzione tP', la quale dovrà adoperarsi per trovare i valori m, m' ridotti. Il seno di quest'angolo farà $\frac{T't \times sen.\ T'tP'}{tP'}$. Per la qual cosa trovato una volta il valore $T't \times$ sen. $T'tP' = T't \times$ sen. $T'tE'$, questo per ciascheduna delle posizioni si dovrà dividere per il valore tP', per cui si potrà prendere $T'P' - T't$, onde avere la riduzione $T'P't$.

Allora poi si avrà $TP = \frac{t'' sen.\ m'}{t' sen.\ m''} \times T'P'$, e $TP' = \frac{t'' sen.\ m}{t sen.\ m''} \times T'P'$. Togliendo poi TA, $T''A$ si avranno le AP, $A''P''$, e perciò nel triangolo PAP'', in cui l'angolo PAP'' è uguale al moto totale m'' in longitudine, si avrà PP''. Quindi si avranno coll'ajuto delle latitudini PC, $P''C''$, $C''I = P''C'' - PC$ colla corda $CC'' = c$. Nel triangolo SPT co' lati dati ST, TP coll'angolo in T si troverà SP, e nello stesso modo SP''. Questi due lati con PC, $P''C''$, e cogli angoli in

P, P'' retti daranno i raggi SC, SC'', e perciò la somma $SC + SC'' = b$. Basterà qui confrontare il valore bc^2 col valore a, imperciocchè il valore $\frac{c^4}{12b}$ svanirà, come farà manifesto a chi ne faccia esperienza, per il valore della corda c troppo picciolo rispetto al valore b.

Distrutto l' errore col mezzo di alcune posizioni si troveranno tutti gli elementi dell' orbita parabolica, come nella Proposizione terza. Ho applicato questo metodo alle osservazioni de' giorni 3 Aprile, 7 Maggio, e 17 Luglio, che qui esibisco colle posizioni del sole.

	T.M.	Long. dell' Astro	lat. B	long. ☉	dist. ☉
Apr. 3	$9^h.19$	$2^s.24°.52',7$	o. 5'.38''	$0^s.14°.29',9$	1,00124
Mag. 7	8. 35	2. 26. 12,4	o. 8. 36	1. 17. 32, 7	1,01019
Lug. 17	15. 17	3. 0. 17,7	0.12. 10	3. 25. 43, 2	1,01612

Il tempo medio è per Parigi. Ho per altro tralasciato i secondi a causa del moto in uno ancora e più minuti insensibile. Nelle longitudini ho usato le sole decime parti de' minuti, perchè così non si trascurano se non se al più tre secondi, l' error de' quali in queste osservazioni corrisponde unicamente alla quinta parte di un secondo di tempo. Nelle latitudini, che più accuratamente si definiscono per le declinazioni non dipendenti dal tempo, ho ritenuto i secondi, e ciò molto più, perchè gli errori di esse, molto minori in sè, nuocono assai più riferiti ad esse cotanto picciole, qualora si cerca la posizione della linea de' nodi, e l' inclinazione, i quali due elementi perciò saranno molto meno certi.

Ho trovato i valori $a = 13,1101$, $TA = 14,8947$, $T''A = 15,4811$. Dopo poche posizioni, nelle quali molto tempo innanzi alla fine del calcolo osservai, che il valore della corda PP'' riferito alle distan-

ze, era per dare gli errori troppo grandi, posi $T'P' = 20$, ed avendo veduto, che le picciole differenze della posizione mi offerivano mutazioni smisurate nella grandezza dell'errore, assunsi le rette SP, SP'', PP'' per eguali alle rette SC, SC'', CC''. Il valore bc^2 mi riuscì 13, 6920, mentre $\frac{c^4}{12\,b}$ fosse minore di 0, 0001, e perciò da trascurarsi del tutto. Quindi l'errore fu $+$ 0, 5819. Posto 19, 8, riuscì l'errore — 2, 2049. Indi la nuova posizione dovette essere 19, 9584, la qual pur usata, l'errore fu depresso a 0, 0855. Per questi due ultimi errori trovai le mutazioni assai picciole delle rette TP, $T''P''$, PP'', SP, SP'' trovate in quest' ultima posizione. Queste poi corrette adoperai per trovare PC, $P''C''$, e coll' ajuto loro trovai tosto i primi due elementi, e così gli altri tutti col metodo esposto nella Proposizione terza. Può bensì essere che in tanti calcoli numerici mi siano sfuggiti degli errori in quest' età mia d' anni 71, avendogli fatti mentre villeggiava lungi dalla capitale, siccome ancora mi trovo, scrivendo queste cose, dove non ho veruno assistente ai calcoli. Nondimeno più volte ripetuti gli stessi calcoli, e corretti, mi pare di potermene fidare; e trasmessi poi questi elementi a Parigi, furono giudicati abbastanza congruenti con quelli, che ivi da altri furono ritrovati con altri metodi, e dopo fatte molte osservazioni.

Qui aggiungerò una cosa, che diminuita alquanto la distanza può ritrovarsi altra corda, che al problema soddisfaccia, in cui però l'Astro s'allontanerebbe dal sole, e dalla terra, e perciò molto tempo innanzi sarebbe egli stato visibile. Avendo da principio usate le osservazioni più vicine per la corda più vicina, col mio metodo comune alle orbite delle comete, trovai un' orbita, che restò tosto dalle seguenti osservazioni abbandonata, il che addivenne pur anche ad altri. Considerando

rando a fondo la cosa trovai avervi quattro corde, ciascuna delle quali soddisfarebbe, due prossime e due remotissime: escluse quelle, si dovette ricorrere a queste.

Proporrò qui infine dell'operetta gli elementi trovati per la parabola, e vi aggiugnerò la figura, (*Tav. annessa*), in cui è delineato ogni movimento di questo Astro, che si avrà per più anni eziandio dopo l'arrivo al perielio, se l'orbita di esso è parabolica. La specie dell'orbita si determinerà più accuratamente dopo molte combinazioni di quattro osservazioni, e ciò anche più accuratamente se ciascuno di questi luoghi si cavi per interpolazione da più osservazioni fatte in molti giorni, onde gli errori di esse si distruggano scambievolmente. Pel metodo parabolico potranno usarsi con maggior frutto, e con calcolo più facile i luoghi corrispondenti a tre mesi in circa, ma in eguali intervalli dal mezzo corrispondente alla stessa opposizione, intorno alla quale facilmente si osserverà l'Astro nel fine di quest'anno, e nel principio del seguente: imperciocchè allora il punto t cadrà nella retta $T'E'$ della *fig. 6*, cosicchè non sia d'uopo della riduzione della seconda longitudine; essendo poi eguali i tempi t, t', sarà $TP : T''P' ::$ sen. m': sen m, e perciò senz'aver alcun riguardo alla seconda distanza accorciata TP, si potrà la posizione fare per la sola TP, presa la quale, e fatto una volta il valore $\frac{\text{sen. } m}{\text{sen. } m'} = r$, sarà $TP' = r \times TP$, come proposi nella seconda di quelle mie operette stampate per ordine dell'*Accademia*; ed in vero si potrà pur anche, se piaccia, usare il metodo della prima operetta, che riduce il problema ad un'equazione di sesto grado. Ma quelle operette intendersi non possono interamente, se non si corregga l'erronea trasposizione delle tavole, che giunto in Francia trovai in quel sesto volume impresso a Parigi avanti la mia venuta: la tavola che ivi fu apposta dopo il fine della prima operetta

insieme colla terza apposta dopo il fine della seconda, devono essere la prima, e la seconda della seconda operetta; e le due prime apposte all' operetta seconda appartengono alla prima. Essendo le medesime operette moltissimo nello stesso volume distanti l' una dall' altra, e le pagine, ove debbono inserirsi da' legatori, non incontrandosi col fatto, nessuno a caso indovinerà i veri luoghi delle tavole, e perciò senza siffatto avvertimento quell' operette non possono essere di alcun uso.

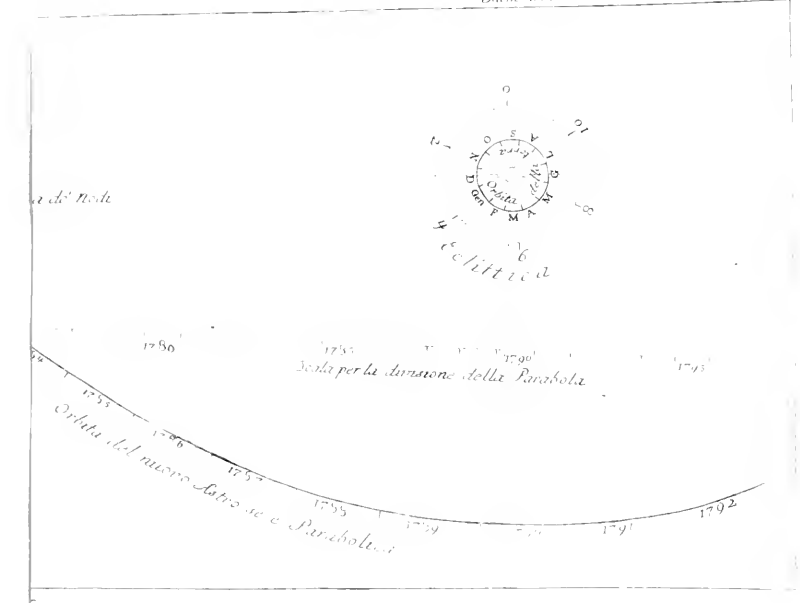
Se usar si debbano le osservazioni di due o tre anni, si dovrà far conto della curvatura, e dell' ineguale velocità, il che certamente per l' uno e l' altro metodo facilmente si otterrà, determinando l' effetto della gravità verso il sole relativamente alla distanza da esso prossimamente cognita, il quale effetto determina la posizione del punto dell' arco, in cui è l' Astro, dal punto della corda, da cui è divisa in ragione dei tempi. Qui presa la distanza = 10 trovai la riduzione della seconda longitudine indi nata non giugner neppure ad un secondo, come di sopra ho accennato.

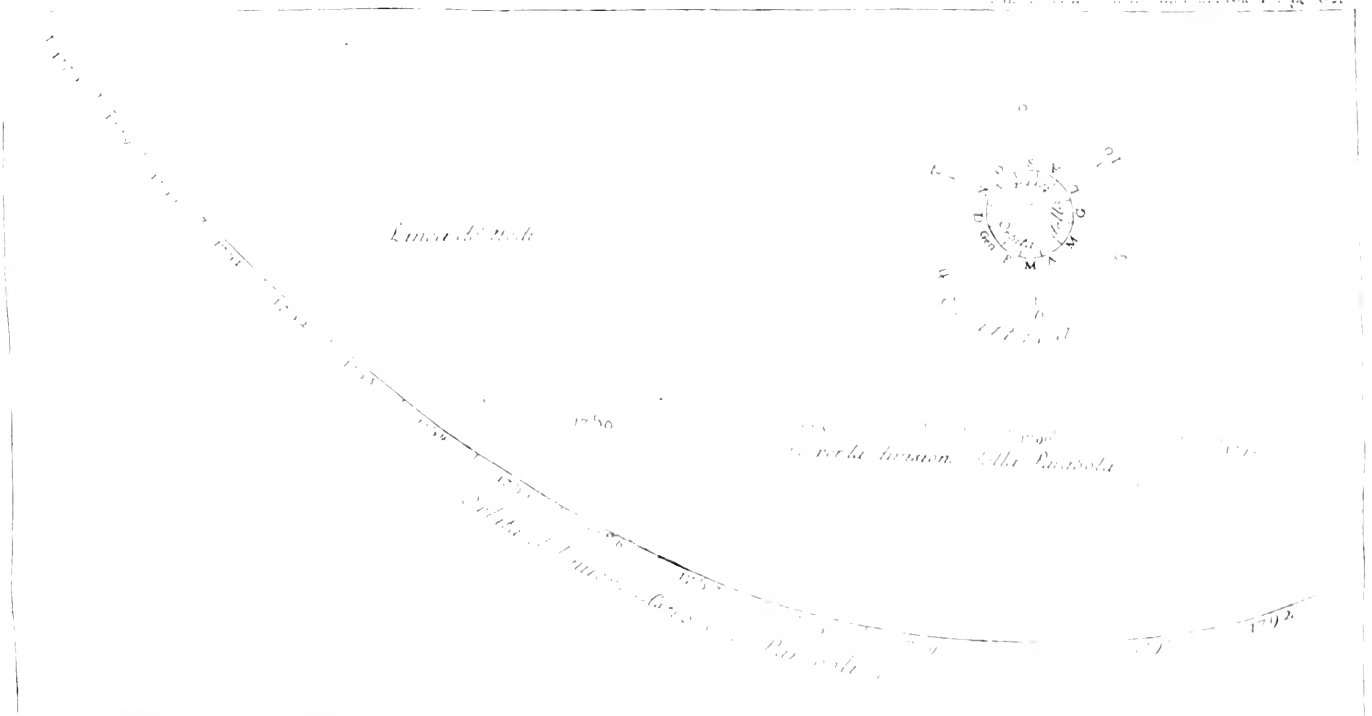
Elementi in suppoſizione dell' orbita parabolica.

Longitudine del nodo - - - - - - - -	2ˢ. 25°. 13, 3
Inclinazione - - - - - - - - - - - -	2. 17, 6
Luogo del perielio nell' orbita - - - -	5. 22. 16, 9
Distanza perielia - - - - - - - - - - -	10, 2756
Arrivo al perielio - - - - - - - - - -	13. Marzo 1790,

Moto diretto.

Mem. della Società Italiana Tomo I. Pag. 82





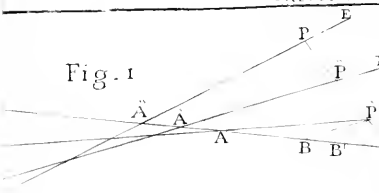


Fig. 1
E
P
P
E
A
A
A
P
E
B
B
P
E

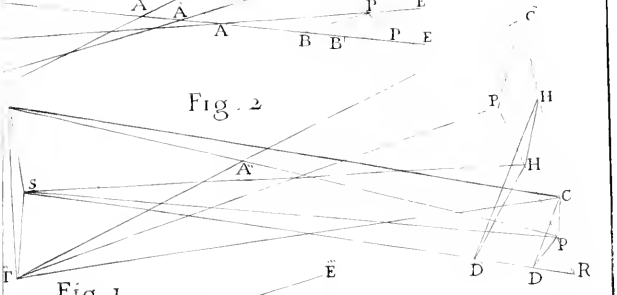


Fig. 2
C
P
H
H
A
S
C
P
T
D
D
R

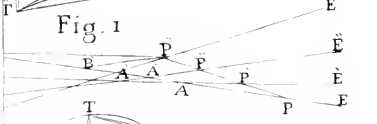


Fig. 1
E
P
E
B
A
A
P
P
E
A
P
E

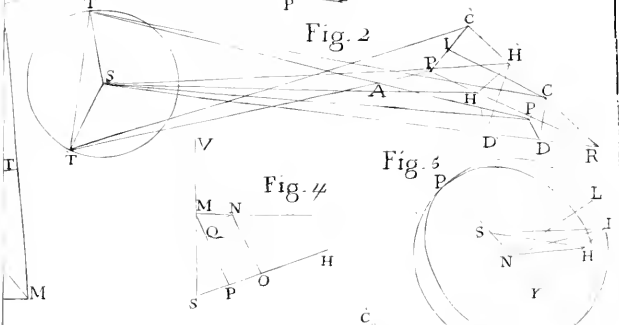

T
Fig. 2
C
P
H
S
A
H
C
P
T
D
D
R
V
T
M

Fig. 4
M
N
Q
H
S
P
O

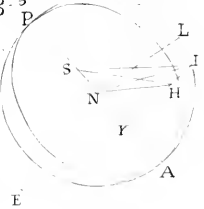


Fig. 5
P
L
I
S
N
H
Y
A

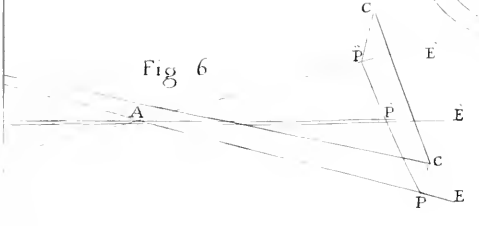


Fig 6
C
P
E
A
P
E
C
P
E

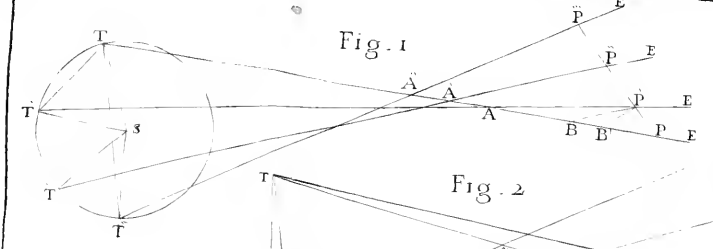


Fig. 1
T
T
T
T
s
A
A
A
B
B'
P
E
P
E
P
E
P
E

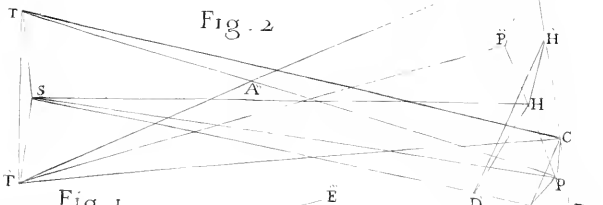


Fig. 2
T
T
s
A
C
P
H
H
C
P
D
D
R

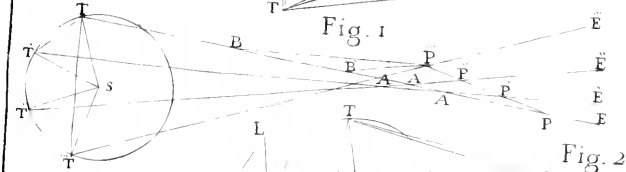


Fig. 1
T
T
T
s
B
E
A
A
P
P
A
P
P
E
E
E

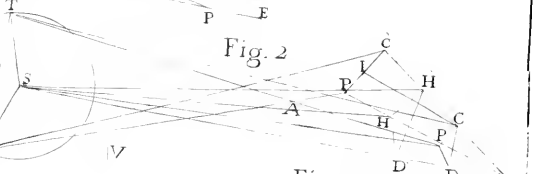


Fig. 2
T
T
s
A
C
I
P
H
H
C
P
D
D
R

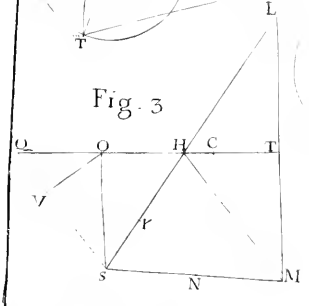


Fig. 3
L
Q
O
H
C
T
V
r
s
N
M

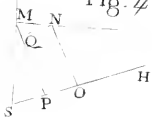


Fig. 4
M
N
Q
S
P
O
H

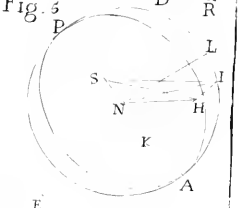


Fig. 5
P
L
S
I
N
H
r
A

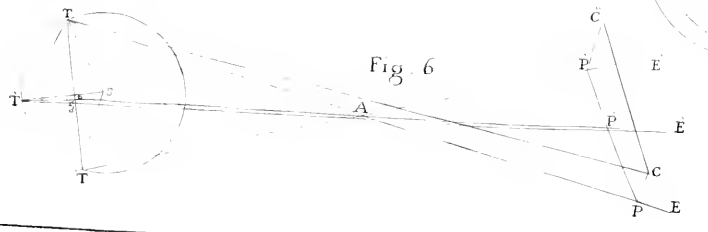


Fig. 6
T
T
s
A
C
P
E
P
E
P
E

RISULTATI

Di ſperienze ſopra l' elaſticità de' Fluidi Aeriformi permanenti ſul mercurio.

Del Sig. FELICE FONTANA Direttore del Gabinetto Fiſico del Gran Duca di Toſcana.

MI pareva, che foſſe una ricerca nuova ed importante per la fiſica moderna di conoſcere le leggi, con cui gli ſpazj occupati dalle arie fattizie erano diminuiti dai peſi comprimenti, e ſe le denſità di quei fluidi elaſtici erano proporzionali ai peſi comprimenti, come lo ſono nell' aria atmoſferica.

Per maggior facilità io ho penſato di far le mie eſperienze nella macchina da comprimer l' aria, ed ho paragonato gli ſpazj occupati dalle arie artificiali a quelli dell' aria comune, che mi ſervì ſempre di termine di paragone. Ho fatto uſo di due cilindri di criſtallo alti 10 pollici e larghi mezzo pollice ben calibrati per tutto, e ne' quali il pollice era diviſo in 20 parti.

La quantità delle arie introdotte era coſtante, ed occupava nei tubi otto pollici in altezza. In uno dei due tubi laſciai per tutto il tempo delle mie ſperienze l' iſteſſa quantità, e qualità di aria comune, cioè otto pollici in altezza. I due tubi erano ſituati dentro di una tazza, ed immerſi in parte nel mercurio l' uno a canto dell' altro in modo che era facile oſſervare gli ſpazj occupati dalle arie attraverſo il groſſo recipiente della macchina di compreſſione. Oſſervava, che il calore foſſe ſempre il medeſimo, e paragonava le diminuzioni del-

le arie fattizie con quelle dell' aria comune tutte le volte che queſte erano ridotte a quattro pollici, a due poll., ad un poll.

I.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Deflogiſticata di $\frac{1}{59}$.

II.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Flogiſticata di $\frac{1}{100}$.

III.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Infiammabile di $\frac{1}{60}$.

IV.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Nitroſa di $\frac{1}{100}$.

V.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Fiſſa di $\frac{1}{60}$.

VI.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Vitriolica di $\frac{1}{32}$.

VII.

L' aria comune fu trovata egualmente compreſſibile dell' aria acida Marina.

VIII.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Alcalina di $\frac{1}{57}$.

IX.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' *aria Regia* dello ſtagno di $\frac{1}{100}$.

X.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Spatoſa di $\frac{1}{30}$.

XI.

L' aria comune fu trovata egualmente compreſſibile dell' aria Arſenicale.

XII.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Epatica di $\frac{1}{45}$.

Il Cavalier *Newton* ha dimoſtrato che ſe le particelle d' un corpo ſi reſpingono con forze reciprocamente proporzionali alle loro diſtanze, comporranno un fluido, la denſità del quale ſarà proporzionale ai peſi comprimenti. Molti Fiſici hanno dedotto da quella verità matematica, che l'aria doveſſe la ſua elaſticità e natura ad una tal forza.

Qui abbiamo dodici fluidi o arie oltre l' aria comune, in cui ſi verifica la legge fiſſata dal *Newton*, giacchè le minime differenze trovate da noi coll' eſperienza ſono traſcurabili, nè l' aria comune ſteſſa ſegue a rigore quella legge, e queſte dodici arie ſon ben lontane dal formare un fluido elaſtico ſimile all' aria comune, che anzi ſono tutte dodici di una natura affatto differente fra loro, e differente dall' aria comune. Il teorema del *Newton* ſerve a provar ſolamente, che le noſtre arie fattizie convengono bensì coll' aria comune nella elaſticità, oſſia che quella forza ideale di repulſione è ſufficiente a rappreſentare i fenomeni delle elaſticità delle arie, ma non prova per queſto che eſiſta realmente ne' corpi, e che quei fluidi ſieno della medeſima natura ed indole dell' aria comune. Io ho ancor trovato per eſperienza, che gli ſteſſi fluidi aeriformi di ſopra ſi dilatano nel vuoto della ſteſſa quantità, di cui ſi ſono condenſati nel pieno, o nell' aria compreſſa.

Deve bensì parer ſingolare, che tanti fluidi, e sì diverſi fra di loro oſſervino una medeſima legge di dilatazione e di riſtringimento; il che ſarebbe credere che vi è una forza fiſica in natura, un principio non an-

cora noto agli Oſſervatori, per cui le particelle dei corpi nel momento, che diventano elaſtiche fra di loro, e permanenti ſul mercurio, ſono allontanate e reſpinte con quelle date leggi, che ſi ſono vedute; e queſta forza pare unica e ſempre l' iſteſſa, giacchè produce i medeſimi effetti ſopra tante ſoſtanze diverſe, e li produce coſtantemente in tutti i luoghi, ed in tutti i tempi.

Un' altra verità par che ſi poſſa dedurre, ed è, che l' elaſticità non è una forza eſſenziale, non è una forza intrinſeca dell' aria atmosferica, giacchè ſi vede che quella ſteſſa forza è comune a tanti altri fluidi aeriformi, che ſono sì differenti fra di loro.

Reſterebbe da eſaminare ſe quel medeſimo principio, che rende elaſtici tanti fluidi aeriformi, è ancora la cagione dell' elaſticità di tutti gli altri corpi anche ſolidi, che ſarebbe una ſcoperta importante per la fiſica generale, e di una gran ſemplicità. Alcune ſperienze fatte ſopra l' avorio, il vetro, e l' acciajo mi fanno ſoſpettare, che l' elaſticità di quei corpi è ſoggetta alle medeſime leggi, onde che il principio foſſe ancora l' iſteſſo, e la differente elaſticità nei diverſi corpi poteſſe derivare dai diverſi contatti delle molecole componenti. Ma molto mi reſta ancora per aſſicurarmi della vera natura di queſto principio generale, e come renda elaſtici i corpi, benchè molte ſperienze da me fatte mi luſinghino, che la ricerca non è affatto impoſſibile.

Conviene, che io dica qualche coſa ſopra l' aria, che ho chiamato *Regia*, e della quale poche perſone poſſon intender coſa ſia, e quali ne ſono le principali proprietà. Io trovai il modo di far queſt' aria nel 1778 in Londra, e la cavai dallo ſtagno per mezzo dell' acqua regia.

Nel medeſimo tempo trovai un' altra aria cavata parimente coll' acqua regia, la quale ſi ottiene tanto dalla

platina, che dall'oro, e che chiamai fin d'allora aria della *Platina*. Queſta ſeconda aria ſi ottiene quando la diſſoluzione della platina, o dell'oro comincia a proſciugarſi. Hanno tutte due queſte arie delle proprietà ſingolari, che farò conoſcere nella mia opera *ſulle Arie in generale*. Non ho fiſſato nè il peſo, nè l'elaſticità dell'aria della platina, e dell'aria dell'oro per le ragioni che ſaranno dette allora. Il Signor *Fabroni* ha bensì parlato di queſte due nuove mie arie nelle note al *Cronſted*, che ſi doveva pubblicare in Londra ſino dal 1779, e che depoſitò manoſcritte nelle mani del noſtro comune e riſpettabile amico il Sig. *Kirwan*.

Nella mia opera *ſulle arie* da pubblicarſi io eſaminerò coll'eſperienza alla mano le proprietà ſingolari di queſte due nuove arie; e farò molte altre ricerche relative alle altre arie in generale, e ſpecialmente ſe le dilatazioni di eſſe ſieno proporzionali alle differenze del calore, e quanto ne deviino. Queſti eſperimenti ſono molto delicati, ed eſigono moltiſſime avvertenze nel farli. Ho ancora voluto fiſſare le leggi delle dilatazioni dei fluidi aeriformi eſpoſti al medeſimo grado di calore, ed ho ottenuto de' riſultati, che non ſono gran fatto uniformi a quelli pubblicati negli Atti di Berlino l'anno paſſato dal chiariſſimo Signor *Achard*; la medeſima diſcrepanza e maggiore io ritrovo nelle gravità delle diverſe arie pubblicate dal medeſimo Sig. *Achard*, nè io poſſo ſoſpettare alcun errore nel metodo da me praticato. Nell'opera del Signor *Kirwan* pubblicata nelle Tranſazioni di Londra l'anno paſſato *ſopra la quantità delle molecole acide, che ſi trovano negli acidi ordinarj*, ſi leggono i riſultati delle mie ſperienze fatte a Londra nel 1778 ſopra i peſi delle arie naturali, ed artificiali, e queſti eſperimenti ſaranno di nuovo ripetuti da me nella mia opera citata di ſopra, acciocchè i peſi ſieno determinati anche con maggior preciſione.

PRINCIPJ GENERALI

Della ſolidità, e della fluidità de' Corpi.

Del Sig. Felice Fontana Direttore del Gabinetto Fiſico del Gran Duca di Toſcana.

I.

Qualunque particella di materia tende ad accoſtarſi a qualunque altra per il principio d' attrazione, e da queſta forza riſultano i corpi ſolidi.

II.

Se nella natura non regnaſſe che queſta ſola forza, tutto ſarebbe ſolido, ed immobile.

III.

Se vi ſono de' corpi fluidi non vi poſſono eſſere che per un altro principio, o forza oppoſta alla prima, che li rende tali, onde ſe la prima forza tende ad accoſtare le particelle della materia, l' altra deve neceſſariamente allontanarle.

IV.

Tutti i corpi fluidi diventan ſolidi nel freddo, e il freddo naturale della Siberia rende ſolido il mercurio medeſimo.

V.

Tutti i corpi ſolidi diventan fluidi nel caldo, il quale può aumentarſi a ſegno, che ſi riſolvano fino in vapori inviſibili; onde la materia del calore qualunque ella ſia, e comunque ſi poſſa trovar modificata nelle diverſe circoſtanze de' diverſi corpi, è il ſecondo principio attivo, che regna nella natura, e ſarà chiamato Forza Eſpanſiva, perchè tende ad allontanare da sè le parti componenti dei corpi.

VI.

I fluidi anche i più peſanti, tolte e ſcemate le reſiſtenze eſterne, ſi diſſipano in un momento, come ſi vede in una goccia d'acqua, e fin di mercurio meſſe nel vuoto. Dunque la forza eſpanſiva, che è in eſſi, è in una continua azione, o *niſo*, ed è maggiore della forza d'attrazione, che tenderebbe a conſolidarli.

VII.

La forza eſpanſiva ne' fluidi non è inferiore alla forza di gravità di eſſi fluidi, giacchè col ſolo ſcemarne la preſſione eſterna ſopra di eſſi, i fluidi ſi diſſipano in vapori, e ſorton dai corpi in cui ſi trovano.

VIII.

L'aria comune, l'aria fiſſa, le ſoſtanze ſpiritoſe e meno peſanti, meſſe in altre più peſanti (come per eſempio l'acqua), l'aria medeſima aſſorbita dal carbone, potranno ſortire dai fluidi, e dai corpi in cui ſi trovano, non perchè ſieno elaſtiche dentro quelle ſoſtanze, ma bensì perchè, ſcemata la preſſione eſterna,

la forza espansiva prevale alla gravità, e le spinge, e urta, e caccia da essi in tutte le direzioni.

IX.

La fluidità ne' corpi può considerarsi come uno stato accidentale di essi, giacchè si arriva dal filosofo a torla in tutti fuorchè nell'aria, che per analogia non può essere eccettuata dagli altri fluidi, benchè il grado di freddo per tal effetto debba esser molto maggiore che negli altri.

X.

Questa forza espansiva comune ai fluidi e ai solidi può essere una delle principali e primitive cagioni delle ordinarie evaporazioni, e produrre fino le evaporazioni de' corpi solidi staccando e sollevando le impercettibili molecole di essi, giacchè una molecola quasi isolata può considerarsi benissimo come dominata dalla forza espansiva.

XI.

In questa maniera si vede che nei fluidi si debbono considerare due forze, l'una di gravità, l'altra d'espansione; e da questi due principj bisogna partire per render ragione delle qualità, o leggi che si osservano in essi.

XII.

I fluidi non elastici, come l'acqua, il mercurio.... non sono sensibilmente compressibili, almeno cogli ordinarj metodi, che si praticano: sono essi egualmente incompressibili anche allora che sono penetrati dal ca-

lore, e ſi ſa che ſi dilatano ſenſibilmente col creſcer ſenſibilmente il calore.

XIII.

Si può ſpiegare il ſingolar ſenomeno della incompreſſibilità dei fluidi non elaſtici, e dilatati dal calore ſenza ſupporre una forza infinita nella materia del calore paragonata colle preſſioni eſterne. La ſola variazione de' contatti, e de' ſiti delle molecole incompreſſibili baſta a tutto. Queſte molecole potendo occupare per il calore introdotto degli ſpazj maggiori di prima, e nel tempo ſteſſo trovarſi in contatti continuati potranno reſiſtere a tutte le preſſioni eſterne, le quali preſſioni non avranno alcuna azione contro della materia del calore. Per iſpazj maggiori non altro intendo che un minor numero di molecole, che ſi trovano in uno ſpazio medeſimo.

XIV.

La forza de' vapori proviene da una gran quantità della materia del calore, che ſi uniſce ad eſſi in quello ſtato. Si è ſcoperto in queſt'ultimo tempo, che la materia del calore, che è in tutti i corpi, non vi è diſtribuita, nè in ragione de' volumi, nè della quantità di materia, ma ſecondo l' indole e natura diverſa dei diverſi corpi. Si è trovato ancora, che i corpi nel paſſare dallo ſtato di fluidi a quello di ſolidi perdono una grandiſſima quantità di calore, e che per l'oppoſto ne acquiſtano altrettanta quando dallo ſtato di ſolidi ritornano in fluidi. L'acqua per eſempio perde 58 gradi di calore nell'atto che ſi diaccia, e ne acquiſta il diaccio 58 nell' atto che ritorna acqua: così mille altre ſperienze hanno fatto vedere, che i corpi contengono una grandiſſima quantità di materia

del calore, e questo calore è preso da quelle minime molecole nell' atto, che diventano vapori, e lo perdono quando ritornano a formare i corpi di prima. Non si ignorano le forze de' fluidi, che si riducono in vapori, e si sa quel che possono poche gocciole di acqua, o di mercurio rinserrato, a cui nulla par che possa resistere; nè si ignora la forza prodigiosa del calore, che urta, e impelle tutti i corpi per tutte le direzioni, talchè non è più sorprendente che nell' atto di unirsi la materia attivissima del calore in sì gran quantità ai vapori, e nell' unirvisi nell' istante come fa, i vapori vincano tutti gli ostacoli più forti.

XV.

I vapori sono facilmente compressibili, ossia i fluidi incompressibili ridotti in vapori si comprimono facilmente. Tutte le sperienze ci assicurano di questa verità, e basta applicare al vapore una forza maggiore di quella, ch' egli ha di espandersi, per ridurlo sotto un volume minore.

XVI.

Si è detto perchè i fluidi sieno incompressibili, benchè penetrati più o meno dal calore. Questa causa non può aver luogo per nessun conto nei vapori, perchè si può provar facilmente, che le molecole di questi non si toccano per nessun modo a differenza di quelle de' fluidi; e si può fino provare che vi è tal vapore, in cui le particelle sono delle centinaja di migliaja di volte più lontane, che in altri. L'acqua ridotta in vapore può occupare uno spazio 20000 volte maggiore di prima. Non è adunque straordinario, che i vapori si possano comprimere, giacchè non si ha da vincere in essi, che la sola forza sfiancante del calore.

Di qui si vede quanto sia precaria l'ipotesi di quei filosofi, i quali hanno immaginato una forza di *repulsione* nelle molecole de' vapori, solo perchè non sapevano spiegare altrimenti gli effetti di essi vapori. Costa poco al matematico l'immaginarsi delle forze in rapporto dei fenomeni medesimi, e di figurarsi che le une comincino ad operare dove le altre finiscono, e che passino da repulsive in attrattive, e da attrattive in repulsive secondo i bisogni. Ma prima d'ogni altro bisogna provare che tali forze veramente esistano in quelle date circostanze, e casi, e che sieno in un rapporto esatto cogli effetti che vogliamo spiegare. La forza adunque de' fluidi ridotti in vapore, come l'acqua, il mercurio..,.. deriva dalla materia del calore, che è assorbita da essi in quello stato, e non già dalla forza di repulsione per cangiate distanze di quelle impercettibili molecole. Cresce ne' vapori la forza all'aumentarsi del calore, e nel momento in cui cessa il calore corrono a ricomporre il corpo fluido di prima.

XVII.

Noi abbiamo esaminato i corpi solidi, i corpi fluidi, e i corpi sotto forma vaporosa, e si è cercato di accennar le cagioni dei loro differenti stati. Ora ci rimane di esaminare un' altra sorta di fluidi, che meritano una distinzione particolare, che forma in oggi uno de' più vasti rami della fisica delle arie, e delle operazioni chimiche più dilicate. Queste sostanze si presentano sotto forma di aria elastica, trasparente, compressibile, che il freddo e il caldo restringe e dilata, ma che non riducono a formare il fluido di prima.

XVIII.

Queſti fluidi aeriformi ſi poſſono ridurre a tre claſſi principali, che hanno la proprietà comune di eſſer permanenti ſul mercurio, ma non già quando ſono a contatto dell' acqua, o di altre ſoſtanze fluide. Altri ſono aſſorbibili per intiero dall' acqua, altri ſolo in parte, ed altri non lo ſono punto. I primi ſono l' aria acida marina, l' aria acida vitriolica, l' aria alcalina, l' aria ſpatoſa, e queſti formano la prima claſſe. Nella ſeconda claſſe mettiamo l'aria fiſſa, che non è aſſorbita dall' acqua, che del ſuo proprio volume. Nella terza ſi dovrà collocare l'aria nitroſa, l'aria infiammabile, l'aria puriſſima, e l' aria detta flogiſticata.

Conviene però riflettere, che queſti fluidi aeriformi per rapporto alla ſorbibilità coll' acqua non differiſcono, che dal più al meno; perchè ho provato per eſperienza, che anche i non aſſorbibili ſono più o meno aſſorbiti, ſe ſi mettono in contatto dell' acqua privata della ſua aria naturale; ed ho fino trovato con particolari eſperienze, che ſono aſſorbiti beniſſimo, ſe ſi tengono lungo tempo a contatto dell' acqua benchè ſaturata della ſua aria naturale.

XIX.

Si è veduto che il calore riduce in vapori i fluidi, ma ſi è ancor veduto che appena ceſſato il calore ritornano i vapori a formare i fluidi di prima. Vi è adunque qualche altro principio oltre il calore, che rende permanenti nel freddo i fluidi aeriformi. Non è difficile di provare che queſto principio è ciò, che i chimici chiamano flogiſto, e che mille fenomeni di compoſizioni e decompoſizioni di corpi ne dimoſtrano coll' ultima evidenza le ſue proprietà, e l'eſiſtenza.

XX.

Si può dimoſtrare, che le arie della prima claſſe contengono di quel principio, e che quanto più ne hanno diventano tanto meno aſſorbibili all' acqua, ma non ſono però ſaturate del tutto da eſſo, e conſervano ancora una parte della loro natura primitiva. La ſola aria nitroſa ſi può conſiderare per ſaturata dal flogiſto, cioè per l' acido nitroſo ſaturato da eſſo, giacchè non dimoſtra punto la ſua natura acida in quello ſtato, ſuorchè nelle circoſtanze da me pubblicate nella mia opera ſull' *aria nitroſa*; e perchè l' aria nitroſa è ſaturata bene dal flogiſto, non è aſſorbibile dall'acqua. Laddove tutti gli altri mantengono ancora in parte almeno le loro primitive qualità, per cui hanno più attrazione coll' acqua che col flogiſto, onde quando ſono a contatto di eſſa ritornano fluidi come prima.

XXI.

L' aria fiſſa contiene del flogiſto ed un acido ſottiliſſimo e debole, e perciò è aſſorbita dall' acqua meno delle arie della prima claſſe, e più di quelle della terza.

XXII.

L' aria nitroſa è compoſta di flogiſto, e di acido nitroſo ſaturato perfettamente; onde s' intende ſubito perchè non ſia aſſorbita dall' acqua. Le altre arie di queſta ultima claſſe non ſono ancora ben conoſciute, onde poco o nulla ſi potrà pronunziare ſopra di eſſe.

XXIII.

L' aria infiammabile ha ſicuramente il flogiſto per uno de' ſuoi componenti, ma nulla ſi può dire degli altri

altri componenti, che pur deve avere. L' aria infiammabile non s' infiamma mai sola, anzi spegne i lumi, e fino il carbone acceso; ma s' infiamma, e arde se è mescolata coll' aria comune. Conviene adunque considerarla per una sostanza combustibile come tutte le altre, ma più pura e più semplice della fiamma ordinaria degli altri corpi combustibili, che non ardono mai nè anco essi senza l' aria respirabile, o nel vuoto; nè forse altro arde, e s' infiamma ne' corpi, che l' infiammabile, o i componenti di essa aria, che si trovano dentro i corpi combustibili. La gran leggerezza dell' aria infiammabile farebbe credere, che fosse composta di qualche principio sottilissimo, ed asciutto, il quale non avesse alcuna affinità, o pochissima coll' acqua, ma che fosse incorporato bene col flogisto, talchè s' intenderebbe subito allora, perchè non è assorbibile dall' acqua. Ma non è facile d' immaginare tali esperienze, che ci decompongano quell' aria, e per cui si possa giudicare della natura de' suoi componenti. Ho intrapreso altre volte un simile travaglio, ma sono ancor lontano da poter pronunziare con sicurezza. Si cava comunemente cogli acidi, ma si può cavare ancora colle sostanze alcaline, e fino col solo fuoco dai metalli. Si dimostra che non esiste in essi sotto forma d' aria, perchè non si cava dal ferro coll' acido nitroso.

XXIV.

Il fuoco o la fiamma non è una pura operazione meccanica, come la maggior parte de' filosofi ha creduto fino a questi ultimi tempi. L' ostinazione di non volere usare nella spiegazione de' fenomeni naturali, che de' principj dedotti dalle più semplici leggi del moto, e degli urti conosciuti fra corpo e corpo, ha ritardato di quasi un secolo i progressi della fisica. Ma da poco in qua felicemente questa scienza ha ricevuto un' esten-

ſione, di cui non pareva nè anco capace, e queſta ſi deve alla ſola chimica, per cui due ſommi uomini meritano la più grande ſtima dalla poſterità i Sigg. *Bergman*, e *Scheele*.

La fiamma, o il corpo che brucia, è in uno ſtato di nuove decompoſizioni, e di nuove combinazioni, le quali variano all' infinito al variare della natura, e componenti dei corpi combuſtibili. Non ſi dà mai fiamma ſenz' aria, nè vi è altra aria per la fiamma, che l' aria reſpirabile. Da queſte moltiplici decompoſizioni ſi ſchiude la materia del calore; ed è molto veriſimile, che ſi ſchiuda allora, o ſi precipiti la materia, che forma la luce, la qual luce ſi diffonda rapidamente per tutto all' intorno, e renda viſibili i corpi. La luce terreſtre, o de' corpi combuſtibili è molto analoga alla luce ſolare, e rendono l' una e l' altra viſibili i corpi ſenza biſogno d' aria.

XXV.

La fiamma è adunque per me una operazione tutta chimica, in cui ſi fanno continuamente delle decompoſizioni, e compoſizioni fra l' aria pura dell' atmoſfera, ed il flogiſto de' corpi combuſtibili. Nell' incontro delle materie combuſtibili coll' aria ſeguono mille modificazioni nuove relative alla diverſa natura de' corpi.

Per modificazione di ſoſtanze, e di corpi io non voglio altro intendere, che ſemplici decompoſizioni di corpi più compoſti, e compoſizioni di altri più ſemplici, non conoſcendo alcuna eſperienza, o fatto ſicuro e luminoſo nella fiſica, nè in tutta la chimica, che un corpo abbia propriamente cangiato la ſua natura di prima in un' altra eſſenzialmente diverſa. Tali metamorfoſi ſi ſuppongono, è vero, continuamente da' filoſofi, che non hanno eſaminato come conveniva le genuine proprietà de' corpi, e che hanno preſo o un cangia-

mento apparente e accidentale de' corpi per un cangiamento della natura medesima del corpo, o quel che è peggio abusando della parola *cangiamento* hanno confuso i cangiamenti nati per diminuiti o accresciuti principj colla cangiata natura del corpo medesimo. All'uomo non è ancor dato, che scomporre un certo limitato numero di corpi composti in altri più semplici, e di ricomporne di nuovo un numero ancor minore de' primi; ed in questo il filosofo non fa altro, che secondar la natura, che tende a render più semplice il più composto, e più composto il più semplice.

XXVI.

La materia elettrica non è certamente un principio semplice, come una gran parte de' fisici ha creduto, ma è una vera fiamma, o sostanza in combustione. Si vede in fatti, che è sempre accompagnata da un forte odore, quasi direi di fosforo, e di zolfo. Si fa che si spegne nel vuoto perfetto, come si spengono tutte le altre fiamme, o corpi in combustione; non s' ignora più, che diminuisce le arie respirabili, come lo fanno tutte le arie flogistiche, e la fiamma stessa; tinge in rosso il tornasole, e precipita la calce in terra calcare, e cristalizza i sali caustici vegetabili quando si fa passare attraverso l' aria dentro cannelli di vetro anche col mezzo di conduttori d' argento purissimo. La luce dell' elettricità è poi in tutto simile a quella di tutte le altre fiamme, e rende anch' essa visibili i corpi senza bisogno d' aria, come lo fa ancora la luce solare. I tre risultati del tornasole, della calce, e de' sali caustici non si osservano mai facendo uso di aria flogisticata, e cessano nell' aria comune subito che ha acquistata la natura di aria flogisticata. Produce adunque l' elettricità sull' aria comune tutti quei medesimi effetti, che produce il flogisto ossia la fiamma attuale.

Ad un principio di vera fiamma io ho ancora riportato, fin da quando era in Londra, la luce che si osserva ne' fosfori; ed ho dato fin d' allora delle prove dirette di questa mia opinione, come si può leggere nelle opere pubblicate in quella città dai Signori *Wilson*, e *Kirwan*. In questa maniera non solo la elettricità, ma ancora le altre sostanze lucenti, come i fosfori, sarebbono ridotte ad un medesimo principio; talchè la famiglia de' corpi combustibili, ed infiammabili comprenderebbe un più gran numero di sostanze di prima. Si fa alla fine, che gli sforzi de' filosofi, e ciò che si chiama scienza de' corpi, non ad altro si riduce, che a generalizzare i fenomeni.

XXVII.

Ci resterebbe da esaminare l'aria pura detta ancora deflogisticata, che l'acqua non assorbe, ma della vera natura, e de' componenti di quest' aria non se ne fa motto, benchè se ne conoscano le proprietà principali, che la distinguono facilmente da tutte le altre arie.

Altri la credono pregnissima di flogisto, ed altri affatto priva di esso. Se non vi sono prove certe, che la dimostrano affatto priva di flogisto, molto meno ve ne sono, che la facciano credere ricca di quel principio. E' vero, che l'acqua non l'assorbe, ma oltrechè la più piccola quantità di flogisto potrebbe forse bastare a far tutto questo, l'altro suo componente, quando sia composta, potrebbe non avere alcuna attrazione coll' acqua, e non lasciarsi sciorre da essa. Tutto bensì concorre a far credere, che nell'aria deflogisticata si trovi una grandissima quantità di fuoco, ossia della materia del calore, la quale unita agli altri componenti di essa aria rende ogni cosa inassorbibile all' acqua. Quest' aria avida di flogisto lo attrarrà da tutti que' corpi dove esso si trova, quando essi vi ab-

biano una minore affinità. Di qui si può spiegare, perchè decomponga l'aria nitrosa, e non l'aria infiammabile; basta che il flogisto prima vi sia unito con minor forza.

XXVIII.

L'aria detta flogisticata è ancor essa poco conosciuta, e molti la considerano per aria saturata dal flogisto, ed altri per povera molto di quel principio. Ella ha delle qualità molto diverse dall'aria infiammabile, perchè non s'infiamma nè anco allora, ch'è unita all'aria pura, e può fino spegnere i lumi. Nulla si può pronunciare della sua natura, e de' suoi componenti, e pare che sfugga qualunque analisi, o decomposizione.

XXIX.

Si è veduto che l'aria infiammabile è composta di flogisto, e che chiusa nelle bocce di cristallo d'Inghilterra rivivifica il vetro di piombo. Ma nulla di tutto questo fanno le due arie di sopra, cioè la deflogisticata, e la flogisticata, talchè nessun segno certo di esistenza di flogisto si può avere da esse, benchè poi sia vero che differiscono essenzialmente fra di loro quelle due arie, mantenendo una la vita e la fiamma, quando l'altra fa tutto l'opposto. La prima si lascia diminuire da tutti i processi flogistici, e l'altra da nessuno di essi, eccettuato il carbone spento nel mercurio, e raffreddato, che le diminuisce tutte, e distrugge.

XXX.

Finisco con una riflessione generale sull'elasticità dei fluidi Aeriformi, e le sue conseguenze. L'elasticità ne' fluidi permanenti diminuisce in ragione inversa degli

ſpazj occupati, oſſia la forza elaſtica in eſſi diventa tanto minore, quanto è maggiore lo ſpazio occupato da eſſi fluidi,

Non ſi vede chi potrebbe limitare queſta forza eſpanſiva dei fluidi aeriformi ſe non vi foſſe l'attrazione terreſtre, che agiſce ſopra ogni molecola più minima de' corpi, per cui tendono perpetuamente verſo la terra. L'aria atmoſferica per eſempio potrebbe beniſſimo eſtenderſi fino alla luna, e riempiere gli ſpazj celeſti, ma l'attrazione ne fiſſa il limite, il quale deve trovarſi dove le molecole dell'aria ſono attratte dalla terra con tanta forza con quanta tendono in virtù della loro a diſcoſtarſi fra di loro, e ad eſpanderſi.

Il calcolo potrebbe facilmente determinare queſto limite nelle due ipoteſi fatte da noi, e il problema potrebbe eſſere ſuſcettibile di qualche preciſione fiſica. Si potrebbe ancora tener conto della forza centrifuga cagionata dalla rotazione della terra nelle particelle dell'aria: il calore non può alterare ſenſibilmente le leggi della elaſticità, perchè è minimo ed uniforme alle più grandi diſtanze, nè i vapori arrivano mai così in alto.

La forza eſpanſiva dell'aria comune va conſiderata come una forza, che non ceſſa mai affatto, benchè diminuiſca rapidamente, come ſi è detto. Si potrà adunque conſiderare come minima, o infinitamente piccola nelle maſſime dilatazioni dell'aria. Nell'ipoteſi che le molecole dell'aria non foſſero attratte dalla terra, l'atmoſfera non potrebbe eſercitare alcuna preſſione ſenſibile ſopra i corpi, che ſono ſulla ſuperficie della terra medeſima; talchè l'aria in quanto elaſtica neſſun effetto ſenſibile potrebbe produrre contro i corpi ſottopoſti. Ma nel momento che ſi vorrà ſupporre, che l'aria ſia attratta dalla terra, come lo è infatti, ogni ſtrato minimo d'aria peſerà ſull'altro, che le è ſotto, talchè gli ſtrati più baſſi ſaranno i più premuti, e i più ela-

ſtici, e l'elaſticità e la gravità ſaranno nel medeſimo rapporto.

E' adunque la gravità dell'aria e non la ſua elaſticità la primitiva cagione, per cui l'atmosfera ha un limite, e per cui preme ſopra la ſuperficie della terra; nella ſteſſa maniera che una ſerie di elaſtri collocati gli uni ſopra degli altri premerebbono contro i corpi ſottopoſti in ragione del loro numero, e per la ſola forza del loro peſo, benchè poi foſſe vero, che la loro elaſticità ſarebbe in proporzione dei loro medeſimi peſi.

Non è ora più difficile di vedere quel che ſarebbe il calore, o qualunque altro agente, che s' inſinuaſſe fra queſti elaſtri, e come ſi devono ſpiegare le alterazioni accidentali cagionate nell'atmoſfera.

ARTICOLO

Di Lettera ſcritta DAL MEDESIMO al Fratello Pubblico Profeſſore di Matematica nell'Univerſità di Pavia.

Sopra la Luce, la Fiamma, il Calore, e il Flogiſto.

FInisco col mandarvi alcuni miei penſieri, relativi alla luce, alla fiamma, al calore, ed al flogiſto, che i filoſofi confondono più, o meno, e modificano, ſeguendo ciaſcuno le idee che ſen'è formate, e le ipoteſi che ha abbracciato.

Io ho voluto qui conſiderare que' quattro agenti, come ſoſtanze diverſe tra di loro; e finchè il fiſico ſperimentatore non arriverà a dimoſtrare la loro vera compoſizione, e natura, ſon di parere che ſi debbano valutare per differenti fra loro, e per ſemplici nel tempo medeſimo. Non già, perchè ſia impoſſibile che la coſa ſia anco diverſamente; ma perchè non è permeſſo di fingere delle compoſizioni, dove non ſi veggono, nè delle modificazioni ſemplici, dove gli effetti ſono diverſi, e ſpeſſo oppoſti.

Queſta diverſità di effetti è quella principalmente, che mi ha fatto conſiderar quelle ſoſtanze per diverſe tra loro, appoggiato al principio ricevuto, e certo nella fiſica, che ſe gli effetti ſono diverſi, diverſe devono eſſere anco le cauſe, quando non coſti del contrario. Io non farò, che accennare le principali qualità di quegli eſſeri.

LUCE

LUCE.

I.

La luce ſolare fa ſchiudere dalle piante meſſe nell'acqua aria puriſſima, detta deflogiſticata.

II.

La luce ſolare, anche allora che è privata di calore, cioè, che ſi fa agire come ſola luce, ſchiude dalle piante la medeſima aria puriſſima.

III.

La luce ſolare paſſa in iſtante attraverſo le lamine di vetro, e nell'iſtante riſcalda i corpi meſſi dietro ad eſſe.

IV.

La luce ſolare non fa detuonare il nitro, non produce l'acido zolfuroſo volatile, non rivivifica le ordinarie calci metalliche, almeno cogli ordinarj metodi praticati finora.

V.

La luce ſolare non riſcalda i corpi più traſparenti, e più ſottili, come l'aria, le lamine di criſtallo.

VI.

La luce ſolare appena riſcalda i corpi bianchi, ed opachi.

VII.

La luce ſolare non riſcalda, che que' corpi, in cui ſi è arreſtata.

FIAMMA.

I.

La fiamma anche accreſciuta, e comunque lucida, fa ſchiudere dalle piante aria meſitica, aria flogiſticata.

II.

La fiamma paſſa, come la luce, in iſtante attraverſo il criſtallo, ma non riſcalda i corpi collocati dietro del criſtallo, che molto tardi.

III.

La fiamma immediatamente applicata alle calci metalliche le rivivifica.

IV.

La fiamma riſcalda anche i corpi più traſparenti, e li fonde ſubito.

V.

La fiamma, applicata eſteriormente ai matracci di criſtallo, non rivivifica le calci metalliche comuni.

CALORE.

I.

Il calore tanto ſolare, che terreſtre, ſchiude dalle piante aria flogiſticata.

II.

Il calore non rivivifica in metallo le ordinarie calci, non fa detuonare il nitro, non produce l'acido zolfuroſo volatile.

III.

Il calore eſclude dai corpi il flogiſto, o ne diminuiſce la quantità, come par provato dalle ſperienze più moderne fatte in Inghilterra.

IV.

Il calore penetra tutti i corpi, comunque opachi, e duri, e li fonde.

FLOGISTO.

I.

Il flogiſto eſclude dai corpi il calore, o ne diminuiſce la quantità, come appare dalle moderne dottrine.

II.

Il flogiſto non paſſa attraverſo il vetro a rivivificar le calci metalliche.

I corpi meſſi nel vuoto, dentro recipienti di criſtallo, poſſono eſſere illuminati, tanto dalla luce ſolare, che dalla luce terreſtre, o fiamma. I corpi poi lucenti, o infiammati, non danno più luce meſſi nel vuoto; dunque l'aria è neceſſaria a render lucenti quei corpi, ma non già a render viſibili a noi i corpi collocati dentro il vuoto, quando ſi getti ſopra di eſſi la luce eſterna dei corpi lucenti nel pieno. Pare dalle ultime eſperienze de' fiſici, che fino la elettricità medeſima nel vuoto ſubiſca le ſteſſe leggi, perchè ſpariſce quando il vuoto è perfetto. Il che ſempre più ci aſſicura, che i corpi lucenti ſono in uno ſtato di accenſione, come l'ho io dimoſtrato di diverſi foſfori; ma la luce, che ſi manifeſta allora, ſegue le conoſciute leggi della luce ſolare, quando ſi fa cadere ſopra i corpi, e ſi riflette da eſſi.

Da tutto quello, che abbiamo rilevato ſopra, ſi vede, che la luce ſolare non conviene in tutto nè anco colla luce della fiamma, o terreſtre. 1. Perchè la prima fa ſchiuder dalle piante aria deſlogiſticata, e l'altra aria meſitica. 2. Perchè la prima riſcalda i corpi in iſtanti, e l'altra molto più tardi. 3. Perchè la prima non fa detuonare il nitro, non rivivifica le calci metalliche, non rende l'olio di vitriolo acido zolfuroſo volatile all'oppoſto della fiamma. 4. Perchè la luce ſolare non riſcalda i corpi traſparenti, che riſcalda la fiamma. 5. Perchè la luce ſolare non riſcalda, che poco, e tardi i corpi opachi, bianchi, al contrario della fiamma.

Il calore non è nè luce, nè fiamma, nè flogiſto; non è luce, perchè penetra tutti i corpi, che la luce non penetra; non è nè fiamma, nè flogiſto, perchè non rivivifica le calci metalliche, non fa detuonare il nitro.....

Il flogiſto non è il calore, perchè non penetra tutti i corpi, come fa il calore, e perchè eſclude il calore de' corpi medeſimi.

Siccome abbiamo oſſervato delle diverſità reali di eſſetti provenienti dalle quattro ſoſtanze ſeguenti, *Luce*, *Fiamma*, *Calore*, e *Flogiſto*, e nulla conoſciamo ancora della vera natura di eſſe; vi è tanto che baſta, perchè il filoſofo oſſervatore debba conſiderarle come ſemplici, e come differenti tra loro, e perchè debba ſervirſene, come di principj, per iſpiegare gli effetti, che ſono ſubordinati ad eſſe ſoſtanze: e così infatti facciamo, parlando degli acidi, benchè forſe ſieno compoſti, e riſultino dalla modificazione di un acido ſolo. Sopra di queſti principj il famoſo *Bergman* ſommo chimico, e grandiſſimo fiſico, ha ſtabilito le ſue cinque terre elementari primitive, che ſpargono tanto lume in tutta la fiſica, e la ſtoria naturale, poco curandoſi, ſe in lor medeſime ſieno poi ſemplici, o ſieno una modificazione di una ſola di eſſe, o di più. Queſta, qualunque ella ſia, è la ſola via che ci reſta per internarci nella ſcienza de' corpi, e per tenerci lontano dalle illuſioni, e dalle ipoteſi.

Nella ſuppoſizione poi, che la materia primitiva dei corpi foſſe omogenea, non ne ſeguirebbe per queſto, che noi non doveſſimo cercar di conoſcere le proprietà di eſſa, quando è modificata in modo, da coſtituire delle diverſe ſoſtanze; che anzi nella ſola conoſcenza delle proprietà di queſte ſoſtanze diverſe conſiſterebbe la ſcienza de' corpi, e la conoſcenza delle cauſe, e de' fenomeni naturali.

Da tutte le coſe dette fin qui, par che ſi poſſano conſiderare quelle quattro ſoſtanze, o agenti, come principj ſemplici, e differenti fra di eſſi. Ma non ne ſegue già da tutto queſto, che due, o più di eſſi non poſſano formarne un ſolo. E' vero, che in queſt' ipoteſi non ſarebbono più nè ſemplici, nè quattro, ma andavano dal filoſofo conſiderati come tali prima di trovarne i componenti. Una volta poi, che queſti componenti ſi ſieno trovati, ſi deve rettificar l'ipoteſi, e

diminuire il numero di essi a proporzione di quelli, che ci mostrerà l'esperienza.

Se si potesse dimostrare, come lo pensavano i chimici Svezzesi, che il calore è fatto di aria pura, e di flogisto, il calore non andrebbe più considerato come un principio semplice, ma bensì come un composto di due principj, di cui conosciamo alcune delle principali proprietà. Così, se si proverà, che la luce non è che il calore sopraccaricato di flogisto, allora si dirà, che la luce non è più un principio semplice, ma che è fatto di tre altri principj, talchè la fiamma per esempio si dovrà considerare come fatta di calore, e di flogisto, unita ad altri corpi eterogenei, di cui sono formati i corpi combustibili.

La luce solare, anche solo considerata in quanto luce, e non punto considerato il suo calore, sarebbe sempre accompagnata da qualche quantità di flogisto. Il famoso *Scheele* ha dimostrato il primo, che la luce solare rivivifica alla lunga la luna cornea, ed il nitro lunare; ma nulla di questo si ottiene col solo calor solare, nessuna rivivificazione si osserva di quelle calci. Così il medesimo filosofo ha scoperto, che l'acido nitroso, chiuso dentro di una boccia, ed esposto alla luce del sole, si flogistica benissimo; ma non si flogistica punto, se si espone al solo calor della luce.

Nè si creda già, che queste qualità trovate nella luce solare siano contraddette affatto dai fenomeni del §. IV, perchè le circostanze sono molto diverse, ed applicando più lungamente la luce a quelle sostanze, si arriverebbe forse a provare, che non è poi priva affatto di flogisto. Là si è voluto escludere l'ipotesi d'un flogisto abbondante, e qui si è voluto far vedere, che non ne è poi priva interamente.

SOPRA LA MISURA
DELLA LUCE IN GENERALE;
E ſopra l' illuminazione de' varj ſegmenti del Diſco Solare tagliati dall' orizzonte nel tempo del naſcere e tramontare del Sole.

Del P. GREGORIO FONTANA Delle Scuole Pie Profeſſore di Matematica ſublime nell' Univerſità di Pavia.

NIuno de' Fiſico-Matematici prima del 1760, in cui comparvero alla luce le due opere inſigni, una di *Bouguer* intitolata *Traitè d' Optique ſur la gradation de la lumiere*, l' altra di *Lambert* col titolo *Photometria, ſive de menſura & gradibus luminis*, avea ſoſpettato, che nel miſurare la quantità relativa della luce che da un corpo o per ſeſteſſo luminoſo, o altronde irradiato viene tramandata ſopra un dato punto, o picciolo ſpazio da illuminarſi, doveſſe tenerſi conto di quell' angolo, che formano i raggi colla ſuperficie del corpo da cui partono. Eppure un' oſſervazione non difficile a farſi dovea far credere, che il predetto *angolo di emanazione* è un elemento indiſpenſabile per calcolar giuſtamente la miſura della luce. Rimirando il diſco ſolare con un elioſcopio ſi veggono tutti i punti del diſco ugualmente chiari e brillanti, nè ſi ſcorge differenza ſenſibile fra lo ſplendore delle parti più vicine al centro, e delle parti più lontane, coſicchè il centro ſteſſo ed il lembo non preſentano all' occhio alcun divario in ordine alla loro lucidità. Da queſta uguale diſtribuzione di lucidezza in tutte le parti del diſco ſolare ſi deduce ſpeditamente la conſeguenza,

che le varie quantità di luce versate sopra una data superficie dai diversi punti d'un corpo raggiante seguitano, in parità di tutte le altre cose, la ragione de' seni degli angoli di emanazione. Imperciocchè rappresenti il circolo *AFBI* (*fig.* 1) il disco del sole; e prendasi il semicircolo *APB* perpendicolare al disco per rappresentare la convessità del corpo solare rivolta allo spettatore, che si suppone situato ad una distanza immensa in direzione del semidiametro *CP* perpendicolare ad *AB*, e dividente per metà il semicircolo *APB*. Le particelle *Pp*, *Mm*, *Ee* della superficie convessa del sole comparisconо uguali allo spettatore ogni qual volta le loro projezioni ortografiche *Cc*, *Nn*, *Dd* risultano eguali; nè queste riescono uguali, se quelle non crescono in ragione inversa delle rispettive ordinate *PC*, *MN*, *ED*, come è noto per la proprietà del cerchio. Se vuolsi adunque (come prima di *Lambert*, e *Bouguer* da tutti si supponeva), che qualsivoglia punto della superficie convessa del sole tramandi all' occhio dello spettatore sulla terra la stessa copia di raggi, qualunque sia la posizione di tal punto sul globo solare rispettivamente all' occhio, e se perciò la quantità di luce, che viene all' occhio da una parte qualunque di detta superficie, cresce in proporzione della grandezza di quella parte, ne nascerà la conseguenza, che le projezioni ortografiche uguali *Cc*, *Nn*, *Dd*, cioè le varie parti del disco rimirate d' in sulla terra, dovranno comparire tanto più lucide e chiare, quanto più saranno discoste dal centro *C* del disco, e ciò in ragione inversa delle ordinate rispettive, e così le parti vicine al lembo, e tutto il lembo medesimo dovranno mandare uno splendore infinito, divenendo quasi appunto infinito quel rapporto. E poichè questo è visibilmente assurdo, ed è anzi noto per esperienza, che le suddette parti *Cc*, *Nn*, *Dd* del disco gettano un egual chiarore, nè punto si osserva che una sia più o meno lucida dell'

dell' altra; quindi ſi ſcuopre evidentemente falſo il principio, che da ciaſcun punto della ſuperficie ſolare l' occhio dello ſpettatore riceva lo ſteſſo numero di raggi; ed è poi agevole l' inferire, che il numero di tali raggi è proporzionale al ſeno dell' angolo, che eſſi formano, nell' uſcire, colla ſuperficie del ſole. In fatti l' illuminazione delle parti *Pp*, *Mm*, *Ee* della ſuperficie ſolare vedute dallo ſpettatore in *Cc*, *Nn*, *Dd* ſul diſco è in ragione compoſta della grandezza di tali parti conveſſe, e del numero de' raggi, che l' occhio riceve da ciaſcun punto di quelle. Se adunque compajono ugualmente illuminate, come ſi è detto, quella ragione compoſta ſarà una ragione di ugualità, che è quanto dire, la grandezza di dette parti ſarà inverſamente come il numero de' raggi vibrati all' occhio da ciaſcun punto in eſſe aſſunto, e conſeguentemente ſarà un tal numero in ragione diretta delle ordinate corriſpondenti. Ma queſte ordinate ſono anche come i ſeni degli angoli *CPp*, *NMm*, *DEe* conforme richiede la natura del cerchio, i quali angoli ſono appunto formati dai raggi emananti *CP*, *NM*, *DE* dalla ſuperficie conveſſa del ſole; perciò ſi fa manifeſto, che il numero de' raggi lanciati all' occhio dello ſpettatore da ciaſcun punto della ſuperficie ſolare ſeguita la ragione ſemplice diretta del ſeno dell' angolo di emanazione. Il *Bouguer* aſſume una tal ragione un poco maggiore della ſemplice, perchè da un' oſſervazione gli parve di poter inferire, che le parti del diſco ſolare compajono meno luminoſe quanto più ſon lontane dal centro; ſebbene egli ſteſſo confeſſa, che quell' oſſervazione avrebbe avuto biſogno di eſſere più ſpeſſo che egli non fece ripetuta.

Per riguardo a que' corpi, che riflettono il lume ricevuto, haſſi un riſcontro di queſta legge dell' angolo di emanazione nell' oſſervazione ovvia e comune, che ſe in un muro ben imbiancato, poco prima del naſce-

re o poco dopo del tramontare del sole, si fissa coll' occhio una piccola parte tinta d' altro colore, e si rimira da qualunque punto della circonferenza d' un cerchio, che ha per centro la stessa parte, questa si vede sempre chiara ed illuminata egualmente; il che non può accadere senza che la quantità di luce riflettuta da essa nell' occhio vada crescendo nella ragione del seno dell' angolo fatto da' raggi riflessi colla superficie riflettente, vale a dire dell' angolo di emanazione. Per rettificare questa osservazione troppo grossolana, e ridurla ad un' esattezza bastante, il *Lambert* immaginò il seguente ingegnoso esperimento. Due piani *AB*, *BC* (*fig.* 2) uniti sotto l' angolo *ABC* vengono irradiati da un lume collocato in *O* ad ugual distanza dai piani per modo, che essendo uguali le perpendicolari *OI*, *OP*, sieno pure uguali le quattro *BI*, *IA*, *BP*, *PC*, e queste inoltre sieno molto picciole in paragone delle distanze *OI*, *OP*. In tali circostanze egli è evidente, che i piani *AB*, *BC* rimarranno illuminati egualmente, e ciascun punto riceverà sensibilmente lo stesso numero di raggi. Ciò fatto si collochi in *E* una lente *FG*, la quale rifranga le immagini *ba*, *bc* dei piani sopra una superficie data *LM* posta dietro la lente. Osservate attentamente le immagini *ba*, *bc* si trovano egualmente illuminate, nè si scorge veruna diversità fra l' una e l' altra nel grado d' illuminazione; e questo sempre si esperimenta comunque si cangi la situazione della lente, e comunque vadano variando gli angoli *ABE*, *CBE*. Guidisi *CN* perpendicolare a *BE*, e sia *AB* normale a *BE* e parallela ad *LM*, e si piglino *BA*, *BC* molto picciole in confronto di *AE*, *BE*, *CE*, affinchè tutti i raggi mandati da *AB* alla lente partano sotto lo stesso angolo a un di presso, e sotto uno stesso angolo anche i raggi che vanno da *BC* alla lente. Ora i triangoli simili *ABE*, *abE*, *CNE*, *bcE* danno le seguenti analogie $AB : ab :: BE : bE$, $CN : bc :: NE : bE$;

e poichè per la picciolezza di *CB* in paragone di *BE* diventa proſſimamente $NE = BE$, la ragione di *AB*: *ab* ſarà la ſteſſa che di *CN*: *bc*. Laonde *ab*: *bc*:: *AB*: *CN*:: *BC*: *CN*:: *BC*: *BC* ſen. *CBN*:: 1 : ſen. *CBN*. Ma l' eſperimento dimoſtra che le due immagini *ab*, *bc* ſono ugualmente chiare e luminoſe, e che queſta chiarezza è uniformemente diffuſa ſu ciaſcun punto; ſarà dunque la quantità di luce ſparſa full' immagine *ab* a quella ſparſa ſu *bc* come la grandezza di *ab* alla grandezza di *bc*, cioè come il ſeno tutto al ſeno dell' angolo *CBN*. Di qui appariſce, che la quantità di luce riflettuta dai piani *AB*, *BC* ſulla lente *FG* ſeguita la ragione dei ſeni degli angoli di emanazione. E così l' eſperienza dimoſtra, che una ſiffatta legge ha luogo non meno ne' corpi luminoſi per sè ſteſſi, che in quelli che tramandano la luce ricevuta dai primi.

Reſta ora a vedere ſe queſto nuovo elemento introdotto nel calcolo, dove ſi tratta di determinare la quantità della luce vibrata da un corpo raggiante ſopra una data ſuperficie, partoriſca de' riſultati diverſi da quelli, che ſi ottengono nell' ordinaria ipoteſi, in cui tal elemento ſi traſcura. Ciò ſi rende tanto più neceſſario da che il Sig. *Euler* nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino* ſembra determinato a credere, che i problemi riguardanti la miſura della luce diano i medeſimi riſultati, ſia che vogliaſi nel calcolo tener conto dell' angolo di emanazione, ſia che voglia traſcurarſi. Per mettere alla prova queſto penſamento di sì gran Geometra, io ſcelgo a tal effetto il Problema cardinale di queſta ſcienza, cioè di *ritrovare l' illuminazione perpendicolare prodotta in una ſuperficie piana infinitamente picciola da una sfera raggiante*.

Inerendo adunque in primo luogo all' ipoteſi ordinaria io procedo nel modo ſeguente: la figura *ORMS* (*fig.* 3.) rappreſenta una sfera luminoſa o raggiante, il di cui ſemidiametro $CR = r$; *Pp* rappreſenta la ſuper-

ficie piana infinitesima in ambedue le dimensioni, che viene illuminata dalla sfera, ed è distante dal centro di lei per $PC = a$. Il segmento sferico illuminatore circoscritto dalle tangenti PR, PS è RES; finalmente $NMmn$ è una zona infinitamente piccola compresa fralle circonferenze di due cerchj paralleli normali all'asse PC. Ora posto l'angolo $MCE = \varphi$ si ha la superficie di detta zona $= 2\pi r^2 \, d\varphi$ sen. φ (prendendo $1 : \pi$ pel rapporto del diametro alla periferia), ed $MP = \sqrt{(r^2 + a^2 - 2ra \text{ cos. } \varphi)}$. L'angolo d'incidenza MPp de' raggi vibrati dalla zona sul piano infinitesimo Pp è $= PMB$, e questo ha per suo seno $\frac{PB}{PM} = \frac{a - r \text{ cos.} \varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos. } \varphi)}}$, e per coseno $\frac{BM}{PM} = \frac{r \text{ sen.} \varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos.} \varphi)}}$. Essendo pertanto l'illuminazione in Pp in ragion composta della zona $NMmn$ illuminatrice, del seno dell'angolo d'incidenza, e del quadrato inverso della distanza, risulterà la predetta illuminazione $= \frac{2I\pi r^2 \, d\varphi \text{ sen.} \varphi}{r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos.} \varphi} \times \frac{a - r \text{ cos.} \varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos.} \varphi)}}$ prendendo per I l'unità d'illuminazione.

Per più facilmente integrare la formola $\frac{2I\pi r^2 (a - r \text{ cos.} \varphi) d\varphi \text{ sen.} \varphi}{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos.} \varphi)^{3:2}}$, onde conseguire la misura dell'illuminazione del segmento sferico indefinito NEM, assumo cos. $\varphi = x$, e l'illuminazione elementare di tal segmento si trasforma in $\frac{-2I\pi r^2 (a - rx) \, dx}{(a^2 + r^2 - 2rax)^{3:2}}$. A questa formola più semplice applicando le note regole d'integrazione si ritrova senza pena, che il di lei integrale è $= \frac{2I\pi r^2 (r - ax)}{a^2 \sqrt{(r^2 + a^2 - 2rax)}} + \text{cost.}$ E siccome si annulla

l' illuminazione all' annullarsi dell' angolo φ, ovvero quando cos. $\varphi = x = 1$, si raccoglie quindi cost.

$= \frac{-2I\pi r^2(r-a)}{a^2\sqrt{(r^2+a^2-2ra)}} = \frac{2I\pi r^2}{a^2}$, prendendo pel valore di $\sqrt{(r^2+a^2-2ra)}$ la quantità $a-r$ piuttosto che $r-a$, perchè altrimenti risulterebbe negativa la quantità d' illuminazione, che sarebbe assurdo. Dunque l' illuminazione eccitata nel piano Pp dal segmento raggiante indefinito NEM è $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}\left(1 + \frac{r-ax}{\sqrt{(a^2+r^2-2rax)}}\right)$, e posto l'angolo $\varphi = ECS$, e perciò cos. $\varphi = x = \frac{r}{a}$ nasce l'intera illuminazione generata dal segmento proposto RES $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}$. Il che era ecc.

Cerco ora nell' ipotesi di *Lambert* e *Bouguer* una siffatta illuminazione, e per ottener questo non si ha che a moltiplicare l' illuminazione precedentemente trovata della zona pel seno dell' angolo di emanazione PMF fatto dalla tangente MF, e dal raggio emanante MP. Quest' angolo è $= PMB - FMB = PMB - ECM$; quindi sen. $PMF =$ sen. PMB cos. $ECM -$ sen. ECM cos. $PMB = \frac{(a-r\cos.\varphi)\cos.\varphi - r\,\text{sen.}\varphi^2}{\sqrt{(r^2+a^2-2ra\cos.\varphi)}} = \frac{a\cos.\varphi - r}{\sqrt{(a^2+r^2-2ra\cos.\varphi)}}$

$= \frac{ax-r}{\sqrt{(a^2+r^2-2rax)}}$, il quale moltiplicato per $\frac{-2I\pi r^2(a-rx)dx}{(a^2+r^2-2rax)^{3:2}}$ somministra nell' ipotesi di *Lambert* l' illuminazione prodotta dalla zona

$= \frac{2I\pi r^2(a-rx)(r-ax)dx}{(a^2+r^2-2rax)^2}$. Cercando l' integrale di questa espressione si trova senza difficoltà

$\frac{I\pi r}{2a}\left(x-\frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r^2+a^2-2rax)}\right)+$ coſt., il quale dovendo ſparire quando $x=1$, diventa coſt.

$=\left(\frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r-a)^2}-1\right)\frac{I\pi r}{2a}=\left(\frac{(r+a)^2}{2ra}-1\right)\frac{I\pi r}{2a}$

$=\left(\frac{r^2+a^2}{2ra}\right)\frac{I\pi r}{2a}$. Dunque l' illuminazione prodotta dal ſegmento ſferico indeterminato è

$=\frac{I\pi r}{2a}\left(x-\frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r^2+a^2-2rax)}+\frac{r^2+a^2}{2ra}\right)$; e poſto $x=\frac{r}{a}$, riſulta la totale illuminazione prodotta dall' intero ſegmento $RES=\frac{I\pi r}{2a}\left(\frac{r}{a}-\frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(a^2-r^2)}+\frac{r^2+a^2}{2ra}\right)$

$=\frac{I\pi r}{2a}\times\frac{2r}{a}=\frac{I\pi r^2}{a^2}$. Il che era ecc. Di qui ſi vede che la quantità dell' illuminazione calcolata ſecondo l' ordinaria ipoteſi è doppia di quella, che ſi ricava dall' ipoteſi di *Lambert*. Il che dà a divedere di qual importanza ſia in tutta la ſcienza della *miſura della luce* di preliminarmente ſtabilire l' una o l' altra ipoteſi, giacchè in uno de' più ſolenni e fondamentali Problemi di queſta ſcienza s' incontrano nelle due ipoteſi riſultati tanto differenti e diſcordi, che baſterebbono a ſpargervi il più ragionevole pirroniſmo.

Paſſo ora ad un altro Problema intereſſante e curioſo. Suppongo un punto P (*fig.* 4) ſituato nella cavità d'una ſuperficie ſferica raggiante al di dentro, cioè che tramanda da tutti i ſuoi punti la luce verſo la cavità; e tale ſuperficie ſferica ſia BMN. Pel punto P da illuminarſi guido il diametro BF, e perpendicolari ad eſſo diametro conduco due cerchj paralleli infinitamente proſſimi MN, mn, che ſegnano nella ſuperficie ſferica

la zona elementare $MNnm$, e tirando il raggio CM, la retta PM, e la tangente MR, faccio $CM = r$, $CP = a$, l'angolo $MCF = \phi$. Quindi seguitando i passi medesimi che dinanzi, si ritrova $PM^2 = a^2 + r^2 - 2ra$ cos. ϕ, la zona $MNnm = 2r^2 \pi d\phi$ sen. ϕ (esprimendo 1: ϕ il rapporto del diametro alla periferia circolare); e però chiamando I l' unità d'illuminazione, farà l'illuminazione prodotta dalla zona $MNnm$ nel punto $P = \frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ sen. } \phi}{r^2+a^2-2ar \text{ cos.}\phi}$; conseguentemente l' illuminazione prodotta dalla superficie sferica indefinita MFN sarà $= \int \frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ sen. } \phi}{r^2+a^2-2ar \text{ cos. } \phi} = \frac{I\pi r}{a} \text{ log. } (a^2+r^2 - 2ar \text{ cos. } \phi)$ + cost. E perchè si annulla coll' angolo ϕ anche l' illuminazione, nasce perciò cost. $= \frac{-I\pi r}{a} \text{ log. } (a^2+r^2-2ar) = \frac{-2I\pi r}{a} \text{ log. } (r-a)$. Dunque l' illuminazione predetta è $= \frac{I\pi r}{a} \text{ log. } (a^2 + r^2 - 2ar \text{ cos. } \phi) - \frac{2I\pi r}{a} \times \text{log. } (r-a)$. Se ora si piglia $\phi = 180°$, si ottiene l' illuminazione eccitata nel dato punto P da tutta la sferica superficie $= \frac{2I\pi r}{a} \text{ log. } \frac{a+r}{r-a}$.

Introduco ora nel calcolo secondo l'altra ipotesi di *Lambert* l'angolo di emanazione PMR moltiplicando pel seno di quest' angolo l'espressione dianzi trovata $\frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ sen. } \phi}{r^2+a^2-2ar \text{ cos.}\phi}$. A tal effetto osservo, che quest' angolo PMR è $= PMO + OMR = PMO + \phi$; e quindi sen. PMR = sen. PMO cos. ϕ + cos. PMO sen. ϕ. E poichè sen. $PMO = \frac{PO}{PM} = \frac{CO-CP}{PM} = \frac{r \text{ cos. } \phi - a}{\sqrt{(a^2+r^2-2ra \text{ cos.}\phi)}}$,

e cof. $PMO = \frac{MO}{PM} = \frac{r \text{ fen. } \phi}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar \text{ cof. } \phi)}}$, farà fen.

$PMR = \frac{(r \text{ cof.}\phi - a) \text{ cof.}\phi + r \text{ fen.}\phi^2}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar \text{ cof. } \phi)}} = \frac{r - a \text{ cof. } \phi}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar \text{cof.}\phi)}}$.

Laonde farà l'illuminazione prodotta nel punto P dalla zona elementare nell'ipoteſi di *Lambert*

$= \frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ fen. } \phi (r - a \text{ cof. } \phi)}{(a^2+r^2-2ar \text{ cof.}\phi)^{3:2}} = \frac{2I\pi r^3 d\phi \text{ fen.}\phi}{(a^2+r^2-2ar \text{ cof.}\phi)^{3:2}}$
$- \frac{2I\pi ar^2 d\phi \text{ fen.}\phi \text{ cof.}\phi}{(a^2+r^2-2ar \text{ cof.}\phi)^{3:2}}$.

Paſſando ora all'integrazione di queſti due termini ſi vede ſubito, che l'integrale del primo è $= \frac{-2I\pi r^2}{a\sqrt{(a^2+r^2-2ar \text{cof.}\phi)}}$.

Per ritrovare l'integrale del ſecondo termine piglio $x = \text{cof. } \phi$, e quel termine ſi cangia in $\frac{2I\pi ar^2 x dx}{(a^2+r^2-2arx)^{3:2}}$.

Prendo inoltre $y = a^2 + r^2 - 2arx$, e il detto termine ſi trasforma di nuovo in $\frac{-2I\pi ar^2 \left(\frac{a^2+r^2-y}{2ar}\right)\frac{dy}{2ar}}{y^{3:2}}$

$= \frac{-I\pi(a^2+r^2)dy}{2ay^{3:2}} + \frac{I\pi dy}{2a\sqrt{y}}$, il di cui integrale è viſibilmente $\frac{I\pi(a^2+r^2)}{a\sqrt{y}} + \frac{I\pi\sqrt{y}}{a} = \frac{I\pi(a^2+r^2)}{a\sqrt{(a^2+r^2-2arx)}}$
$+ \frac{I\pi}{a}\sqrt{(a^2+r^2-2arx)}$, a cui aggiungendo l'integrale dianzi trovato $- \frac{2I\pi r^2}{a\sqrt{(a^2+r^2-2ar \text{ cof. } \phi)}}$, e riducendo al medeſimo denominatore tutti i termini, ſi ottiene finalmente l'illuminazione eccitata dalla ſuperficie indeterminata

minata $MFN = \frac{2I\pi(a-r\cos.\varphi)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\cos.\varphi)}} + \text{cost.}$ Per ritrovare la costante basta riflettere, che l'illuminazione svanisce insieme coll'angolo φ, il che dà $\text{cost.} = \frac{-2I\pi(a-r)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar)}} = 2I\pi$ prendendo per $\sqrt{(a^2+r^2-2ar)}$ il valore $r-a$ piuttosto che $a-r$. Dunque la predetta illuminazione è $= 2I\pi + \frac{2I\pi(a-r\cos.\varphi)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\cos.\varphi)}}$. Se pertanto in quest' equazione si assume $\varphi = 180°$, e però $\cos.\varphi = -1$, egli è manifesto, che allora dee risultare la quantità dell' illuminazione prodotta nel dato punto dall' intera superficie sferica. Dunque una siffatta illuminazione è $2I\pi + \frac{2I\pi(a+r)}{a+r} = 4I\pi$. Di qui si raccoglie un Teorema molto singolare e inaspettato, non so se da altri avvertito, che *una superficie sferica raggiante, comunque sia piccola o grande, produce la medesima illuminazione in un punto dovunque situato dentro la cavità; e tale illuminazione non è altro che quella, che si prende per unità, moltiplicata per quattro volte il rapporto della periferia circolare al diametro*. Per altro questo Teorema si presenta immantinente allo spirito, qualora il punto dato sia collocato nel centro della sfera cava, essendo evidente, che allora l'illuminazione in esso eccitata debb'essere uguale al prodotto dell' unità d' illuminazione moltiplicata per la superficie sferica, e divisa pel quadrato della distanza, cioè del semidiametro, il che dà appunto $4I\pi$, come prescrive il Teorema.

Confrontando pertanto l'espressione $\frac{2I\pi r}{a}\ \text{log.}\ \frac{a+r}{r-a}$ ricavata nell' ordinaria ipotesi Euleriana coll'espressione $4I\pi$ avutasi dall' ipotesi di *Lambert*, si conosce qual insigne divario producano ne' risultati queste due ipotesi,

le quali nel solo caso, che il punto irradiato sia situato nel centro della sferica cavità, conducono sì l'una che l'altra a ritrovare la medesima illuminazione. Imperciocchè sebbene in tal caso l'espressione $\frac{2I\pi r}{a}\log.\frac{a+r}{r-a}$ diventi eguale alla quantità indeterminata e vaga $\frac{0}{0}$, se per evitare questo valore indeterminato si suppone a infinitesimo, si trova $\frac{r+a}{r-a}=1+\frac{2a}{r}$ trascurando i termini, che contengono le potenze di a. Dunque $\frac{2I\pi r}{a}\log.\frac{r+a}{r-a}=\frac{2I\pi r}{a}\log.\left(1+\frac{2a}{r}\right)$, e siccome $\log.\left(1+\frac{2a}{r}\right)=\frac{2a}{r}$, disprezzati gli altri termini come dianzi, perciò nasce $\frac{2I\pi r}{a}\log.\left(1+\frac{2a}{r}\right)=4I\pi$, come appunto si è trovato nell'ipotesi di *Lambert*, e come esser doveva per la natura della cosa col puro discorso metafisico.

E qui parmi di scorgere un inconveniente nell'ipotesi Euleriana, ed è di offerire un'illuminazione infinita, allorchè il punto si prende sulla stessa superficie interna, vale a dire $r=a$, nel qual caso l'illuminazione diventa $2I\pi\log.\frac{2r}{0}=\infty$. Questa illuminazione infinita ha un non so che di aspro, perchè sebbene essa può sembrare non ripugnante a motivo della distanza evanescente del punto dato dalla superficie sferica, si ha però quivi un compenso per parte della superficie, da cui il punto ha una distanza evanescente, perchè anche la grandezza di tal superficie è evanescente, ed a tale grandezza è sempre proporzionale *cæteris paribus* l'illuminazione. Io non so se m'inganno, ma io tro-

vo una certa armonica ſemplicità ed eleganza nell' uguaglianza d'illuminazione per tutti i punti della cavità ſferica, come eſige il Teorema precedentemente dimoſtrato, che non poſſo non creder vera l' ipoteſi, che ſomminiſtra un tal riſultato.

Oſſervo finalmente, che prendendo una ſuperficie piana infinitefima in ambedue le dimenſioni fuori d'una sfera raggiante del ſemidiametro $= r$ ad una grandiſſima diſtanza dal di lei centro $= a$ ſi trova (come ho moſtrato precedentemente) l'illuminazione prodotta in detta ſuperficie $= \frac{I\pi r^2}{a^2}$ nell' ipoteſi di *Lambert*, ed $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}$ nell'ipoteſi di *Eulero*; e poichè πr^2 è l'area del cerchio maſſimo della sfera raggiante, e $2\pi r^2$ è la ſuperficie emisferica, ne viene in conſeguenza, che l'illuminazione generata in quel piano infinitamente picciolo viene eſpreſſa dall'area del cerchio maſſimo ſecondo *Lambert*, e dalla ſuperficie emisferica ſecondo *Eulero*. Ora non par egli più veriſimile, che piuttoſto quell'area che queſta ſuperficie debba miſurare la quantità d' illuminazione, giacchè nelle grandiſſime diſtanze non ſi vede altro che l'area ſuddetta, oſſia il diſco, e non compariſce punto la ſuperficie dell'emisfero?

Proſeguendo queſta diſamina in alcun altro ſolenne e nuovo Problema ſpettante alla miſura della luce, mi porto a calcolare nell' ipoteſi Euleriana l'illuminazione generata dalla circonferenza circolare raggiante *RMS* (*fig.* 5) in un punto *F* preſo dentro l'area del circolo. Si guidi per *F* il diametro *RB*, e di un punto *M* qualunque della circonferenza ſi conducano *MC* al centro, *MF* al punto dato, *MN* perpendicolare al diametro. Si ponga l'angolo $MCB = \varphi$, il raggio $CM = r$, $CF = a$: ſarà dunque $FM^2 = r^2 + a^2 - 2ar$ cof. φ, l'archetto infinitefimo $Mm = rd\varphi$, e l'illuminazione in *F*

generata dal archetto Mm farà $= \frac{Ird\phi}{r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos. } \phi}$

prendendo per I l'unità d'illuminazione. Passo ora all'integrazione di questa formola, e per meglio riuscirvi faccio $r^2 + a^2 = f^2$, $2ar = g^2$, e la formola diventa $\frac{Ird\phi}{f^2 - g^2 \text{ cos. } \phi}$. Quindi assumo cos. $\phi = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$; ond' è sen. $\phi = \frac{2u}{1 + u^2}$, $d\phi \text{ cos. } \phi = \frac{2du(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2}$, e però $d\phi = \frac{2du}{1 + u^2}$. Dunque essendo $f^2 - g^2 \text{ cos. } \phi = \frac{f^2 - g^2 + (f^2 + g^2)u^2}{1 + u^2}$, ne viene $\frac{Ird\phi}{f^2 - g^2 \text{ cos.} \phi} = \frac{2Irdu}{f^2 - g^2 + (f^2 + g^2)u^2} = \frac{2Irdu}{(r-a)^2 + (r+a)^2 u^2}$

$$= \frac{2Ir}{(r-a)^2} \times \frac{du}{1 + \left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2} = \frac{2Ir}{(r-a)^2} \times \frac{\frac{r+a}{r-a} \times du}{1 + \left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2} = \frac{2Ir}{r^2 - a^2} \times \frac{\frac{r+a}{r-a} \times du}{1 + \left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2}$$

Quest' ultima formola esprime visibilmente la quantità $\frac{2Ir}{r^2 - a^2}$ moltiplicata per l'elemento dell'arco circolare descritto col raggio 1, e colla tangente $\frac{r+a}{r-a} u$. Dunque l'illuminazione generata nel punto F dall'arco luminoso indefinito BM è $= \frac{2Ir}{r^2 - a^2}$ Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a} u$ + cost. E poichè si è fatto cos. $\phi = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$, cioè u^2

$= \frac{1-\text{cof. }\varphi}{1+\text{cof. }\varphi}$, cioè $u = \sqrt{\frac{1-\text{cof. }\varphi}{1+\text{cof. }\varphi}}$, farà la predetta illuminazione $= \frac{2Ir}{r^2-a^2}$ Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a}\sqrt{\frac{1-\text{cof.}\varphi}{1+\text{cof.}\varphi}} +$ coſt. Siccome poi l'illuminazione ſvaniſce in un coll' angolo φ, cioè quando cof. $\varphi = 1$, nel qual caſo Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a}\sqrt{\frac{1-\text{cof. }\varphi}{1+\text{cof. }\varphi}}$ diventa Arc. tang. 0, cioè Arc. $= 0$; perciò non vi è coſtante da aggiungere all' integrale ritrovato. Per ottenere preſentemente l'illuminazione della ſemicirconferenza *BMR* nel punto dato *F* conviene prendere $\varphi = 180°$, e perciò cof. $\varphi = -1$; il che ſomminiſtra la formola $\frac{2Ir}{r^2-a^2}$ Arc. tang. $\infty =$ $\frac{2Ir}{r^2-a^2} \times \frac{1}{2}\pi$, chiamando π la ſemicirconferenza del circolo deſcritto col raggio 1. Dunque l'illuminazione prodotta dalla ſemicirconferenza nel punto F è $= \frac{Ir\pi}{r^2-a^2}$, e l'illuminazione generata da tutta la circonferenza (che è un'illuminazione doppia dell'altra come è chiaro) è $= \frac{2Ir\pi}{r^2-a^2}$, cioè uguale alla ſteſſa circonferenza moltiplicata per l'unità d'illuminazione, e diviſa pel quadrato dell'ordinata al diametro nel dato punto *F*.

Se ora ſi vuol trovare l'illuminazione del punto *F* nell'ipoteſi di *Lambert*, converrà moltiplicare $\frac{Ird\varphi}{a^2+r^2-2ar\text{ cof. }\varphi}$ pel ſeno dell'angolo di emanazione *FMO* fatto dal raggio lucido *MF* colla tangente *MO* in *M*, il qual angolo è $= FMN + NMO = FMN + MCB = FMN + \varphi$. Dunque ſen. *FMO* = ſen. *FMN* cof. φ

$+ \text{cof. } FMN \text{ fen. } \varphi = \frac{FN \text{ cof. } \varphi}{FM} + \frac{MN \text{ fen. } \varphi}{FM}$

$= \frac{(CN - CF) \text{ cof. } \varphi}{FM} + \frac{r \text{ fen. } \varphi^2}{FM} = \frac{(r \text{ cof. } \varphi - a) \text{ cof. } \varphi + r \text{ fen. } \varphi^2}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof. } \varphi)}}$

$= \frac{r - a \text{ cof. } \varphi}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{cof. } \varphi)}}$. Laonde l'illuminazione generata nel punto F dall'archetto Mm farà $\frac{Ir(r - a \text{ cof. } \varphi)\, d\varphi}{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof. } \varphi)^{3:2}}$

$= \frac{Ir(r - a \text{ cof. } \varphi) d\varphi}{(a^2 + r^2)^{3:2} \left(1 - \frac{2ar}{a^2 + r^2} \text{ cof. } \varphi\right)^{3:2}} = \frac{Ir(r - a \text{ cof. } \varphi)\, d\varphi}{h^{3:2}(1 - m \text{cof. } \varphi)^{3:2}}$

assumendo $h = a^2 + r^2$, $m = \frac{2ar}{a^2 + r^2}$. Trovata pertanto l'illuminazione generata dall'archetto $Mm = \frac{Ir}{h^{3:2}} (r - a \text{ cof. } \varphi) (1 - m \text{ cof. } \varphi)^{-3:2} d\varphi$, io riduco in ferie l'espressione $(1 - m \text{ cof. } \varphi)^{-3:2}$, ed ho la detta espressione $= 1 + \frac{1}{2} m \text{ cof. } \varphi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} m^2 \text{ cof. } \varphi^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^3 \text{cof. } \varphi^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} m^4 \text{ cof. } \varphi^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} m^5 \text{ cof. } \varphi^5 + \text{ ecc.}$

Dunque l'illuminazione dell'archetto farà $\frac{Ir}{h^{3:2}} \Big(r d\varphi + \frac{1}{2} mr \text{ cof. } \varphi\, d\varphi - a \text{ cof. } \varphi\, d\varphi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} rm^2 \text{ cof. } \varphi^2\, d\varphi - \frac{1}{2} am \text{ cof. } \varphi^2\, d\varphi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} rm^3 \text{ cof. } \varphi^3\, d\varphi - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} am^2 \text{ cof. } \varphi^3\, d\varphi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} rm^4 \text{ cof. } \varphi^4\, d\varphi - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} am^3 \text{ cof. } \varphi^4\, d\varphi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} rm^5 \text{ cof. } \varphi^5\, d\varphi - \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} am^4 \text{cof. } \varphi^5 d\varphi + \text{ ecc.}$

$$= \frac{Ir}{b^{3/2}} \left\{ \begin{array}{l} rd + \frac{1}{2} mr \\ - a \end{array} \right) \text{cof. } \varphi\, d\varphi \left(\begin{array}{l} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} rm^2 \\ - \frac{3}{2} am \end{array} \right) \text{cof. } \varphi^2\, d\varphi$$

$$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} rm^3 \Big) \text{cof. } \varphi^3\, d\varphi \Big(+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} rm^4 \Big) \text{cof. } \varphi^4\, d\varphi$$

$$- \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} am^2 \Big) \qquad - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} am^3 \Big)$$

$$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} rm^5 \Big) \text{cof. } \varphi^5\, d\varphi \pm \text{ecc.} \Big\}$$

$$- \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} am^4 \Big)$$

. Chiamo A il coefficiente di cof. $\varphi d\varphi$, B quello di cof. $\varphi^2 d\varphi$, C quello di cof. $\varphi^3 d\varphi$, D ecc. Perlochè la predetta illuminazione farà $\frac{Ir}{b^{3/2}} \left(rd\varphi + Ad\varphi \text{ cof. } + Bd\varphi \text{ cof. } \varphi^2 + C\, d\varphi \text{ cof. } \varphi^3 + Dd\varphi \text{ cof. } \varphi^4 + Ed\varphi \text{ cof. } \varphi^5 + \text{ecc.} \right)$ Ora si fa dal calcolo integrale, che

I.

$$A \int d\varphi \text{ cof. } \varphi = A \text{ sen. } \varphi$$

II.

$$B \int d\varphi \text{ cof. } \varphi^2 = \tfrac{1}{2} B \text{ sen. } \varphi \text{ cof. } \varphi + \tfrac{1}{2} B\varphi$$

III.

$$C \int d\varphi \text{ cof. } \varphi^3 = \tfrac{1}{3} C \text{ sen. } \varphi \text{ cof. } \varphi^2 + \tfrac{2}{3} C \text{ sen. } \varphi$$

IV.

$$D \int d\varphi \text{ cof. } \varphi^4 = \tfrac{1}{4} D \text{ sen. } \varphi \text{ cof. } \varphi^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} D \text{ sen. } \varphi \text{ cof. } \varphi$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} D\varphi$$

V.

$$E\int d\varphi \text{ cos. } \varphi^3 = \frac{1}{3} E \text{ sen. } \varphi \text{ cos. } \varphi^4 + \frac{1.4}{3.5} E \text{ sen. } \varphi \text{ cos. } \varphi^2 + \frac{2.4}{3.5} E \text{ sen. } \varphi$$

VI.

$$F\int d\varphi \text{ cos. } \varphi^6 = \frac{1}{6} F \text{ sen. } \varphi \text{ cos. } \varphi^5 + \frac{1.5}{4.6} F \text{ sen. } \varphi \text{ cos. } \varphi^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6} F \text{ sen. } \varphi \text{ cos. } \varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} F\varphi$$

VII.

ecc.

Conseguentemente integrando la precedente espressione dell' illuminazione dell' archetto, si avrà quella dell' arco indefinito $BM = \frac{Ir}{h^{3:2}} \left(r\varphi + \frac{1}{2} B\varphi + \frac{1:3}{2.4} D\varphi \right.$

$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} F\varphi +$ ecc. $\ldots\ldots\ldots + A$ sen. $\varphi + \frac{2}{3} C$ sen. φ

$+ \frac{2.4}{3.5} E$ sen. $\varphi +$ ecc. $\ldots\ldots + \frac{1}{2} B$ sen. φ cos. φ

$+ \frac{1.3}{2.4} D$ sen. φ cos. $\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} F$ sen. φ cos. $\varphi +$ ecc. $\ldots$

$+ \frac{1}{3} C$ sen. φ cos. $\varphi^2 + \frac{1.4}{3.5} E$ sen. φ cos. $\varphi^2 +$ ecc. $\ldots\ldots$

$\frac{1}{4} D$ sen. φ cos. $\varphi^3 + \frac{1.5}{4.6} F$ sen. φ cos. $\varphi^3 +$ ecc. $\ldots\ldots$

$+ \frac{1}{5} E$ sen. φ cos. $\varphi^4 +$ ecc. $\ldots\ldots + \frac{1}{6} F$ sen. φ cos. φ^5

$+$ ecc. $\ldots\ldots$) $+$ cost. E siccome l' illuminazione diventa

venta nulla quando l' arco pure diventa nullo, nasce perciò cost. = o. Posto ora $\varphi = 360° = 2\pi$, prendendo π per la semicirconferenza del cerchio descritto col raggio 1, risulta tutta l'illuminazione generata nel dato punto F dall' intera circonferenza raggiante $BMRS$

$$= \frac{2Ir\pi}{(a^2+r^2)^{3:2}}\left(r+\frac{1}{2}B+\frac{1.3}{2.4}D+\frac{1.3.5}{2.4.6}F+\text{ecc.}\right)$$

Se si volesse ora conoscere l' illuminazione generata dalla periferia lucida in un punto situato sulla medesima, basterà assumere $a=r$, e quindi $b=2r^2$, $m=1$,

$$B=\frac{3.5}{2.4}r-\frac{3}{2}r=\frac{3(5-4)}{2.4}r=\frac{3}{2.4}r, D=\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}r$$

$$-\frac{3.5.7}{2.4.6}r=\frac{3.5.7(9-8)}{2.4.6.8}r=\frac{3.5.7}{2.4.6.8}r,$$

$$F=\frac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12}r-\frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10}r=\frac{3.5.7.9.11(13-12)}{2.4.6.8.10.12}r$$

$$=\frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}r, \text{ ecc., ed avrassi la detta illumina-}$$

zione $=\frac{I\pi}{r\sqrt{2}}\left(1+\frac{3}{2.2.4}+\frac{3.3.5.7}{2.2.4.4.6.8}\right.$

$$\left.+\frac{3.3.5.5.7.9.11}{2.2.4.4.6.6.8.10.12}+\text{ecc.}\right).$$

Passo ora a calcolare l' illuminazione generata da un cerchio luminoso FGO (*fig. 6*) sopra un punto A situato nella retta CA, che dal suo centro si conduce perpendicolare al piano del cerchio. Dal centro C descrivendo i due cerchj infinitamente prossimi MER, SNm, egli è evidente, che l' illuminazione prodotta in A dalla zona infinitesima racchiusa tralle loro circonferenze s' agguaglia all' unità d' illuminazione moltiplicata per detta zona, e divisa pel quadrato della distanza AM nell' ipotesi Euleriana, e moltiplicata nuovamente pel seno dell' angolo di emanazione CMA nell' ipotesi

di *Lambert*. Dunque nominando il raggio *CF* del dato cerchio r, a la distanza AC del punto dato dal centro, x il raggio CM, $1:\pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, si trova la zona luminosa $= 2\pi x dx$, $AM^2 = a^2 + x^2$, e l' illuminazione generata dalla zona in $A = \frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2}$. Dunque integrando sarà l' illuminazione prodotta dal cerchio *RME* $= \int \frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2} = I\pi \log.(a^2+x^2) +$ cost: e siccome l' illuminazione svanisce col semidiametro x; quindi è cost. $= -I\pi \log. a^2$; onde la detta illuminazione si fa $= I\pi \log. \frac{a^2+x^2}{a^2}$. Laonde per tutto il dato cerchio *OFG* sarà l' illuminazione ricercata $= I\pi \log. \frac{a^2+r^2}{a^2}$ nell' ipotesi Euleriana.

Nell' ipotesi di *Lambert* conviene moltiplicare l' espressione $\frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2}$ pel seno dell' angolo *AMC*, cioè per $\frac{AC}{AM}$, ossia per $\frac{a}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ ad effetto di ottenere l' illuminazione prodotta dalla zona circolare, la quale illuminazione sarà in conseguenza $= \frac{2I\pi a x dx}{(a^2+x^2)^{3:2}}$. L' integrale di questa formola è $= -\frac{2I\pi a}{\sqrt{(a^2+x^2)}} +$ cost. $= 2I\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)$. Onde l' illuminazione prodotta dall' area circolare indefinita *RME* è $= \frac{2I\pi(\sqrt{(a^2+x^2)}-a)}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, e quella che è generata dal cer-

chio dato FOG è $= \frac{2I\pi\left(\sqrt{(a^2+r^2)}-a\right)}{\sqrt{(a^2+r^2)}}$

$= 2I\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$.

Pongasi ora al confronto questa espressione $2I\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$ colla prima $I\pi$ log. $\frac{a^2+r^2}{a^2}$, e si giudichi quanto essenzialmente differiscono l' una dall' altra. Questa differenza arriva a tal segno, che se il cerchio luminoso si suppone infinito, cioè $r=\infty$, l' illuminazione da esso prodotta nel dato punto secondo l' ipotesi di *Lambert* e *Bouguer* diventa $2I\pi$, cioè determinata e finita, ma nell' ipotesi comune Euleriana si scuopre $= 2I\pi$ log. ∞, cioè a dire infinita.

Un soggetto degno dell' attenzione de' fisici e geometri in questa scienza della misura del Lume è quello, che spetta a' varj gradi d' illuminazione, che la terra riceve dal sole nelle sue diverse altezze sopra l' orizzonte, e singolarmente dalle parti successivamente visibili del disco solare allorchè attraversa l' orizzonte così nel nascere, come nel tramontare. Volendo entrare in questa delicata ricerca, convien prima premettere il Problema di ritrovare l' illuminazione, che da una data superficie in tutti i suoi punti *egualmente luminosa* viene prodotta in un elemento o porzione infinitesima di un' altra data superficie esposta ai raggi della prima. A tal effetto sia $PM\mathfrak{Q}$ (*fig.* 7) la superficie raggiante di qualunque forma, ugualmente luminosa in tutte le sue parti; ed EF sia la superficie esposta a ricevere i raggi di quella; cercasi l' illuminazione prodotta da $P\mathfrak{Q}$ nell' elemento, o porzioncella infinitesima Aa. Piglisi nella superficie illuminante l'elemento Mm, che tramanda in A la piramide luminosa MAm sotto l' angolo d' incidenza $MAa = b$, e sotto l' angolo di emanazione $mMA = e$. Ciò posto, l' illumi-

nazione eccitata nell' elemento *Aa* da *Mm* si avrà con moltiplicare la parte illuminatrice *Mm* pel seno dell' angolo *b* d' incidenza, e pel seno dell' angolo *e* di emanazione, e con dividere il prodotto pel quadrato della distanza *MA*, cioè sarà $= \frac{Mm.\text{ sen. } b \text{ sen. } e}{MA^2}$. Si concepisca tagliata la piramide luminosa da un piano *mi* perpendicolare ai lati di lei; e per la Geometria sarà come il seno tutto al seno dell' angolo *mMA*, così la base infinitesima *Mm* della piramide al piano secante *mi*; onde $mi = Mm.$ sen. *e*; e quindi l' illuminazione prodotta $= \frac{mi.\text{ sen. } b}{MA^2}$. Se ora intorno ad *A* come centro col semidiametro $AC = 1$ si descrive una superficie sferica, di cui *BNC* sia la porzione compresa fra la piramide luminosa *PA*Q tramandata in *A* da tutta la superficie raggiante *P*Q, ed *Nn* sia la porzioncella serrata fra la piramidetta *Mmn*; egli è noto, che le due minime superficie *mi*, *Nn* stanno fra loro come i quadrati di *Ai*, ovvero *AM*, ed *AN*; e però $Nn = \frac{mi.\, AN^2}{AM^2} = \frac{mi}{AM^2}$; e questo valore sostituito nella precedente espressione dell' illuminazione rende questa $= Nn.$ sen. *b*, per modo che chiamata *I* l' illuminazione prodotta da una porzione finita della superficie raggiante *PM*Q, ed $Nn = d\omega$, risulta $dI = d\omega$ sen. *b*, ed $I = \int d\omega$ sen. *b*.

Di qui è facile l' inferire, che se la superficie sferica *BNC* fosse ancor essa una superficie raggiante, ed ugualmente luminosa in tutte le sue parti, come lo è la *PM*Q, l' illuminazione da essa prodotta in *Aa* sarebbe precisamente la stessa che quella prodotta da *PM*Q. Imperciocchè essendo l' illuminazione in *A* dell' elemento *Nn* uguale al prodotto di detto elemento nel

ſeno dell' angolo di emanazione nNA, e nel ſeno dell' angolo d'incidenza b, diviſo pel quadrato della diſtanza NA, ed eſſendo $= 1$ così queſto quadrato, come il ſeno dell' angolo retto nNA, ne viene l' illuminazione generata dall' elemento $Nn = d\omega$ ſen. b, qual'è appunto (come ſi è veduto) l' illuminazione generata dall' elemento Mm; e con ſimil diſcorſo ſi prova, che l' illuminazione eccitata in Aa da tutta la data ſuperficie $PM\mathfrak{Q}$ è uguale all'illuminazione fatta dal ſegmento ſferico BNC rinſerrato fra i lati della piramide lucida $P\mathfrak{A}\mathfrak{Q}$.

Per venire ora alla determinazione dell' illuminazione del ſole nelle ſue diverſe altezze ſopra l' orizzonte, ſia Cc (*fig.* 8) una ſuperficie piana orizzontale infinitamente piccola in tutte le dimenſioni, e intorno ad eſſa come centro la ſuperficie ſferica $A0BZ$ col ſemidiametro $= 1$, la quale dal piano Cc prodotto viene tagliata nel cerchio maſſimo orizzontale ALB. Il cono luminoſo DCE, che partendo da tutto il diſco ſolare va ad irradiare la ſuperficie data infinitetima Cc, ed ha per aſſe CP, taglia nella ſuperficie ſferica il ſegmente $D\mathfrak{Q}EP$ avente per baſe il cerchio $D\mathfrak{Q}E$, e per polo P; e conſeguentemente, per ciò che ſi è dimoſtrato, tanta ſarà l' illuminazione, che produrrebbe in Cc la ſuperficie concava $D\mathfrak{Q}EP$, ſe ſi ſupponeſſe ugualmente lucida che il diſco ſolare, quanta è l' illuminazione eccitata dal diſco medeſimo, ſicchè per conoſcer queſta baſterà ritrovar quella. Tirili pertanto la verticale CZ, ed il piano ZCP diſteſo ſegni nella ſuperficie ſferica il cerchio verticale $ZA0E$; e per un punto M preſo ad arbitrio nel predetto ſegmento ſi faccia paſſare il parallelo FNG appartenente al polo P, conducendoli pure il parallelo infinitamente vicino fng. Ciò fatto pel polo P, e pel punto M ſi concepiſca guidato l' arco PMm di circolo maſſimo, e l' arco PNn ſotto un angolo infinitetimo col primo: finalmente pel vertice Z,

e per M si faccia passare il cerchio verticale $ZMKO$, che incontri in K il cerchio orizzontale. Si faccia la distanza di M dal vertice, cioè $ZM = \Delta$, la distanza dal polo, ossia $PM = p$, l'angolo al polo $ZPM = \varphi$; e sarà il semidiametro del parallelo $FMG =$ sen. p, $MN = d\varphi$ sen. p, $Mm = dp$. Laonde l'elemento $MmnN$, che si ha con moltiplicare MN per Mm, si trova $= d\varphi dp$ sen. p, e questo moltiplicato pel seno dell'angolo d'incidenza MCK, ovvero per cos. Δ dà per l'illuminazione prodotta dall'elemento $MmnN$ la formola $d\varphi dp$ sen. p cos. Δ. Posta ora la distanza del polo dal vertice, ovvero $PZ = a$, si ha nel triangolo sferico ZPM dalla Trigonometria cos. $\Delta =$ cos. p cos. $a +$ sen. p sen. a cos. φ, e surrogato nella formola precedente questo valore nasce l'espressione $d\varphi dp$ sen. p cos. p cos. $a + d\varphi\, dp$ sen. p^2 sen. a cos. φ, la quale rappresenta l'illuminazione del suddetto elemento. Si avverta presentemente, che l'integrazione di questa formola, nel supposto che si faccia variare la sola φ, somministra l'illuminazione prodotta dalla parte indeterminata $FfmM$ della zona infinitesima $FfgG$, e questa illuminazione trovasi $= \varphi dp$ sen. p cos. p cos. $a + dp$ sen. p^2 sen. a sen. φ : siffatta quantità dee pur essa integrarsi, ma in ipotesi che si cangi la sola p; e siccome è noto, che $\int dp$ sen. p cos. $p = \frac{1}{2}$ sen. p^2, e $\int dp$ sen. $p^2 = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$ sen. p cos. p; quindi sarà $\int \varphi dp$ sen. p cos. p cos. $a + \int dp$ sen. p^2 sen. φ sen. $a = \frac{1}{2}\varphi$ sen. p^2 cos. $a + \frac{1}{2}p$ sen. φ sen. $a - \frac{1}{2}$ sen. p cos. p sen. φ sen. $a = \frac{1}{2}\varphi$ sen. p^2 cos. $a + \frac{1}{2}$ sen. φ sen. a (p — sen. p cos. p), che esprime l'illuminazione fatta dalla parte indefinita FMP del segmento FGP; sicchè preso $\varphi = 360° = 2\pi$, risulta l'illumina-

zione eccitata da tutto quel ſegmento $= \pi$ ſen. p^2 coſ. a; e facendoſi poi eſprimere da p la diſtanza PR del polo dalla baſe dell' intero ſegmento DEP rinſerrato fra i raggi del cono ſolare luminoſo, la ſteſſa formola ſempliciſſima π ſen. p^2 coſ. a rappreſenta l' illuminazione di eſſo ſegmento, e conſeguentemente quella del diſco ſolare, che è in tutto equivalente alla prima.

Per mezzo di queſta formola rieſce ora faciliſſima la coſtruzione di una Tavola, la quale rappreſenti le varie illuminazioni del ſole nelle differenti diſtanze del ſuo centro dal zenit, ovvero nelle differenti altezze del centro ſolare ſopra l' orizzonte, facendo $= 1$ l' illuminazione corriſpondente all' altezza di 90°.

TAVOLA.

Altezze del centro solare sopra l'orizzonte.	Illuminazioni prodotte dal sole in un piano orizzontale.					
		64°	0,8987940	33°	0,5446390	2° 0,0348995
		63°	0,8910065	32°	0,5299193	1° 0,0174524
		62°	0,8829470	31°	0,5150381	
		61°	0,8746197	30°	0,5000000	
		60°	0,8660254	29°	0,4848096	
90°	1,0000000	59°	0,8571673	28°	0,4694716	
89°	0,9998477	58°	0,8480481	27°	0,4539905	
88°	0,9993908	57°	0,8386706	26°	0,4383712	
87°	0,9986295	56°	0,8290376	25°	0,4226183	
86°	0,9975640	55°	0,8191521	24°	0,4067366	
85°	0,9961947	54°	0,8090170	23°	0,3907311	
84°	0,9945218	53°	0,7986355	22°	0,3746066	
83°	0,9925462	52°	0,7880107	21°	0,3583679	
82°	0,9902680	51°	0,7771460	20°	0,3420202	
81°	0,9876883	50°	0,7660444	19°	0,3255682	
80°	0,9848077	49°	0,7547096	18°	0,3090170	
79°	0,9816271	48°	0,7431448	17°	0,2923717	
78°	0,9781476	47°	0,7313537	16°	0,2756374	
77°	0,9743701	46°	0,7193398	15°	0,2588190	
76°	0,9702957	45°	0,7071068	14°	0,2419219	
75°	0,9659258	44°	0,6946584	13°	0,2249511	
74°	0,9612617	43°	0,6819984	12°	0,2079117	
73°	0,9563048	42°	0,6691306	11°	0,1908090	
72°	0,9510565	41°	0,6560590	10°	0,1736482	
71°	0,9455185	40°	0,6427876	9°	0,1564345	
70°	0,9396926	39°	0,6293204	8°	0,1391731	
69°	0,9335804	38°	0,6156615	7°	0,1218693	
68°	0,9271839	37°	0,6018150	6°	0,1045285	
67°	0,9205048	36°	0,5877853	5°	0,0871527	
66°	0,913545	35°	0,5735764	4°	0,0697565	
65°	0,9063078	34°	0,5591929	3°	0,0523360	

Siccome

Siccome inoltre è noto dall' Aſtronomia, che l' angolo ſotteſo dal ſemidiametro ſolare, ovvero l' arco *PD*, oppure *p* è uguale a 16′, il lembo inferiore del diſco ſolare non giugne a toccare l' orizzonte ſe non allorquando il centro del ſole ſi trova a 16′ di altezza. Conſeguentemente per le altezze del centro ſolare minori di un grado riſulta la ſeguente

TAVOLA.

Altezze del centro ſolare minori di un grado.	Illuminazioni prodotte da tutto il diſco ſolare ſopra un piano orizzontale.				
		43′	0, 0125079	22′	0, 0063995
		42′	0, 0122170	21′	0, 0061086
		41′	0, 0119261	20′	0, 0058177
		40′	1, 0116353	19′	0, 0055268
		39′	0, 0113444	18′	0, 0052360
59′	0, 0171616	38′	0, 0110535	17′	0, 0049451
58′	0, 0168707	37′	0, 0107627	16′	0, 0046542
57′	0, 0165799	36′	0, 0104718		
56′	0, 0162802	35′	0, 0101809		
55′	0, 0159982	34′	0, 0098900		
54′	0, 0157073	33′	0, 0095992		
53′	0, 0154165	32′	0, 0093083		
52′	0, 0151256	31′	0, 0090174		
51′	0, 0148348	30′	0, 0087265		
50′	0, 0145439	29′	0, 0084357		
49′	0, 0142530	28′	0, 0081448		
48′	0, 0139622	27′	0, 0078539		
47′	0, 0136713	26′	0, 0075630		
46′	0, 0133805	25′	0, 0072721		
45′	0, 0130896	24′	0, 0069813		
44′	0, 0127987	23′	0, 0066904		

Colle dottrine finqui eſpoſte ſi può ora dare il giuſto valore a quell' oſſervazione cardinale di *Bouguer*,

ſulla quale quel celebre Geometra fonda tutta la ſua teoria dell' indebolimento del lume degli aſtri nell' attraverſare l' atmoſfera terreſtre, e coſtruiſce la ſua Tavola delle forze del lume dopo il paſſaggio per l' atmoſfera nelle differenti altezze dell' aſtro. Paragona egli l' intenſità della luce lunare nell' altezza di 19° 16′ con quella che corriſponde all' altezza di 66°. 11′, e dopo un' attenta oſſervazione ſtabiliſce il rapporto delle due intenſità in quello di 1681 : 2500, cioè a dire ſecondo *Bouguer* la luna all' altezza apparente di 19°. 16′ ſopra l' orizzonte ſparge ſulla terra una luce un terzo più debole di quella che vi manda nell' altezza di 66°. 11′.

Ma ſe ſi applica a queſto caſo la noſtra formola π ſen. p^2 coſ. a, ſi trova ſubito il rapporto di quelle due intenſità eſpreſſo da 32996 : 91484; e però la luna ſenza l' alterazione prodotta dall' atmoſfera (da cui la noſtra formola preſcinde) getta ſulla terra una luce quaſi tre volte più debole all' altezza di 19°. 16′, che all' altezza di 66°. 11′; e ſiffatto indebolimento dee poi creſcere molto più avendo riguardo alla diminuzione del lume nel paſſaggio per l' atmoſfera, diminuzione tanto maggiore, quanto è più lungo il viaggio della luce per l' atmoſfera, oſſia quanto è più vicina la luna all'orizzonte. Quindi può farſi giudizio, qual poco conto dee farſi di quell' oſſervazione fondamentale di *Bouguer*, ed a qual inſtabile principio ſi appoggia tutta la ſua teoria della diſperſione e del diſſipamento, che ſoffre il lume nel tragittare l' atmoſfera terreſtre.

Finalmente il maneggio della predetta formola ci fa conoſcere un' altra verità poco o nulla atteſa, ed è la notabiliſſima diverſità nella forza della luce ſolare, e conſeguentemente nella chiarezza del giorno dall' una all' altra ſtagione dell' anno. Per cagion d' eſempio qui in Pavia, dove l' altezza meridiana del centro del

ſole nel giorno del ſolſtizio d' eſtate è di 68°. 17′, e nel ſolſtizio d' inverno è di 21°. 21′, ſi ſcuopre, che la chiarezza del giorno in ſul meriggio nel primo ſolſtizio ſta a quella dell' altro ſolſtizio come 92902 : 36406, cioè il meriggio del giorno ſolſtiziale eſtivo è oltre il doppio più chiaro e luminoſo del meriggio del giorno ſolſtiziale iemale, ed una tal proporzione fra lo ſplendore meridiano de' due ſolſtizj creſce poi maggiormente pel diſſipamento della luce ſolare nel ſuo tragitto attraverſo l' atmosfera, il qual diſſipamento è ſempre vie minore quanto è maggiore l' altezza del ſole ſull' orizzonte.

Reſta ora per ultimo da indagare l'illuminazione di qualunque parte viſibile del diſco ſolare nell'atto che attraverſa l'orizzonte. La formola eſprimente l'illuminazione prodotta da qualunque parte indeterminata del diſco del ſole ſopra un piano orizzontale ſi è trovata $= \frac{\Phi}{2\pi} \text{cof. } a + \frac{\text{ſen. } \Phi \text{ ſen. } a\,(p - \text{ſen. } p \text{ cof. } p)}{2\pi \text{ ſen. } p^2}$, nella quale p è l'angolo ſotteſo dal ſemidiametro del ſole, cioè $p = 16'$; 2π è la circonferenza del cerchio deſcritto col raggio 1, cioè $2\pi = 6,28318530$; a è la diſtanza del centro del ſole dal zenit; Φ è l'angolo al polo del ſegmento luminoſo ecc. Siccome in queſta formola è invariabile la quantità $\frac{p - \text{ſen. } p \text{ cof. } p}{2\pi \text{ ſen. } p^2}$ in tutte le differenti altezze del centro ſolare ſopra l' orizzonte, fia bene determinarla anticipatamente. Eſſendo dunque $2\pi = 360° = 21600'$, $p = 16'$, ſtarà $21600' : 16' :: 6,28318530$: al quarto, che ſarà p eſpreſſo in parti del raggio 1. Sicchè

log. 6,28318530 = 0,7981799
log. 16′ . . . . . = 1,2041200
2,0022999
log. 21600′ . . . . = 4,3344537
7,6678462 numero = 0,0046542

Dunque $p = 0,0046542$

Parimente per trovare sen. p cos. p, che dee sottrarsi da p si fa

log. sen. p .... $= 7,6678445$

log. cos. p .... $= 9,9999953$

$7,6678398$ numero $= 0,0046541$

Perciò p — sen. p cos. p ..... $= 0,0000001$

Si trova ora log. $\frac{2\pi \text{ sen. } p^2}{p - \text{sen. } p \text{ cos. } p}$ così:

log. 2π ..... $= 0,7981799$

2 log. sen. p ..... $= 5,3356890$

log. 2π sen. p^2 .. $= 6,1338689$

log. $\frac{1}{p - \text{sen. } p \text{ cos. } p}$ .. $= 7,0000000$

log. $\frac{2\pi \text{ sen. } p^2}{p - \text{sen. } p \text{ cos. } p}$ .... $= 3,1338689$, che è il logaritmo da sottrarsi da log. sen. φ sen. a per avere il logaritmo del secondo termine della formola, cioè di $\frac{\text{sen. } \varphi \text{ sen. } a\,(p - \text{sen. } p \text{ cos. } p)}{2\pi \text{ sen. } p^2}$. Ecco dunque il prospetto

$2\pi' = 21600'$ log. $2\pi' = 4,3344537$

$2\pi = 6,2831853$ log. $\frac{2\pi \text{ sen. } p^2}{p - \text{sen. } p \text{ cos. } p} = 3,1338689$

PARTE I.

Altezze del centro solare sopra l'orizzonte.

CASO I.

Altezza del centro del sole sopra l'orizzonte $= 15'$; onde $a = 89° . 45'$; e così $\varphi = 90° +$ arc. sen. $\frac{15}{16}$. Ma

log. $\frac{15}{16}$ = 9, 9719713, a cui corrisponde arc. = 69°. 38′.

Dunque φ = 90° + 69° 38′ = 159°. 38′ = 9578′.

Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi}$ cos. $a = \frac{9578}{21600}$ sen. 15′. Perciò

log. 9578 = 3, 9812748
log. sen. 15′ ... = 7, 6398160
1, 6210908
log. 21600 ... = 4, 3344537
7, 2866371 num. ... = 0, 0019348

sen. φ = sen. 159°. 38′ = sen. 20°. 22′
log. sen. φ ... = 9, 5416126
log. sen. a ... = 9, 9999959
9, 5416085
— 3, 1338689
6, 4077396 num. ... = 0, 0002557

Dunque l'illuminazione del semisegmento superiore all'orizzonte ..... = 0, 0021905
e l'illuminazione di tutto quel segmento superiore all'orizzonte essendo doppia, è ..... = 0, 0043810 (*A*)

CASO II.

Altezza del centro solare sopra l'orizzonte = 14′; perciò a = 89°. 46′; onde φ = 90° + arc. sen. $\frac{14}{16}$ = 90° + arc. sen. $\frac{7}{8}$. Ma log. $\frac{7}{8}$ = 9, 9420080, a cui corrisponde arc. = 61°. 3′.

Dunque φ = 151°. 3′ = 9063′. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi}$ cos. $a = \frac{9063}{21600}$ sen. 14′. Perciò

log. 9063 = 3, 9572720
log. sen. 14′ = 7, 6098530
1, 5671250
log. 21600 = 4, 3344537
7, 2326713 num. = 0, 0017087

sen. φ = sen. 151°. 3′ = sen. 28°. 57′

log. sen. φ .... = 9, 6848868
log. sen. a ... = 9, 9999964
9, 6848832
— 3, 1338689
6, 5510143 num. = 0, 0003556

Dunque l'illuminazione del semisegmento è = 0, 0020643
e però l'illuminazione doppia, cioè di
tutto il segmento è . . . . . = 0, 0041286
(B)

CASO III.

Altezza del centro solare = 13′, quindi $a = 89°. 47'$; e però $\varphi = 90° + \text{arc. sen. } \frac{13}{16}$. Ma log. $\frac{13}{16} = 9, 9098233$, a cui corrisponde arc. = 54°. 21′. Dunque $\varphi = 144°. 21' = 8661'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{8661}{21600}$ sen. 13′. Sicchè

log. 8661 ... = 3, 9375680
log. sen. 13′ .. = 7, 5776686
1, 5152366
log. 21600 = 4, 3344537
7, 1807829 num. = 0, 0015163

sen. φ = sen. 144°. 21′ = sen. 35°. 39′

log. sen. $\varphi = 9, 7655436$
log. sen. $a = 9, 9999969$

$9, 7655405$
$- 3, 1338689$

$6, 6316716$ num. $= 0, 0004282$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . . $= 0, 0019445$
e l'illuminazione totale . . . . . $= 0, 0038890$
(C)

CASO IV.

Altezza del centro solare $= 12'$; cioè $a = 89°. 48'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. sen. $\frac{3}{4}$. Ma log. $\frac{3}{4} = 9,8750612$, a cui corrisponde arc. $= 48°. 35'$; perciò $\varphi = 138°. 35' = 8315'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{8315}{21600}$ sen. $12'$. Sicchè

log. $8315 = 3, 9198623$
log. sen. $12' = 7, 5429065$

$1, 4627688$
log. $21600 = 4, 3344537$

$7, 1283151$ num. $= 0, 0013437$

sen. $\varphi =$ sen. $138°. 35' =$ sen. $41°. 25'$. Onde

log. sen. $\varphi = 9, 8205496$
log. sen. $a = 9, 9999974$

$9, 8205470$
$- 3, 1338689$

$6, 6866781$ num. $= 0, 0004860$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . . $= 0, 0018297$
e l'illuminazione totale . . . . . $= 0, 0036594$
(D)

CASO V.

Altezza del centro ſolare = 11′, ovvero a = 89°. 49′; onde φ = 90° + arc. ſen. $\frac{11}{16}$. Ma log. $\frac{11}{16}$ = 9, 8372727, a cui corriſponde arc. 43°. 26′. Sicchè φ = 133°. 26′ = 8006′. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. a = $\frac{8006}{21600}$ ſen. 11′.

log. 8006 = 3, 9034156
log. ſen. 11′ = 7, 5051181
1, 4085337
log. 21600 = 4, 3344537
7, 0740800 num. = 0, 0011860

ſen. φ = ſen. 133°, 26′ = ſen. 46°. 34′. Dunque
log. ſen. φ = 9, 8610412
log. ſen. a = 9, 9999978
9, 8610390
— 3, 1338689
6, 7271701 num. = 0, 0005335

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . . = 0, 0017195
e l' illuminazione totale . . . . . = 0, 0034390 (*E*)

CASO VI.

Altezza del centro ſolare = 10′, ovvero a = 89°. 50′., onde φ = 90° + arc. ſen. $\frac{5}{8}$. Ma log. $\frac{5}{8}$ = 9, 7958800, a cui corriſponde arc. = 38°. 41′. Dunque

Dunque $\varphi = 128°.\ 41' = 7721'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{27'}$ cof. a $= \frac{7721}{21600}$ ſen. $10'$. Dunque

log. $7721 = 3,\ 8876736$
log. ſen. $10' = 7,\ 4637255$
$1,\ 3513991$
log. $21600 = 4,\ 3344537$
$7,\ 0169464$ num. $= 0,\ 0010398$

ſen. φ = ſen. $108°.\ 41'$ = ſen. $51°.\ 19'$. Onde

log. ſen. $\varphi = 9,\ 8924354$
log. ſen. $a = 9,\ 9999982$
$9,\ 8924336$
$- 3,\ 1338689$
$6,\ 7585647$ num. $= 0,\ 0005735$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . . $= 0,\ 0016133$
e l'illuminazione totale . . . . . $= 0,\ 0032266$
(*F*)

CASO VII.

Altezza del centro ſolare $= 9'$, cioè $a = 89°.\ 51'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{9}{16}$. Ma log. $\frac{9}{16} = 9,\ 7531225$, a cui corriſponde arc. $= 34°.\ 30'$. Dunque $\varphi = 124°.\ 30' = 7470'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{27'}$ cof. $a = \frac{7470}{21600}$ ſen. $9'$; quindi

log. $7470 = 3,\ 8733206$
log. ſen. $9' = 7,\ 4179681$
$1,\ 2912887$
log. $21600 = 4,\ 3344537$
$6,\ 9568350$ num. $= 0,\ 0009054$

sen. φ = sen. 124°. 30′ = sen. 55°. 30′

log. sen. φ = 9, 9159937
log. sen. a = 9, 9999985

9, 9159922
— 3, 1338689

6, 7821233 num. = 0, 0006055

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0015109
e l'illuminazione totale . . . . . = 0, 0030218
(*G*)

CASO VIII.

Altezza del centro solare = 8′, cioè a = 89°. 52′; onde φ = 90° + arc. sen. $\frac{1}{2}$ = 90° + 30° = 120° = 7200′.

Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{7200}{21600}$ sen. 8′. Sicchè

log. 7200 = 3, 8573325
log. sen. 8′ = 7, 3668157

1, 2241482
log. 21600 = 4, 3344537

6, 8896945 num. = 0, 0007757

sen. φ = sen. 120° = sen. 60°. Dunque

log. sen. φ = 9, 9375306
log. sen. a = 9, 9999988

9, 9375294
— 3, 1338689

6, 8036605 num. = 0, 0006363

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0014120
e l'illuminazione totale . . . . . = 0, 0028240
(*H*).

CASO IX.

Altezza del centro ſolare $= 7'$; ovvero $a = 89°.53'$; onde $\phi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{7}{16}$. Ma log. $\frac{7}{16} = 9,6409780$, a cui corriſponde arc. $= 25°.56'$. Dunque $\phi = 115°.56' = 6956'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cof. $a = \frac{6956}{21600}$ ſen. $7'$. Sicchè

log. $6956 = 3, 8423596$
log. ſen. $7' = 7, 3088239$
$1, 1511835$
log. $21600 = 4, 3344537$
$6, 8167298$ num. $= 0, 0006557$

ſen. $\phi =$ ſen. $115°.56' =$ ſen. $64°.4'$. Sicchè

log. ſen. $\phi = 9, 9539063$
log. ſen. $a = 9, 9999991$
$9, 9539054$
$- 3, 1338689$
$6, 8200365$ num. $= 0, 0006608$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . . $= 0, 0013165$
e l'illuminazione totale . . . . . $= 0, 0026330$
(I)

CASO X.

Altezza del centro ſolare $= 6'$, cioè $a = 89°.54'$; onde $\phi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{3}{8}$. Ma log. $\frac{3}{8} = 9, 5740312$, a cui corriſponde arc. $= 22°.1'$. Dunque $\phi = 112°.1' = 6721'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cof. $a = \frac{6721}{21600}$ ſen. $6'$. Onde

log. 6721 = 3, 8274339
log. sen. 6′ = 7, 2418771
1, 0693110
log. 21600 = 4, 3344537
6, 7348573 num. = 0, 0005431

sen. φ = sen. 112°. 1′ = sen. 67°. 59′. Sicchè

log. sen. φ = 9, 9671148
log. sen. a = 9, 9999993
9, 9671141
— 3, 1338689
6, 8332452 num. = 0, 0006811

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0012242
e l'illuminazione totale . . . . . = 0, 0024484
(L)

CASO XI.

Altezza del centro solare = 5′, cioè $a = 89°.55'$; onde $\varphi = 90° + \text{arc. sen.} \frac{5}{16}$ Ma log. $\frac{5}{16} = 9,4948500$, a cui corrisponde arc. = 18°. 13′. Dunque $\varphi = 108°.13' = 6493'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{6493}{21600}$ sen. 5′.

log. 6493 = 3, 8124454
log. sen. 5′ = 7, 1626960
0, 9751414
log. 21600 = 4, 3344537
6, 6406877 num. = 0, 0004372

sen. φ = sen. 108°. 13′ = sen. 71°. 47′. Onde

log. sen. φ = 9, 9776693
log. sen. a = 9, 9999995

9, 9776688
— 3, 1338689

6, 8437999 num. = 0, 0006979

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0011351
e l'illuminazione intera . . . . . = 0, 0022702
(*M*)

CASO XII.

Altezza del centro solare = 4′, cioè a = 89°. 56′; onde φ = 90°. + arc. sen. $\frac{1}{4}$. Ma log. $\frac{1}{4}$ = 9, 3979400, a cui corrisponde arc. = 14°. 29′. Dunque φ = 104°. 29′ = 6269′. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. a = $\frac{6269}{21600}$ sen. 4′. Perciò

log. 6269 = 3, 7971983
log. sen. 4′ = 7, 0657860

0, 8629843
log. 21600 = 4, 3344537

6, 5285306 num. = 0, 0003377

sen. φ = sen. 104°. 29′ = sen. 75°. 31′. Dunque

log. sen. φ = 9, 9859742
log. sen. a = 9, 9999997

9, 9859739
— 3, 1338689

6, 8521050 num. = 0, 0007114

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0010491
e l'illuminazione totale . . . . . = 0, 0020982
(*N*)

CASO XIII.

Altezza del centro ſolare $= 3'$, cioè $a = 89°.57'$; onde $\varphi = 90° + \text{arc. ſen.} \frac{3}{16}$. Ma log. $\frac{3}{16} = 9,2730012$, a cui corriſponde arc. $= 10°.48'$; onde $\varphi = 100°.48' = 6048'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. $a = \frac{6048}{21600}$ ſen. $3'$. Onde

log. 6048 $= 3,7816118$
log. ſen. $3' = 6,9408473$
$0,7224591$
log. 21600 $= 4,3344537$
$6,3880054$ num. $= 0,0002443$

ſen. φ = ſen. $100°.48'$ = ſen. $79°.12'$. Dunque

log. ſen. $\varphi = 9,9922385$
log. ſen. $a = 9,9999998$
$9,9922383$
$- 3,1338689$
$6,8583694$ num. $= 0,0007217$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . . $= 0,0009660$
e l'illuminazione totale . . . . . $= 0,0019320$
(O)

CASO XIV.

Altezza del centro ſolare $= 2'$, cioè $a = 89°.58'$; onde $\varphi = 90° + \text{arc. ſen.} \frac{1}{8}$. Ma log. $\frac{1}{8} = 9,0969100$, a cui corriſponde arc. $= 7°.11'$. Dunque $\varphi = 97°.11' = 5831'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi}$ cof. $a = \frac{5831}{21600}$ ſen. $2'$. Onde

log. 5831 = 3, 7657430
log. sen. 2′ = 6, 7627561

0, 5284991
log. 21600 = 4, 3344537

6, 1940454 num. = 0, 0001563

sen. φ = sen. 97°. 11′ = sen. 82°. 49′. Sicchè

log. sen. φ = 9, 9965778
log. sen. a = 9, 9999999

9, 9965777
— 3, 1338689

6, 8627088 num. = 0, 0007290

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0008853
e l' illuminazione totale . . . . . = 0, 0017706
(*P*).

CASO XV.

Altezza del centro solare = 1′, cioè $a = 89°.59'$. Onde $\varphi = 90° + \text{arc. sen. } \frac{1}{16}$. Ma log. $\frac{1}{16} = 8,7958800$, a cui corrisponde arc. = 3°. 35′. Dunque $\varphi = 93°.35' = 5615'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{ cos. } a = \frac{5615}{21600} \text{ sen. } 1'$; vale a dire

log. 5615 = 3, 7493498
log. sen. 1′ = 6, 4637261

0, 2130759
log. 21600 = 4, 3344537

5, 8786222 num. = 0, 0000756

sen. φ = sen. 93°. 35′ = sen. 86°. 25′. Dunque

log. sen. φ = 9, 9991501
log. sen. a = 9, 9999999

9, 9991500
— 3, 1338689

6, 8652811 num. = 0, 0007333

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0008089
e l' illuminazione intera . . . . . = 0, 0016178 (Q).

CASO XVI.

Altezza del centro solare = 0, cioè $a = 90°$, onde $\varphi = 90° +$ arc. sen. $0 = 90°$. Perciò essendo in tal caso cos. $a = 0$, svanisce il primo termine della formola, e resta il secondo, che è come segue

log. sen. φ = 10, 0000000
log. sen. a = 10, 0000000

20, 0000000
— 3, 1338689

6, 8661311 num. = 0, 0007347

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0007347
e l' illuminazione intera . . . . . = 0, 0014694 (R).

PARTE II.

Depressione del centro solare sotto l' orizzonte.

CASO I.

Altezza negativa del centro solare, cioè depressione = 1'; dunque $a = 90°$. 1'. In tutti questi casi si troverà

verà il valore di $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{1}{16} = 90° - 3°. 35'$ (n°. XV) $= 86°. 25' = 5185'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{5185}{21600} \times -\text{sen. } 1' = -\frac{5185}{21600}$ sen. $1'$. Sicchè

log. 5185 = 3, 7147488
log. sen. 1′ = 6, 4637261
0, 1784749
log. 21600 = 4, 3344537
5, 8440212 num. = − 0, 0000698

Ora è manifesto, che il secondo termine della formola è precisamente quello stesso che si è trovato al n°. XV, cioè 0, 0007333
da cui sottratto il precedente si ha l' illuminazione del semisegmento = 0, 0006635
e l' illuminazione totale . . . . . = 0, 0013270 (*A*).

CASO II.

Depressione del centro solare = 2′; dunque $a = 90°. 2'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{1}{8} = 90° - 7°. 11'$ (n° XIV) $= 82°. 49' = 4969'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = -\frac{4969}{21600}$ sen. $2'$. Sicchè

log. 4969 = 3, 6962690
log. sen. 2′ = 6, 7627561
0, 4590251
log. 21600 = 4, 3344537
6, 1245714 num. = − 0, 0001332

Il secondo termine della formola è lo stesso, che si è trovato al n°. XIV; cioè 0, 0007290

Dunque sarà l' illuminazione del semisegmento . . . . . = 0, 0005958
e l' illuminazione totale . . . . . = 0, 0011916 (*B*).

CASO III.

Depressione del centro solare = 3', cioè $a = 90°.3'$, onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{3}{16} = 90° - 10°.48' = 79°.12'$ = 4752'. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{cos.} a = -\frac{4752}{21600} \text{sen.} 3'$, cioè

log. 4752 = 3, 6768764
log. sen. 3' = 6, 9408473
0, 6177237
log. 21600 = 4, 3344537
6, 2832700 num. = — 0, 0001919

Il secondo termine coincide con quello del n°. XIII, cioè si trova . . . . . = 0, 0007217

Dunque l' illuminazione del semisegmento . . . . . = 0, 0005298
e l' illuminazione totale . . . . . = 0, 0010596 (*C*).

CASO IV.

Depressione del centro solare = 4', cioè $a = 90°.4'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{1}{4} = 90° - 14°.29' = 75°.31'$ = 4531'. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{cos.} a = -\frac{4531}{21600} \text{sen.} 4'$, cioè

log. 4531 = 3, 6561941
log. sen. 4′ = 7, 0657860
0, 7219801
log. 21600 = 4, 3344537
6, 3875264 num. = — 0, 0002441

Il secondo termine coincide con quello del n°. XII, cioè si trova . . . . . = 0, 0007114

Dunque l' illuminazione del semisegmento . . . . . = 0, 0004673
e l' illuminazione intera . . . . . = 0, 0009346 (*D*).

CASO V.

Depressione del centro solare = 5′, cioè $a = 90°.5'$; onde $\phi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{5}{16} = 90° - 18°.13' = 71°.47'$ = 4307′. Onde $\frac{\phi'}{2\pi'}$, cos. $a = -\frac{4307}{21600}$ sen. 5′; perciò

log. 4307 = 3, 6341749
log. sen. 5′ = 7, 1626960
0, 7968709
log. 21600 = 4, 3344537
6, 4624172 num. = — 0, 0002900

Il secondo termine coincide con quello del n°. XI; cioè si trova . . . . . = 0, 0006979

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0004079
e quindi sarà l' illuminazione intera = 0, 0008158 (*E*).

CASO VI.

Depreſſione del centro ſolare $= 6'$, cioè $a = 90°.\ 6'$. Onde $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{3}{8} = 90° - 22°.\ 1' = 67°.\ 59'$ $= 4079'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. $a = -\frac{4079}{21600}$ ſen. $6'$. Perciò

log. 4079 = 3, 6105537
log. ſen. $6'$ = 7, 2418771
0, 8524308
log. 21600 = 4, 3344537
6, 5179771 num. = — 0, 0003296

Il ſecondo termine è lo ſteſſo che quello del n°. x, cioè ſi trova . . . . . = 0, 0006811

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento ſarà . . . . . = 0, 0003515
e quindi ſi ricava l' illuminazione intera . . . . . = 0, 0007030
(*F*).

CASO VII.

Depreſſione del centro ſolare $= 7'$, cioè $a = 90°.\ 7'$; quindi $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{7}{16} = 90° - 25°.\ 56' = 64°.\ 4'$ $= 3844'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. $a = -\frac{3844}{21600}$ ſen. $7'$. Dunque

log. 3844 = 3, 5847834
log. ſen. $7'$ = 7, 3088239
0, 8936073
log. 21600 = 4, 3344537
6, 5591536 num. = — 0, 0003624

Il ſecondo termine coincide con quello del n°. IX, cioè ſi trova . . . . . = , 0 , 0006608

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . . = 0 , 0002984
e però naſce l' illuminazione intera = 0 , 0005968 (*G*).

CASO VIII.

Depreſſione del centro ſolare = 8′, cioè $a = 90°.8'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{1}{2} = 90° - 30° = 60° = 3600'$.

Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{cof. } a = -\frac{3600}{21600} \text{ ſen. } 8'$. Sicchè

log. 3600 = 3 , 5563025
log. ſen. 8′ = 7 , 3668157
0 , 9231182
log. 21600 = 4 , 3344537
6 , 5886645 num. = — 0 , 0003879

Il ſecondo termine coincide con quello del n°. VIII prec., e però ſi trova = 0 , 0006363

Dunque ne verrà, che l' illuminazione del ſemiſegmento ſarà . . . . . = 0 , 0002484
onde l' illuminazione intera . . . . = 0 , 0004968 (*H*).

CASO IX.

Depreſſione del centro ſolare = 9′, cioè $a = 90°.9'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{9}{16} = 90° - 34°.30' = 55°.30' = 3330'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{cof. } a = -\frac{3330}{21600} \text{ ſen. } 9'$, cioè

log. 3330 = 3, 5224442
log. sen. 9′ = 7, 4179681
0, 9404123
log. 21600 = 4, 3344537
6, 6059586 num. = — 0, 0004036

Il secondo termine coincide con quello del n.° VII Parte prima, onde si trova . . = 0, 0006055

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0002019
e però l'illuminazione intera . . . . = 0, 0004038 (*I*)

CASO X.

Depressione del centro solare = 10′, cioè $a = 90°.10'$, onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.}\frac{5}{8} = 90° - 38°.41' = 51°.19' =$ 3079′. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}\text{cos. } a = -\frac{3079}{21600}\text{ sen. } 10'$; quindi

log. 3079 = 3, 4884097
log. sen. 10′ = 7, 4637255
0, 9521352
log. 21600 = 4, 3344537
6, 6176815 num. = — 0, 0004146

Il secondo termine coincide con quello del n.° VI. della prima Parte, onde si trova = 0, 0005735

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0001589
e però l'illuminazione intera . . . = 0, 0003178 (*L*)

CASO XI.

Depreſſione del centro ſolare = 11′, cioè $a = 90°.\ 11'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.}\ \frac{11}{16} = 90° - 43°.\ 26' = 46°.\ 34' = 2794'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}\ \text{cof.}\ a = -\frac{2794}{21600}\ \text{ſen.}\ 11'$; quindi

log. 2794 = 3, 4462264
log. ſen. 11′ = 7, 5051181
0, 9513445
log. 21600 = 4, 3344537
6, 6168908 num. = — 0, 0004139

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° v della Parte prima, ond'è . . . . = 0, 0005335

Sicchè l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . . = 0, 0001196
e l'illuminazione intera . . . . . = 0, 0002392
(M)

CASO XII.

Depreſſione del centro ſolare = 12′, cioè $a = 90°.\ 12'$, onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.}\ \frac{3}{4} = 90° - 48°.\ 35' = 41°.\ 25' = 2485'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}\ \text{cof.}\ a = -\frac{2485}{11600}\ \text{ſen.}\ 12'$, cioè

log. 2485 = 3, 3953264
log. ſen. 12′ = 7, 5429065
0, 9382329
log. 21600 = 4, 3344537
6, 6037792 num. = — 0, 0004016

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° IV. della prima Parte, cioè . . . = 0, 0004860

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . . = 0, 0000844

Dunque l'illuminazione intera . . . . = 0, 0001688 (*N*)

CASO XIII.

Depreſſione del centro ſolare = 13′, cioè $a = 90°.13'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{13}{16} = 90° - 54°.21' = 35°.39' = 2139'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{ cof. } a = -\frac{2139}{21600} \text{ ſen. } 13'$; cioè.

log. 2139 = 3, 3302108
log. ſen. 13′ = 7, 5776686
0, 9078794
log. 21600 = 4, 3344537
6, 5734275 num. = — 0, 0003745

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° III. Parte prima, onde ſi trova = 0, 0004282

Sicchè l'illuminazione del ſemiſegmento = 0, 0000537
e però l'illuminazione intera . . . . = 0, 0001074 (*O*)

CASO XIV.

Depreſſione del centro ſolare = 14′, cioè $a = 90°.14'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{7}{8} = 90° - 61°.3' = 28°.57' = 1737'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{ cof. } a = -\frac{1737}{21600} \text{ ſen. } 14'$, cioè

log.

log. 1737 = 3, 2397998
log. sen. 14′ = 7, 6098530
0, 8496528
log. 21600 = 4, 3344537
6, 5151991 num. = — 0, 0003275
Il secondo termine si ha dal n.° II. della prima Parte, cioè si trova . . . . = 0, 0003556
Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0000281
e l'illuminazione intera . . . . . = 0, 0000562
(*P*)

CASO XV.

Depressione del centro solare = 15′, cioè $a = 90°.15'$; onde $\phi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{15}{16} = 90° - 69°.38' = 20°.22'$ $= 1222'$; onde $\frac{\phi'}{2\pi'} \text{ cos. } a = -\frac{1222}{21600}$ sen. 15′, cioè

log. 1222 = 3, 0870712
log. sen. 15′ = 7, 6398160
0, 7268872
log. 21600 = 4, 3344537
6, 3924335 num. = — 0, 0002468
Il termine secondo della formola si ha dal n.° I. della Parte prima, cioè si trova = 0, 0002557
Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . . = 0, 0000089
e l'illuminazione totale . . . . . = 0, 0000178
(*Q*)

Per ritrovare l'illuminazione del semidisco solare superiore al diametro orizzontale quando il disco tocca col lembo inferiore l'orizzonte, convien riflettere, che

in tal caso è $a = 89°.44'$, ed inoltre $\varphi = 90° = \frac{2}{4}\pi$. Quindi il primo termine della formola, cioè $\frac{\varphi}{2\pi}$ cos. a si cangia in $\frac{1}{4}$ cos. $a = \frac{1}{4} \times 0,0046542 = 0,0011635$. Il secondo termine poi della formola è il seguente

log. sen. $a = 9,9999953$
$\quad - 3,1338689$
$\quad 6,8661264$ num. $= 0,0007347$

Dunque l'illuminazione del quadrante superiore è $= 0,0018982$, e l'illuminazione del semidisco superiore al diametro orizzontale è $= 0,0037964$.

Se ora si sottrae questa illuminazione del semidisco superiore da quella dell'intero disco, che è $0,0046542$, il residuo dà l'illuminazione del semidisco inferiore al diametro orizzontale, la quale in conseguenza sarà $= 0,0008578$. Dunque (n.° XVI parte I.) sta l'illuminazione del semidisco inferiore (nel caso che tocchi l'orizzonte) all'illuminazione del medesimo rovesciato, cioè avente il diametro sull'orizzonte come sta 8578 a 14694. Ciò presenta una specie di paradosso, perchè quando il semidisco ha il suo diametro sull'orizzonte tramanda più obbliqui que' raggi, che sono più copiosi, cioè quelli che emanano dalle sue parti più basse e più larghe, e meno obliqui i raggi meno copiosi, ovvero emananti dalle sue parti più alte e più anguste; ed il contrario precisamente succede nel semidisco inverso avente il semidiametro orizzontale in alto; perlochè sembrerebbe, che questo e non quello dovesse produrre una maggiore illuminazione; ed è anche assai strano, che questo eccesso sia più di tre quarti dell'illuminazione minore.

Un paradoſſo così nuovo ed inaſpettato merita, che vi ci fermiamo un po' ſopra, ed eſaminiamo, ſe anche nelle maggiori altezze del ſole ſopra l'orizzonte ſi trovi eſſer vero, che il ſemidiſco diritto del ſole mandi più luce ſulla terra, che non ne manda il ſemidiſco inverſo, intendendo per ſemidiſco diritto il ſuperiore al diametro orizzontale in tale data altezza del centro ſolare, e per ſemidiſco inverſo l'inferiore al diametro orizzontale quando il centro del ſole ſi è già inoltrato ad un'altezza maggiore della precedente di ſedici minuti.

I.

Suppongo adunque in primo luogo, che l'altezza del centro ſolare $= 89°.\ 44'$, cioè $a = 16'$, e quindi per ottenere l'illuminazione del quadrante ſuperiore al diametro orizzontale prendo $\varphi = 90°$. Laonde $\frac{\varphi}{2\pi}$ cof. a

$= \frac{1}{4}$ ſen. $89°.\ 44' = \frac{1}{4} \times 0,\ 9999892 = 0,\ 2499973.$

Parimente

log. ſen. $a = 7,\ 6678445$

$- 3,\ 1338689$

$4,\ 5339756$ num. $= 0,\ 0000034$

Dunque l'illuminazione del quadrante $= 0,\ 2500007$, e però l'illuminazione del ſemidiſco *diritto* $= 0,\ 5000014$. Alzatoſi il centro ſolare di altri $16'$, cioè giunto al zenit, è evidente, che in tal ſituazione ogni ſemidiſco del ſole illumina l'orizzonte terreſtre egualmente, e conſeguentemente l'illuminazione del ſemidiſco *inverſo* è la metà di quella del diſco intero, cioè $= 0,\ 5000000$, che è un poco minore della ritrovata pel ſemidiſco *diritto*. Suſſiſte adunque il paradoſſo di prima.

II.

Paſſo all'altezza del centro ſolare $= 45°$, cioè $a = 45°$, e piglio come prima $\varphi = 90°$. Sicchè $\frac{\varphi}{2\pi}$ cof. $a = \frac{1}{4}$ ſen. $45° = \frac{1}{4} \times 0,7071068 = 0,1767767$. Inoltre

log. ſen. $a = 9,8494850$
$- 3,1338689$
$6,7156161$ num. $= 0,0005195$

Onde l'illuminazione del quadrante ſuperiore $= 0,1772962$, e l'illuminazione del ſemidiſco *diritto* $= 0,3545924$.

Aſcenda ora il centro del ſole per altri $16'$, e troviſi in queſto ſtato l'illuminazione del ſemidiſco ſuperiore al diametro orizzontale, e queſta ſottraggaſi dall'illuminazione già nota di tutto il diſco; il reſiduo ſarà l'illuminazione del ſemidiſco inferiore, che è appunto l'*inverſo* riſpettivamente al ſemidiſco dianzi conſiderato. Fatta pertanto l'altezza del centro ſolare $= 45°.16'$, cioè $a = 44°.44'$; $\varphi = 90°$; ſi deduce $\frac{\varphi}{2\pi}$ cof. $a = \frac{1}{4}$ ſen. $45°.16' = \frac{1}{4} \times 0,7103901 = 0,1775975$.

Inoltre

log. ſen. $a = 9,8474542$
$- 3,1338689$
$6,7135853$ num. $= 0,0005171$

Dunque l'illuminazione del quadrante ſuperiore $= 0,1781146$, e l'illuminazione del ſemidiſco ſuperiore $= 0,3562292$. Ora queſta dee ſottrarſi da quella di tutto il diſco, la quale ſi trova immantinente con cercare il valore di cof. a, a cui unicamente ſi riduce la noſtra formola generale con aſſumere $\varphi = 2\pi$. Sicchè l'illuminazione di tutto il diſco ſi rinviene $= 0,7103901$,

e fatta quindi l'indicata ſottrazione proviene 0,3541609 per l'illuminazione del ſemidiſco inferiore, cioè dell'*inverſo* riſpetto a quel di prima nell'altra ſtazione del centro ſolare. E qui pure ſi ſcorge, che il ſemidiſco *diritto* illumina più che l'*inverſo*.

Reſta finalmente a vedere, ſe ciò pur ſi verifica riguardo ad un ſegmento del diſco ſolare compreſo fra il diametro ed una corda parallela, conſiderando un tal ſegmento in due ſituazioni, prima col diametro giacente ſull'orizzonte terreſtre, che chiameremo ſegmento *diritto*, poi colla corda ſull'orizzonte e col diametro in alto, che diremo ſegmento *inverſo*. Suppongo la corda parallela diſtante dal diametro per la metà del raggio, ed eſſendoſi già ritrovata l'illuminazione generata dal ſemidiſco viſibile quando l'orizzonte taglia per mezzo il diſco ſolare, ſottraggo da eſſa l'illuminazione prodotta da quel ſegmento di detto ſemidiſco, che ha per ſaetta la metà del raggio, e col reſiduo ottengo l'illuminazione eccitata dal ſegmento *diritto* propoſto. Ma per avere in tal ſuppoſto l'illuminazione nata dal ſegmento della ſaetta $= \frac{1}{2}$, divenendo $a = 90°$, $\varphi = 60°$, ed annullandoſi il primo termine della noſtra formola, ſi ritrova pel valore del ſecondo termine

log. ſen. φ = 9, 9375306
— 3, 1338689

6, 8036617 num. = 0, 0006363

il qual numero duplicato, cioè 0, 0012726 eſprime l'illuminazione proveniente dal detto ſegmento, e queſta ſottratta dall'illuminazione 0, 0014694 del ſemidiſco viſibile laſcia un reſiduo 0, 0001968, che rappreſenta l'illuminazione del ſegmento *diritto* di cui ſi tratta. Per ritrovar poi quella del ſegmento *inverſo* è manifeſto che baſta dall'illuminazione del ſegmento

visibile, quando il centro del sole ha 8′ di altezza sopra l'orizzonte, sottrarre l'illuminazione del semicerchio superiore, e se quella, come è stato già dimostrato, è = o, 0028240, questa si determina come segue: Diventa in quest'ipotesi $a = 89°.52'$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{\varphi}{2\pi}$ cos. $a = \frac{1}{4}$ cos. $a = \frac{1}{4}$ sen. $8' = \frac{1}{4} \times 0,0023271 = 0,0005818$, che sarà il valore del primo termine della nostra formola. Pel valore del secondo si ha

log. sen. a = 9, 9999973
— 3, 1338689
6, 8661284 num. = o, 0007347.

Dunque l'illuminazione del quadrante superiore = o, 0013165, e del semicerchio = o, 0026330. Sottraendo quest'ultima da o, 0028240 resta o, 0001910 per l'illuminazione del segmento *inverso*, la quale in conseguenza è minore che non è quella del semidisco *diritto*. Ed ecco, che l'indicato paradosso anche in questo caso s'incontra.

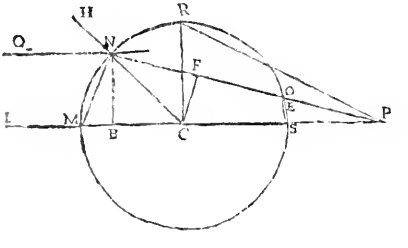
Chiuderò questo breve Scritto con un famoso Problema relativo alla misura della luce proposto da *Newton* nel suo Trattato delle *Flussioni e Serie Infinite* in questi termini: *To determine such a part of a Spherical Superficies, which can be illuminated, in its farther part, by light coming from a great distance, and which is refracted by the nearer Hemisphere*. Siccome nè egli, nè altri ch'io sappia ha data la soluzione d'un tal Problema, non eccettuando neppure il rinomato *Colson*, che illustrò con un ampio comento quell'operetta di *Newton*, ho creduto esser pregio dell'opera d'intraprenderne la disamina, e di metter qui sotto gli occhi del Pubblico il seguente scioglimento.

PROBLEMA.

Determinare quella tal parte posteriore d' una superficie sferica, che può essere illuminata dalla luce vegnente da gran lontananza e rotta nell' emisfero anteriore.

SOLUZIONE.

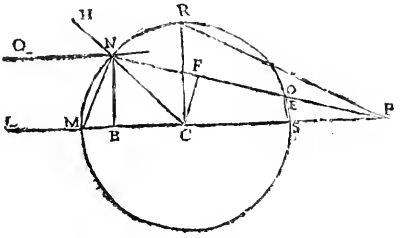
Sia QN uno de' raggi scagliati da lungi contro il globo MNS, i quali per l' immensa distanza, da cui partono, si considerano come tra sè paralleli. Tagliato il globo con un piano, che passa pel suo centro C e pel raggio QN, e nella sezione circolare MNS condotto il diametro SM parallelo ai raggi di luce, si supponga, che il raggio QN rompendosi in N pieghi nella direzione NP, ed incontri la circonferenza del cerchio in O, ed in P il diametro prolungato; sicchè guidato il semidiametro CN prodotto in H sia QNH, ovvero NCM l' angolo d' incidenza, e CNP l' angolo di rifrazione. Se ora si mena la perpendicolare NB sul diametro SM, e le sottese SO, MN; e si assume $= n$ il rapporto del seno dell' angolo d' incidenza al seno dell' angolo di refrazione; il semidiametro $= r$; la retta $CP = x$; è



facile accorgersi, che SO è la corda della metà di quel segmento sferico, la di cui superficie curva viene illuminata da tutti que' raggi, che cadendo sull'emisfero anteriore occupano di qua e di là dal punto di mezzo M una larghezza doppia dell' arco MN. Siccome poi allorchè il raggio QN è estremamente vicino al diametro SM, la corda SO riesce piccolissima, e questa va poi crescendo quando il raggio QN si fa più lontano da MS, e ciò fino ad un certo limite, oltre il quale la detta corda decresce seguitando a crescere la distanza del raggio; quindi apparisce, che la questione si riduce a ritrovare il *massimo* segmento della superficie posteriore, il quale in tali circostanze possa ricevere la luce rotta nell' emisfero anteriore. Osservo pertanto, che nel triangolo CNP il lato NP sta a CP come il seno dell' angolo NCP, ovvero anche del suo supplemento NCM al seno dell' angolo CNP, cioè come $n:1$; e però $PN=nx$. Per la proprietà del triangolo si ha pure $CN^2=CP^2+PN^2-2PC.PB$, ovvero $r^2=x^2+n^2x^2-2x.PB$; e quindi $PB=\frac{x^2+n^2x^2-r^2}{2x}$, $MB=PM-PB=r+x+\frac{r^2-n^2x^2-x^2}{2x}=\frac{r^2+2rx+x^2-n^2x^2}{2x}$. E poichè per la proprietà del cerchio $MN^2=SM.MB$, surrogato il valore or ritrovato ne deriva $MN^2=\frac{r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2}{x}$. Essendo inoltre simili i due triangoli PSO, PNM a motivo del comune angolo P, e degli eguali angoli POS, PMN misurati dalla metà dell' arco SON, si ha l' analogia $PN^2:NM^2::PS^2:SO^2$, vale a dire $n^2x^2:\frac{r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2}{x}::(x-r)^2:SO^2$. Dunque

$SO^2=$

$SO^2 = \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}\left(r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2\right)$. Ora dovendo eſſere maſſimo il ſegmento della ſuperficie illuminata, e conſeguentemente maſſima la corda SO del ſemiſegmento, come pure il quadrato di eſſa corda, ſi ugua-



glierà a zero il differenziale di queſto quadrato, e ſi otterrà $\left(\frac{2(x-r)x-3(x-r)^2}{n^2x^4}\right)\left(r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2\right)dx + \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}\left(2r^2+2rx-2n^2rx\right)dx = 0$, la qual eſpreſſione diviſa per $\frac{(x-r)rdx}{n^2x^3}$ ſi cangia in $\left(\frac{3r-x}{x}\right)\left(r^2+2rx+x^2-n^2x^2\right)+\left(x-r\right)\left(2r+2x-2n^2x\right) = 0$, e queſta ſi riduce all' equazione cubica $x^3+rx^2 - \frac{3r^2}{n^2-1}x - \frac{3r^3}{n^2-1} = 0$. Baſtano pochi momenti di riflеſſione per accorgerſi, che tal equazione ſi riſolve nelle due $x+r = 0$

$x^2 - \frac{3r^2}{n^2-1} = 0$;

dalle quali si ricavano le tre seguenti radici

1°. $x = -r$

2°. $x = -r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$

3°. $x = r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$

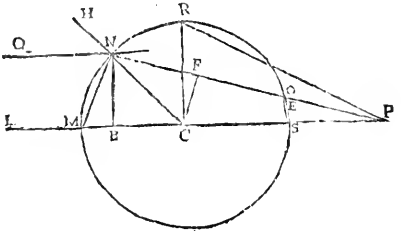
Le due prime radici non appartengono alla questione attuale, atteso che la retta *CP* nelle presenti circostanze non può essere che positiva: e però questa retta viene appunto espressa dalla terza radice positiva $x = r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$. Surrogato poi questo valore in quello di *SO* dianzi trovato, si giugne a conoscere la corda del semisegmento illuminato, e quindi l' ampiezza o l' arco di tutto il segmento. Il che era ecc.

Se il globo rifrangente sarà di vetro, ficchè il *rapporto della refrazione*, ovvero n sia presso a poco $= \frac{3}{2}$, nascerà $x = r\sqrt{\frac{12}{5}} = 1,5492r$; $x^2 = 2,4r^2$; $n^2x^2 = 5,4r^2$; $(x-r)^2 = 0,30162064r^2$; $x^3 = 3,7181$; $n^2x^3 = 8,3657$. Laonde sostituendo questi valori nell'espressione di $SO^2 = \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}\left(r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2\right)$ si ritrae $SO^2 = 0,039602185\,1r^2$, ed estraendo la radice quadrata nasce finalmente $SO = 0,199r$. Dunque l' arco $SEO = 11°.\,26'$, e conseguentemente l' ampiezza della cupola sferica illuminata dalla luce refratta nell' emisfero anteriore ha per misura un arco di 22°. 52'.

Non voglio qui tacere una singolarità, che nella soluzione di questo Problema può facilmente incontrarsi, e che può essere cagione d' inciampo, come lo fu per me in sulle prime. Tirai il perpendicolo *CF* sopra il raggio refratto *NP*; ed essendo $CN^2 = CP^2 + PN^2 -$

$2NP.PF$, cioè $r^2 = x^2 + n^2x^2 - 2nx.PF$, se ne deduce $PF = \frac{x^2+n^2x^2-r^2}{2nx}$; e perciò $CF^2 = CP^2 - PF^2 = x^2 - \left(\frac{x^2+n^2x^2-r^2}{2nx}\right)^2$

$= \frac{2r^2x^2+2n^2r^2x^2+2n^2x^4-x^4-n^4x^4-r^4}{4n^2x^2}$. E poichè NB, e CF sono i seni degli angoli d'incidenza e di refrazio-



ne riferiti al seno tutto CN, nasce quindi $NB^2 = n^2.CF^2 = \frac{2r^2x^2+2n^2r^2x^2+2n^2x^4-x^4-n^4x^4-r^4}{4x^2}$; e però $CB^2 = r^2 - NB^2 = \frac{x^4+n^4x^4+r^4+2r^2x^2-2n^2r^2x^2-2n^2x^4}{4x^2}$.

Prendo la radice quadrata di questa quantità, e ritrovo $CB = \frac{\pm n^2x^2 \mp x^2 \mp r^2}{2x}$, nella qual espressione si dee far uso o dei soli segni superiori in tutti i termini, o dei soli inferiori. Essendo poi $BM = r - CB = \frac{2rx \mp n^2x^2 \pm x^2 \pm r^2}{2x}$, ed $MN^2 = SM.MB$, fatte le sostituzioni de' valori di SM, ed MB, si otterrà MN^2

$= \frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}$. Ma i triangoli simili PSO, PMN somministrano l' analogia $PN : NM :: PS : SO$, cioè $nx : \sqrt{\left(\frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}\right)} :: x - r : SO$; e conseguentemente $SO^2 = \left(\frac{x-r}{nx}\right)^2 \left(\frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}\right)$: dunque differenziando questa espressione, annullando il differenziale, e poscia dividendo per $\frac{(x-r)rdx}{n^2x^2}$ nascerà il risultato $\frac{2}{x}\left(2r \mp n^2rx \pm rx \pm \frac{r^3}{x}\right) + (x-r)\left(\pm 1 \mp n^2 \mp \frac{r^2}{x^2}\right) = 0$, da cui proviene l' equazione cubica di questa forma $x^3 + rx^2 - \frac{(4 \mp 1)r^2}{\pm n^2 \mp 1}x \mp \frac{3r^3}{\pm n^2 \mp 1} = 0$.

Se ora ne' termini di questa affetti dal segno doppio si adopera il segno superiore, comparisce l' equazione precedentemente ritrovata $x^3 + rx^2 - \frac{3r^2x}{n^2-1} - \frac{3r^3}{n^2-1} = 0$; ma se all' opposto si vuole aver riguardo al segno inferiore l' equazione si cangia in quest' altra $x^3 + rx^2 + \frac{5r^2x}{n^2-1} - \frac{3r^3}{n^2-1} = 0$, la quale risoluta dà tutt' altre radici che la precedente.

Questa singolarità imbarazzante parmi che ammetta la seguente interpretazione. Si meni al diametro MS il semidiametro CR perpendicolare, e si congiunga RP; sicchè $RP^2 = r^2 + x^2$. Se pertanto nel valore biforme di $CB = \frac{\pm n^2x^2 \mp x^2 \mp r^2}{2x}$ si fa uso del segno inferiore, risulta CB di valor negativo, poichè NP^2 ossia n^2x^2 è manifestamente maggiore di PR^2, ovvero di $r^2 + x^2$.

Siccome poi per conſeguire il valore di *BM* ſi è ſottratto dal ſemidiametro *CM* il valore di *CB*; dovrà *BM* riſultar maggiore del ſemidiametro qualora *CB* ſia negativo. Ma nelle circoſtanze del preſente Problema è viſibilmente aſſurdo, che *MB* ſuperi il ſemidiametro della ſfera rifrangente. Dunque non dee recar maraviglia, che da un tal aſſurdo ſia derivata un' equazione, le di cui radici non poſſono ſomminiſtrare che un' erronea ſoluzione del Problema.

SOPRA LA DISCESA DE' GRAVI

Per la conveſſità de' Canali curvilinei.

Del P. GREGORIO FONTANA Delle Scuole Pie Profeſſore di Matematica ſublime nell' Univerſità di Pavia.

LA conſiderazione degli accidenti del moto ne' gravi diſcendenti per la concavità delle curve, o de' canali curvilinei ſituati in piani verticali ha arricchito la Scienza generale del moto di molto belle ed inaſpettate verità, che ora formano nelle opere de' moderni Geometri una parte non ultima della Dinamica. Ma la diſceſa de' gravi non per la concavità, ma per la conveſſità delle curve, o de' canali curvilinei giacenti in piani verticali non ſembra fino ad ora eſſere ſtata l'oggetto delle ſpeculazioni de' Geometri, e indarno ſi cercherebbe di ciò alcun cenno ne' Trattati di Meccanica anche più eſteſi. Comunque però voglia interpretarſi un tal ſilenzio degli Scrittori, queſto genere di moto ha alcune proprietà che lo diſtinguono, e che pajono meritare l'eſame e lo ſtudio de' coltivatori della Dinamica. La principale di queſte proprietà conſiſte nel diſtaccarſi che ordinariamente fa un corpo dalla conveſſità della curva o del canale dopo aver traſcorſo un certo ſpazio, il quale trovaſi più o meno grande ſecondo la diverſità della curva per cui il grave diſcende, e del punto da cui comincia la diſceſa. Frut-

to di picciolo ſtudio intorno a sì curioſo argomento ſono i ſeguenti Teoremi, de' quali ommetto per ora la dimoſtrazione.

Ognuno intenderà, che qui ſi preſcinde dalle reſiſtenze del mezzo, e dallo sfregamento, e che ſi concepiſce la maſſa del grave ridotta e concentrata in un punto.

TEOREMA I.

Se in un cerchio verticalmente eretto per la ſua conveſſità ſcavata in forma di canale nella ſemicirconferenza ſuperiore al diametro orizzontale diſcende un grave partendo dalla quiete da qualunque punto del canale, queſto ſi diſtacca dal canale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza (cioè la verticale compreſa tra le due orizzontali guidate per gli eſtremi dell'arco) è ſempre un terzo dell'altezza di detto arco continuato fino al diametro orizzontale.

TEOREMA II.

Nella parabola conica ſituata coll'aſſe verticale, un grave diſcendente per la ſua conveſſità ſcanalata, e che incomincia a muoverſi da un punto qualunque del canale parabolico, ſeguita ſempre a muoverſi lungo il canale ſenza mai diſtaccarſene o abbandonarlo.

TEOREMA III.

Situata l'elliſſe conica coll'aſſe maggiore verticale, ed eſſendo quell'aſſe $= 2a$, il ſuo parametro $= 2p$, un grave, che partendo dal vertice diſcende per la ſua conveſſità ſcanalata, ſe ne diſtacca dopo aver traſcorſo un arco, la di cui altezza viene rappreſentata dalla ra-

dice della seguente equazione $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2p}{a-p}x + \frac{pa^3}{a-p} = 0$. La stessa equazione cubica si ritrova anche quando l'asse verticale dell'ellisse è il minore, e il corpo parte dal vertice di quest'asse, col solo divario, che in questo caso a indica il semiasse minore, p il semiparametro di quest'asse, x l'ascissa del medesimo.

Se poi il grave invece di cominciare il suo moto dal vertice dell'ellisse si spicca da un punto più basso distante per l'intervallo b dalla orizzontale che passa pel vertice, convien risolvere l'equazione $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2px}{a-p} + \frac{pa^3+2a^2b}{a-p} = 0$ per ottenere il valore dell'ascissa corrispondente a quel punto dell'ellisse, che è il punto del distacco.

TEOREMA IV.

Per l'iperbola conica tenuta col suo asse traverso verticale, con un procedere affatto simile a quello del Teorema precedente, s'incontra l'equazione cubica $x^3 + 3ax^2 + \frac{3a^2px}{a+p} + \frac{pa^3}{a+p} = 0$, la di cui radice x sarà l'ascissa dell'arco iperbolico, descritto il quale il corpo, che incomincia a discendere dal vertice, si distacca dalla convessità del canale. Ma qui un tal distacco non può mai aver luogo, come pure avviene nella parabola, avvegnachè essendo positivi tutti i termini della predetta equazione, il valor reale di x non può essere che negativo; il che nell'ipotesi, in cui siamo, è un assurdo. Dunque il grave che discende per la convessità d'un canale iperbolico resta sempre unito al canale anche protratto in infinito senza staccarsene mai. Lo stesso accade anche quando il corpo comincia a discendere da un punto più basso del vertice.

TEOREMA

TEOREMA V.

Se la figura del canale è quella d' una parabola di genere superiore rappresentata dall' equazione $y^m = x$, essendo m un numero intero > 2, il grave che si spicca dal vertice, e si rotola giù pel convesso del perimetro parabolico, si distacca allor quando ha scorso un arco, che ha per altezza o ascissa la linea $\left(\frac{1}{m(m-2)}\right)^{\frac{m}{2m-2}}$, la quale altezza nella parabola di terzo grado è $= \frac{1}{\sqrt[4]{(27)}}$, in quella di quarto grado è $= \frac{1}{4}$, ed in quella di quinto è $= \frac{1}{\sqrt[8]{759375}}$, e così discorrendo.

Che se il grave in vece di spiccarsi dalla sommità del canale partirà da un punto più basso, sicchè la distanza di questo punto dalla retta orizzontale che passa per la sommità sia $= a$, allora per determinare il punto del distacco converrà risolvere quest' equazione $x^{\frac{2m-2}{m}} - \frac{2(m-1)a}{m-2} x^{\frac{m-2}{m}} - \frac{1}{m(m-2)} = 0$, la di cui radice rappresenta l' altezza dell' arco parabolico, dal quale sottratto l' arco dell' altezza a resta quello che il grave trascorre senza staccarsene.

TEOREMA VI.

Se la figura del canale è una delle parabole espresse dall' equazione $y^m = x^n$ ancora più generale della precedente, e supposto che il corpo incominci a rotolare

dalla sommità dell'asse verticale giù per la convessità si trova $\left(\frac{n^2}{m(m-2n)}\right)^{\frac{m}{2m-2n}}$ per l'altezza di quell'arco, finito il quale il corpo, che lo ha percorso discendendo, si distacca dal canale.

Qualora poi il grave incominci il suo moto da un punto più basso del vertice, e sia a la depressione verticale di questo luogo, si ritrova il punto del distacco mediante la risoluzione dell'equazione $x^{\frac{2m-2n}{m}} - \frac{2(m-n)a}{m-2n} x^{\frac{m-2n}{m}} - \frac{n^2}{m(m-2n)} = 0$, dalla di cui radice sottraendo la quantità a si ottiene l'altezza dell'arco, al termine del quale giunto che sia il corpo, questo abbandona il canale.

TEOREMA VII.

In tutte le ellissi, ed iperbole superiori rappresentate dall'equazione generalissima $y^{m+n} = f(a \mp x)^n x^m$, ove a esprime l'asse traverso, f una grandezza costante dipendente dalla proprietà di queste curve, il corpo che parte dalla sommità dell'asse verticale, e discende per la convessità della curva, non se ne distacca se non dopo aver passato un arco, il quale ha per altezza la radice dell'equazione $2mn(m+n)a^2 x^{\frac{2n}{m+n}} (a \mp x)^{\frac{m-n}{m+n}} = (ma \mp (m+n)x)\left((m+n)^2 x^{\frac{2n}{m+n}} (a \mp x)^{\frac{2m}{m+n}} + m^2 g^2 a^2 \mp 2m(m+n) a g^2 x + (m+n)^2 g^2 x^2\right)$, e prosegue poi liberamente il suo moto in una parabola conica secondo la nota legge dei projetti.

TEOREMA VIII.

Sia l'iperbola equilatera (*fig. IX*) *FOM* fra gli afintoti ortogonali *AC*, *AB*, de' quali *AC* ſia verticale, *AB* orizzontale, e guidata per la ſommità *O* la verticale *ON* parallela all'afintoto *AC*, ſi piglino in eſſa le aſciſſe $OH=x$, e ſi ponga il lato della potenza dell'iperbola *OS* ovvero $SA=1$. Un grave, che ſi ſpicca dalla ſommità *O*, e diſcende per la conveſſità *OEF* dell'iperbola, non ſi diſtacca da eſſa ſe non dopo aver corſo per un arco, la di cui altezza viene rappreſentata dalla radice dell'equazione di quarto grado

$$x^4+\frac{8}{3}x^3+2x^2*-\frac{2}{3}=0.$$

Che ſe il grave in vece di ſpiccarſi dal vertice incomincia a diſcendere da un punto più baſſo diſtante per l'intervallo *a* dalla orizzontale che paſſa pel vertice, ſi preſenta queſt'altra equazione biquadratica da riſolverſi $x^4+\frac{8-4a}{3}x^3+(2-4a)x^2-4ax-\left(\frac{2+4a}{3}\right)=0$, la di cui radice dà l'altezza di quell'arco iperbolico, dal quale togliendoſi il primo arco di altezza *a* il reſiduo è appunto quello, al di cui termine giunto che ſia il corpo, ſi diſimpegna dalla curva, e proſegue il ſuo cammino con moto libero.

TEOREMA IX.

Nella parabola Apolloniana (*fig. X*) *ANM* deſcritta col parametro *p*, e ſituata in un piano verticale, ma coll'aſſe *MO* orizzontale, dal punto dato *A*, da cui il grave ſi laſcia cadere giù pel perimetro conveſſo *ANM*, condotta la verticale $AB=\lambda$, e preſe ſu queſta le aſciſſe $AF=x$, è meſtieri riſolvere l'equazione cubica

$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$ per determinare l'altezza AF di quel tal arco AN, al di cui eſtremo N giunto che ſia il grave partito da A, ſi libera dalla curva, ed abbandona il canale, che ſi ſuppone ſempre aperto eſteriormente.

Qualunque volta il grave parte da un punto più baſſo di A, e diſtante per l'intervallo a dalla retta orizzontale guidata per A, ritrova l'equazione

$$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0, \quad - \frac{1}{2}p^2 a$$

e la radice di queſta dà l'altezza dell'arco, dal quale ſottratto l'arco di altezza a il reſiduo è appunto il ricercato, vale a dire quello, il di cui punto infimo è il punto del diſtacco.

Se nell'ipoteſi della gravità coſtante ſi vuole collocato il corpo nella conveſſità della parabola in punto infinitamente diſtante dal vertice M, per modo che la verticale λ condotta da quel punto all'aſſe orizzontale acquiſti un valore infinito, allora ſi fa manifeſto, che nell'equazione

$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$ il valore della radice x non può eſſere che infinito, altrimenti verrebbe l'aſſurdo, che $-\lambda^3 = 0$, ovvero $\lambda = 0$, cioè l'infinito ſarebbe uguale a zero. Perlochè il corpo, che parte da un punto infinitamente lontano dalla ſommità della parabola verticalmente collocata, ma coll'aſſe orizzontale, e diſcende per la conveſſità, cor-

re uno ſpazio infinito prima di ſtaccarſi dal canale, o piuttoſto non ſi diſtacca mai.

TEOREMA X.

Nella Cicloide ſituata coll'aſſe verticale il grave, che dalla ſua ſommità diſcende per la conveſſità ſcanalata, ſe ne diſtacca dopo eſſere arrivato al punto, che reſta ſotto il vertice un ſemidiametro del circolo generatore. E generalmente da qualunque punto incominci il corpo a diſcendere, eſſo abbandona il canale cicloidale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza è la metà di quella dello ſteſſo arco continuato fino alla baſe orizzontale della Cicloide.

TEOREMA XI.

Se vuolſi che il corpo partendo (*fig. XI*) dal vertice *A* diſcenda lungo la conveſſità ſcanalata della Ciſſoide *ACO* riferita all' aſſe *AM* parallelo all' aſintoto verticale *FN*, e ſi chiamano al ſolito x, y le coordinate ortogonali *AB*, *BC*, a il ſemidiametro *AP* del cerchio generatore; il punto del diſtacco del corpo ſi trova eſſer quello, a cui corriſponde $y = \frac{8}{9}a$, oſſia il corpo ſi diſtacca dal canale dopo aver paſſato un arco, che ha per ordinata otto noni del raggio del cerchio generatore.

E ſe il corpo parte da un punto inferiore al vertice *A*, e diſtante dalla orizontale *AF* d'una data quantità b, la radice dell' equazione cubica $y^3 - \frac{16a}{9}y^2 + \frac{64a^2+36b^2}{81}y - \frac{8ab^2}{9} = 0$ dà il valore dell' ordinata appartenente a quell' arco di ciſſoide, dal quale ſe ſi

ſottrae l' arco compreſo fra il vertice ed il principio del moto ſi ha l'arco ricercato, al di cui termine giunto che ſia il grave, abbandona la curva.

TEOREMA XII.

Sia (*fig. XII*) OBS la logaritmica ſituata in un piano verticale, col ſuo aſintoto MN al di ſopra di eſſa ed orizzontale. Si ſupponga la ſottangente coſtante $= 1$, e la FB normale all' aſintoto ed eguale alla ſottangente ſi produca indefinitamente in P, e ſi prendano le ordinate ortogonali $BI = x$, $IS = y$. Ciò ſtante, un corpo, che incomincia a diſcendere dal punto B (che chiameremo vertice) lungo la conveſſità BS della logaritmica, ſi allontana dalla curva dopo aver percorſo un arco, la di cui altezza o aſciſſa $x = \sqrt{2}$, cioè uguaglia la diagonale del quadrato deſcritto ſopra la ſottangente.

Qualora poi il mobile parta da un punto inferiore al vertice B, e la diſtanza di tal punto dalla retta orizzontale guidata per B ſia $= a$, il mobile ſi diſtacca dalla curva dopo eſſer caduto da un arco, che ha per altezza $x - a = \sqrt{(1+(a+1)^2)}$, cioè l' ipotenuſa d'un triangolo rettangolo, un cateto del quale è la ſottangente della logaritmica, l' altro cateto è la ſomma di queſta ſottangente e della diſtanza del principio del detto arco dalla orizzontale guidata pel vertice.

SOPRA I LOGARITMI DELLE QUANTITA' NEGATIVE; E SOPRA GL' IMMAGINARJ.

Del P. GREGORIO FONTANA Delle Scuole Pie Profeſſore di Matematica ſublime nell' Univerſità di Pavia.

LA gran controverſia intorno alla qualità del valore de' logaritmi delle quantità negative, che tiene tuttora divifi i più inſigni Geometri del ſecolo, è ſtata dall' immortale Sig. *Euler* preſſochè fiſſata e deciſa mercè il famoſo Teorema da eſſo dimoſtrato, che *il logaritmo di qualunque quantità negativa ha un' infinità di valori, de' quali uno ſolo è reale, e tutti gli altri immaginarj; ed il logaritmo di qualſivoglia quantità negativa ha un numero infinito di valori ma ſolamente immaginarj.* Siccome però un tal Teorema, veramente originale, e degno della penetrazione di quel ſommo Geometra, viene da lui dimoſtrato nella ſua profonda Diſſertazione ſopra l'indicata controverſia con un metodo aſſai lungo e proliſſo, il quale inoltre procedendo per eſponenti infiniti ed infiniteſimi laſcia perciò nello ſpirito del leggitore non ſo qual nebbia e dubbietà, che dà luogo a mille ſcrupoli ed equivoci non così facili a dileguarſi, e rimane anco eſpoſto alle eccezioni e agli attacchi del Sig. *D' Alembert;* quindi è, che non ſi giudicherà per avventura coſa affatto inutile ed intempeſtiva il proporre qui con un metodo il più ſemplice e rigoroſo, che mai poſſa deſiderarſi,

tre differenti brevissime dimostrazioni del suddetto Teorema, e dedurne poscia come tanti Corollarj tutte le principali proprietà delle formole immaginarie ed esponenziali. Sia dunque

TEOREMA.

Il logaritmo di qualunque quantità positiva ha un' infinità di valori, de' quali uno solo è reale, e tutti gli altri immaginarj; ed il logaritmo di qualsivoglia quantità negativa ha un numero infinito di valori ma solamente immaginarj.

DIMOSTRAZIONE I.

I. Descritto un cerchio col semidiametro $= 1$, dicasi ϕ l'arco, a cui corrisponde l'ascissa o il senoverso $= x$; e si avrà, come è noto, $d\phi = \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x)}}$, cioè $d\phi\sqrt{-1} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x)}}$

$$= \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x)}}\left(\frac{x-1+\sqrt{(x^2-2x)}}{x-1+\sqrt{(x^2-2x)}}\right) = \frac{\frac{xdx-dx}{\sqrt{(x^2-2x)}} + dx}{x-1+\sqrt{(x^2-2x)}}.$$

Osservo, che il numeratore di questa frazione è il differenziale del denominatore; e però passando agl' integrali nasce $\phi\sqrt{-1} = \log.\left(x-1+\sqrt{(x^2-2x)}\right) + \text{cost.}$ E perchè svaniscono insieme ϕ ed x, risulta cost. $=$ $-\log.-1$. Dunque $\phi\sqrt{-1} = \log.\left(1-x-\sqrt{(x^2-2x)}\right)$. Piglio ora il seno verso x uguale a tutto il diametro 2, e nominando π la semicirconferenza del cerchio, osservo, che al seno verso $= 2$ corrispondono tutti gli archi seguenti $\pm\pi$; $\pm 3\pi$; $\pm 5\pi$; $\pm 7\pi$; ecc. in infinito, rappresentati generalmente da $\pm(2n-1)\pi$, dove n è un numero intero qualunque dal zero fino all' infinito. In questa ipotesi adunque si ha $\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1} = \log.-1$. E però posta A una qualsivoglia grandezza, il di cui logaritmo

logaritmo naturale sia $=a$, siccome si ha $\log.-A=\log. A+\log.-1$, sarà quindi $\log.-A=a\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che è una parte del Teorema.

II. Per dimostrare l' altra parte, si ponga mente, che qualora si prende il seno verso $x=0$, l' arco ϕ acquista un' infinità di valori, cioè $0;\pm 2\pi;\pm 4\pi;\pm 6\pi$; ecc. in infinito, espressi generalmente da $\pm 2n\pi$, dove n rappresenta qualunque numero intero dal zero fino all' infinito. In questo supposto adunque si otterrà $\pm 2n\pi\sqrt{-1}=\log. 1$. Essendo poi $\log. A=\log. A+\log. 1=a+\log. 1$, sarà in conseguenza $\log. A=a\pm 2n\pi\sqrt{-1}$. Dal che si scorge, che degl' infiniti valori $a\pm 2n\pi\sqrt{-1}$ uno solo è reale, cioè quello che corrisponde ad $n=0$, e tutti gli altri infiniti sono immaginarj; che era l' altra parte del Teorema.

DIMOSTRAZIONE II.

I. Prendasi x pel coseno dell' arco ϕ, e si avrà dalla nota proprietà del cerchio $d\phi=-\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{dx}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$; onde $d\phi\sqrt{-1}=-\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}=-\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}\left(\frac{x+\sqrt{(x^2-1)}}{x+\sqrt{(x^2-1)}}\right)=\frac{xdx-dx\sqrt{(x^2-1)}}{x+\sqrt{(x^2-1)}}$.

Laonde pigliando gl' integrali sarà $\phi\sqrt{-1}=-\log.\left(x+\sqrt{(x^2-1)}\right)$ senza aggiunta di costante, perchè si annullano i due membri dell' ugualtà quando $x=1$. Sicchè proviene $\phi\sqrt{-1}=-\log.\left(x+\sqrt{(x^2-1)}\right)=\log.\frac{1}{x+\sqrt{(x^2-1)}}=\log.\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)$. Se pertanto si assume il coseno $x=-1$, acquista l' arco corrispondente ϕ tutti i seguenti infiniti valori $\pm\pi;\pm 3\pi;\pm 5\pi$; ecc.

in infinito espressi da $\pm(2n-1)\pi$. Ma nell' ipotesi di $x=-1$ diventa $\log.\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)=\log.-1$. Dunque $\log.-1=\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$. E però $\log.-A=\log. A+\log.-1=a+\log.-1=a\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che è un valore infinitiforme, ma sempre immaginario.

II. Qualora poi pigliasi il coseno $x=1$, è noto, che a tal coseno corrispondono gli archi $0;\pm 2\pi;\pm 4\pi;\pm 6\pi$; ecc. in infinito, che vengono rappresentati dall' espressione $\pm 2n\pi$, nella quale n significa qualunque numero dal zero fino all' infinito. Ma in questo assunto di $x=1$, trovasi $\log.\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)=\log. 1$. Dunque $\pm 2n\pi\sqrt{-1}=\log. 1$. Quindi $\log. A=\log. A+\log. 1=a\pm 2n\pi\sqrt{-1}$, valore infinitiforme, ed unicamente reale nel solo caso di $n=0$, ed in tutti gli altri casi immaginario.

DIMOSTRAZIONE III.

Chiamo φ l' arco di cerchio descritto col raggio 1, t la tangente, s il seno, c il coseno. Avremo pertanto $d\varphi=\frac{dt}{1+t^2}=\frac{dt}{(1+t\sqrt{-1})(1-t\sqrt{-1})}=\frac{\frac{1}{2}dt}{1+t\sqrt{-1}}+\frac{\frac{1}{2}dt}{1-t\sqrt{-1}}$; ed integrando $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}$ senza costante, perchè posto $t=0$, si annullano insieme i due membri dell' ugualtà. Posto in luogo di t il suo valore $\frac{s}{c}$, si ha $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{c+s\sqrt{-1}}{c-s\sqrt{-1}}$, e moltiplicando il numero di questo logaritmo sotto e sopra per $c+s\sqrt{-1}$ nasce $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.(c+s\sqrt{-1})^2=\frac{1}{\sqrt{-1}}\log.(c+s\sqrt{-1})$. Dunque finalmente $\varphi\sqrt{-1}=\log.(c+s\sqrt{-1})$. Prendo ora $c=1, s=0$, e chiamo

π la semicirconferenza del cerchio: è principio notissimo della Trigonometria, che al coseno 1, e seno *zero* corrispondono tutti gli archi seguenti $0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi$; ecc. in infinito, ovvero $0; \pm 2n\pi$, denotando n tutti i numeri naturali positivi. Dunque in quest' ipotesi la nostra formola diventerà $\log. 1 = 0$, e $\log. 1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}$. Dunque essendo A qualunque grandezza positiva, e il suo logaritmo $= a$, si avrà $\log. A = \log. 1A = \log. A + \log. 1 = a + 0$

$$a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$$

cioè il logaritmo di A avrà infiniti valori, uno solo reale a, e tutti gli altri immaginarj $a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$, che è il primo punto. Passo al secondo, e fisso $c = -1$, $s = 0$, e rifletto, che al coseno -1 e al seno *zero* corrispondono infiniti archi, che sono i seguenti $\pm\pi$; $\pm 3\pi; \pm 5\pi; \pm 7\pi$; ecc., ovvero $\pm(2n-1)\pi$. In questa nuova ipotesi di $c = -1$, $s = 0$, la nostra formola adunque si trasforma in quest' altra $\log. -1 = \pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$. Quindi essendo $\log. -A = \log. -1A = \log. A + \log. -1 = a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$, si vede tantosto, che il logaritmo della quantità negativa $-A$ ha un' infinità di valori tutti immaginarj rappresentati dalla forma $a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che era il secondo punto. Dunque I. $\log. A = a$

$$a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$$

II. $\log. -A = a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$.

Per ritrovare poi con questo stesso metodo i logaritmi di qualsivoglia grandezza immaginaria basta por mente alla forma $a + b\sqrt{-1}$, alla quale il Sig. *D' Alembert* ha dimostrato il primo ridursi tutte le quantità immaginarie più complicate, denotando a e b grandezze reali. Si ha dunque a determinare il valore di $\log. (a + b\sqrt{-1})$: Si descriva un cerchio col raggio $= 1$, e si prenda in esso l'arco θ, la di cui tangente sia $\frac{b}{a}$, e

però la secante $= \sqrt{(1 + \frac{b^2}{a^2})} = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2+b^2)}$, il seno $= \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, il coseno $= \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Dunque sen. $\theta = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $b = \sqrt{(a^2+b^2)}$ sen. θ; e così cos. $\theta = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $\sqrt{(a^2+b^2)}$ cos. $\theta = a$. Dunque log. $(a+b\sqrt{-1}) = \log.(\cos.\theta + \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1})(\sqrt{(a^2+b^2)}) = \frac{1}{2}\log.(a^2+b^2) + \log.(\cos.\theta + \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1})$. Ma si è precedentemente fatto vedere log. $(\cos.\theta + \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1}) = \theta\sqrt{-1}$. Dunque finalmente si avrà log. $(a+b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\log.(a^2+b^2) + \theta\sqrt{-1}$, essendo θ l' arco di cerchio descritto col raggio 1, e dotato della tangente $\frac{b}{a}$. Qui pure osservo, che essendo infiniti gli archi dotati della tangente $\frac{b}{a}$, cioè $\theta; \theta\pm\pi; \theta\pm 2\pi; \theta\pm 3\pi; \theta\pm 4\pi; \theta\pm 5\pi$; ecc. ossia in generale $\theta \pm n\pi$, ne viene in conseguenza, che infiniti sono i valori di log. $(a+b\sqrt{-1})$ tutti rappresentati dall' espressione infinitiforme $\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2) + (\theta \pm n\pi)\sqrt{-1}$. Con eguale facilità e speditezza io dimostro i famosi Teoremi sugl' immaginarj esprimenti le funzioni degli archi circolari. In fatti

I. Preso log. $e = 1$, ed essendosi già trovato log. $(\cos.\theta + \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1}) = \theta\sqrt{-1}$, ne viene in conseguenza $\cos.\theta + \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1} = e^{\theta\sqrt{-1}}$; e però pigliato l' arco negativo nasce $\cos.-\theta + \text{sen.}-\theta\sqrt{-1}$, cioè

$\cos.\theta - \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1} = e^{-\theta\sqrt{-1}}$: onde aggiunta quest' equazione alla prima si ottiene $\cos.\theta = \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2}$; che è il primo Teorema.

II. Delle predette due equazioni sottraggo la seconda dalla prima, e divido il residuo per $2\sqrt{-1}$; e quindi ricavo $\text{sen.}\,\theta = \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} - e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; che è il secondo Teorema.

III. Nell' equazione $\cos.\theta \pm \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1} = e^{\pm\theta\sqrt{-1}}$ se in vece dell' arco θ si sostituisce l' arco $n\theta$, si raccoglie $\cos.n\theta \pm \text{sen.}\,n\theta\sqrt{-1} = e^{\pm n\theta\sqrt{-1}}$. Ma e elima è la potestà n: di $e^{\pm\theta\sqrt{-1}}$, ovvero di $\cos. \pm \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1}$: Dunque $(\cos.\theta \pm \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1})^n = \cos.n\theta \pm \text{sen.}\,n\theta\sqrt{-1}$; che è il terzo Teorema.

IV. Essendo $\cos.n\theta + \text{sen.}\,n\theta\sqrt{-1} = (\cos.\theta + \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1})^n$, e $\cos.n\theta - \text{sen.}\,n\theta\sqrt{-1} = (\cos.\theta - \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1})^n$, sommate queste due equazioni si ritrova $\cos.n\theta = \frac{1}{2}(\cos.\theta + \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1})^n + \frac{1}{2}(\cos.\theta - \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1})^n$, che è il quarto Teorema.

V. Sottratta la seconda delle due medesime equazioni dalla prima, e diviso il residuo per $2\sqrt{-1}$ si ritrova $\text{sen.}\,n\theta = \frac{(\cos.\theta + \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1})^n - (\cos.\theta - \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$; che è il quinto Teorema.

Potrebbe sorgere in mente a taluno una difficoltà sul numero de' valori

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+\theta\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm\pi)\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm 2\pi)\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm 3\pi)\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm 4\pi)\sqrt{-1}$$

ecc. . . . . .
ecc. . . . . .
ecc. . . . . .

che competono a log. $(a+b\sqrt{-1})$, ne' quali valori gli archi $\theta;\theta\pm\pi;\theta\pm 2\pi$; ecc. ſpettano tutti alla tangente $\frac{b}{a}$. Imperciocchè ſe in vece della tangente $\frac{b}{a}$ ſi vuole aver riguardo al ſeno $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, e al coſeno $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, non ſi ha che la metà del numero de' predetti archi, cioè $\theta;\theta\pm 2\pi;\theta\pm 4\pi;\theta\pm 6\pi$; ecc. e conſeguentemente anche la metà del numero de' valori di log. $(a+b\sqrt{-1})$; il che poco ſi accorda coll'eſattezza e rigore. Ma convien riflettere, che quel ſeno e coſeno hanno eſſenzialmente il doppio ſegno $\pm$ al radicale quadrato del denominatore, e gli archi corriſpondenti al ſeno $\frac{b}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$, e al coſeno $\frac{a}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ſono $\theta\pm\pi;\theta\pm 3\pi;\theta\pm 5\pi$; ecc., che formano appunto l'altra metà de' valori di log. $(a+b\sqrt{-1})$ trovati dapprima; e così tutto cammina d'accordo.

Con non minore prontezza e facilità io dimoſtro il famoſo Teorema Alemberziano $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}} = M+N\sqrt{-1}$, eſſendo M, N quantità reali, il quale ſuole comunemente dimoſtrarſi mercè la ſuppoſizione un po' ſtravagante di dover concepire varianti le quantità a, b, M, N, che non variano. Io dico così: Abbiamo $\log.(a+b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+\theta\sqrt{-1}$: Dunque $\log.(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}} = (g+h\sqrt{-1})\log.(a+b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}g\log.(a^2+b^2) - h\theta + (\frac{1}{2}h\log.(a^2+b^2)+g\theta)\sqrt{-1}$. Dunque paſſando dai logaritmi ai numeri farà $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}} = e^{\log.(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} - h\theta + (\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta)\sqrt{-1}} = (a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} \times e^{-h\theta+(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta)\sqrt{-1}}$. Ma prendendo $\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta$ per un arco di cerchio deſcritto col raggio 1 ſi è dimoſtrato eſſere $e^{(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta)\sqrt{-1}} = \text{cof.}(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta) + \text{ſen.}(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta)\sqrt{-1}$. Dunque $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}} = (a^2+b^2)^{\frac{g}{2}}e^{-h\theta}\{\text{cof.}(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta)+\text{ſen.}(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta)\sqrt{-1}\}$.

E però posta $M = (a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} e^{-b\theta}$ cos.$\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{b}{2}}+g\theta\right)$, ed $N = (a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} e^{-b\theta}$ sen.$\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{b}{2}}+g\theta\right)$, si ha $M+N\sqrt{-1} = (a+b\sqrt{-1})^{g+b\sqrt{-1}}$.

Se pertanto reca meraviglia, che una quantità immaginaria $\frac{1}{2}e^{\theta\sqrt{-1}}$ aggiunta ad un' altra immaginaria $\frac{1}{2}e^{-\theta\sqrt{-1}}$ costituisca, come si è veduto, un valore affatto reale, è però incomparabilmente più mirabile, che anche senza questa aggiunta una quantità qualunque reale a elevata ad un esponente immaginario $b\sqrt{-1}$ persista in infiniti casi ad esser reale. Paragonata in fatti l'espressione $a^{b\sqrt{-1}}$ colla precedente più generale $(a+b\sqrt{-1})^{g+b\sqrt{-1}}$, si trova subito, che annullati b e g nel valore di questa, diventa $a^{b\sqrt{-1}} = \text{cos.}(b\log.a)+\text{sen.}(b\log.a)\sqrt{-1}$. Ora tutte le volte che sarà $b = \pm\frac{m\pi}{\log.a}$ (essendo m un numero intero qualunque), egli è evidente che nascerà $a^{b\sqrt{-1}} = \pm 1$, secondo che m sarà pari o dispari, e però in tutti questi casi il valore sarà sempre reale.

Parevami una volta di aver ritrovato un argomento insolubile contro l' opinione *Euleriana* circa il valore immaginario de' logaritmi delle quantità negative, cui proposi a qualche Geometra senza ottenerne lo scioglimento, il quale però si ottiene colla più luminosa evidenza dal premesso principio. Io discorreva dunque così: Preso e pel numero, che ha per logaritmo iperbolico

lico l'unità, se questo s'inalza ad un esponente x, e così elevato e^x persiste ad avere un valor reale, non può non essere l'esponente x reale ancor esso. Sia pertanto $x = \log. -a$; e poichè $e^{\log. -a} = -a$, ed il valore di $-a$ è visibilmente reale; tale sarà in conseguenza anche quello di $\log. -a$. La risposta è facilissima: e^x può esser reale, quand'anche l'esponente x non lo sia; basta in fatti, che l'esponente x sia $= \pm m\pi\sqrt{-1}$, perchè allora $e^{\pm m\pi\sqrt{-1}} = \cos. m\pi \pm \text{sen. } m\pi\sqrt{-1} = \pm 1$, che è un valore affatto reale. Ed essendosi dimostrato $\log. -a = \pm(2n-1)\pi\sqrt{-1} + \log. a$, ne viene $e^{\log. -a} = e^{\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}+\log. a} = a\,e^{\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}} = a(\cos.(2n-1)\pi \pm \text{sen.}(2n-1)\pi\sqrt{-1}) = a \times -1 = -a$, come appunto esser dee. L'inganno nasce dal falso supposto, che a primo aspetto può sedurre chicchessia, che una quantità reale elevata ad un esponente immaginario debba sempre diventare immaginaria.

Un Teorema importante, che non mi sovviene di aver trovato presso alcun Geometra, si ricava dalla formola $a^{b\sqrt{-1}} = \cos.(b \log. a) + \text{sen.}(b \log. a)\sqrt{-1}$, nella quale se si prende $b = \pm x\sqrt{-1}$, si ha il risultato $a^{\mp x} = \cos.(x\sqrt{-1}.\log. a) \pm \text{sen.}(x\sqrt{-1}.\log. a)\sqrt{-1}$; che è quanto dire ogni quantità esponenziale $a^{\mp x}$, che ha un esponente x reale, e la base logaritmica a qualunque, si riduce ad una forma, che sebbene all'aspetto immaginaria è però indubitatamente reale. Ed

ecco pertanto, che se la quantità esponenziale $a^{\pm b\sqrt{-1}}$ si riduce alla nota forma cos. $(b \log.a) \pm$ sen. $(b \log.a)\sqrt{-1}$, la esponenziale $a^{\mp b}$ si riduce alla forma non per anco avvertita cos. $(b\sqrt{-1} \log. a) \pm$ sen. $(b\sqrt{-1} . \log. a)\sqrt{-1}$.

Dall'essersi finalmente dimostrato, che la generalissima espressione $(a+b\sqrt{-1})^{g+b\sqrt{-1}}$ si converte in un semplice binomio, una parte del quale è il prodotto d'una certa quantità pel coseno di un arco idoneo circolare, e l'altra parte è il prodotto della stessa quantità pel seno di quell'arco e per la specie immaginaria $\sqrt{-1}$, ne viene in conseguenza il famoso Teorema di *Cotes*, non meno che l'altro più generale di *Moivre*, come pure l'invenzione delle radici di qualunque grado d'una proposta quantità; cose tutte di troppo facile deduzione da' premessi principj per non dover essere qui sminuzzate.

Un celebratissimo Oltramontano Geometra ha voluto recentemente spiegare onde avvenga, che i settori reali del cerchio vengano espressi dai settori immaginarj dell'iperbola, e viceversa i reali dell'iperbola dagl'immaginarj del cerchio, e non dissimula la sua meraviglia, che nè *Giovanni Bernoulli* primo autore della riduzione degli uni negli altri, nè i Geometri posteriori abbiano di ciò recata ragione alcuna. Siccome però questa proposizione non pare che assolutamente sussista, non sarà qui fuor di luogo il rettificarne il significato, e dimostrare all'opposto, che non altrimenti i settori reali del cerchio, ma bensì gl'immaginarj vengono rappresentati dai settori immaginarj dell'iperbola, e viceversa.

Chiamo r il semiasse traverso dell'iperbola conica equilatera, per la retta condotta dal centro dell'iper-

bola ad un punto qualunque del suo perimetro, φ l'angolo compreso da questa retta e dal semiasse traverso: è manifesto, che il settore contenuto dai lati di quest' angolo e dall' arco iperbolico ha per elemento $\frac{1}{2} z^2 d\varphi$; e siccome facilmente si dimostra $z^2 = \frac{r^2(1+\text{tang.}\varphi^2)}{1-\text{tang.}\varphi^2}$, trovasi il detto elemento $= \frac{r^2(1+\text{tang.}\varphi^2)\,d\varphi}{2(1-\text{tang.}\varphi^2)}$. Ma si sa dover essere $d\varphi = \frac{d.\text{tang.}\varphi}{1+\text{tang.}\varphi^2}$; dunque l'elemento del settore iperbolico si trasforma in $\frac{r^2 d.\text{tang.}\varphi}{2(1-\text{tang.}\varphi^2)}$, ovvero in $\frac{r^2 d.\text{tang.}\varphi}{4(1+\text{tang.}\varphi)} + \frac{r^2 d.\text{tang.}\varphi}{4(1-\text{tang.}\varphi)}$. L'integrale di questa quantità, cioè il settore iperbolico indefinito risulta $= \frac{1}{4} r^2 \log. \frac{1+\text{tang.}\varphi}{1-\text{tang.}\varphi}$.

Ora il settore d'un circolo descritto col semidiametro r, e compreso dall'angolo φ ha per suo elemento $\frac{r^2 d.\text{tang.}\varphi}{2(1+\text{tang.}\varphi^2)} = \frac{r^2 d.\text{tang.}\varphi}{4(1+\text{tang.}\varphi\sqrt{-1})} + \frac{r^2 d.\text{tang.}\varphi}{4(1-\text{tang.}\varphi\sqrt{-1})}$, e questa espressione ridotta ad integrazione somministra pel valore del settore indeterminato $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}} \log. \frac{1+\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}$. Ma questa espressione non è punto immaginaria, come a prima vista potrebbe apparire: in fatti essa si risolve in due parti $-\frac{r^2}{4\sqrt{-1}} \log.$

$(1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})-\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\log.(1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})$,

la prima delle quali si converte nella serie $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}$

$(\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\text{tang.}\,\varphi^2-\frac{1}{3}\text{tang.}\varphi^3\sqrt{-1}-\frac{1}{4}\text{tang.}\varphi^4+\text{ecc.})$,

la seconda nella serie $\frac{-r^2}{4\sqrt{-1}}(-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}$

$+\frac{1}{2}\text{tang.}\,\varphi^2+\frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3\sqrt{-1}-\frac{1}{4}\text{tang.}\,\varphi^4-\text{ecc.})$:

laonde raccogliendo i termini proviene $\frac{1}{2}r^2(\text{tang.}\,\varphi$

$-\frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3+\frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5-\text{ecc.})$, che è visibilmente tutta reale.

La realità dell'anzidetta espressione si dimostra ancora mediante il Teorema precedentemente stabilito, che $\log.(a+b\sqrt{-1})=\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+\theta\sqrt{-1}$, dove θ è l'arco circolare, descritto col raggio 1, e colla tangente $\frac{b}{a}$: imperciocchè fatto il debito paragone si raccoglie $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\log.(1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})=\frac{r^2}{8\sqrt{-1}}\log.$ $(1+\text{tang.}\,\varphi^2)+\frac{1}{4}r^2\varphi$, e parimente $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\log.$ $(1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})=\frac{r^2}{8\sqrt{-1}}\log.(1+\text{tang.}\,\varphi^2)$ $-\frac{1}{4}r^2\varphi$, e sottraendo questa da quella, nasce $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}$

$\log. \frac{1+\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} r^2 \varphi$, che è manifeſtamente l'eſpreſſione reale del ſettore circolare.

Da ciò ſi rende evidente, che l'eſpreſſione apparentemente immaginaria del ſettore reale del cerchio è effettivamente tutta reale, e che ella non può in verun modo equivalere all'eſpreſſione d'un ſettore immaginario della iperbola. Siccome poi d'un tal ſettore iperbolico immaginario ſi ha l'eſpreſſione, ſe nel valor generale $\frac{1}{4} r^2 \log. \frac{1+\text{tang.}\varphi}{1-\text{tang.}\varphi}$ ſi ſoſtituiſce in vece dell'angolo φ l'angolo immaginario $\varphi\sqrt{-1}$, il che dà $\frac{1}{4} r^2 \log. \frac{1+\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}$ pel valore del detto ſettore immaginario, cioè compreſo da un angolo immaginario; paragonato perciò queſto valore con quello del ſettor reale del cerchio $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}} \log. \frac{1+\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}$, ſi vede ſubito, che l'uno differiſce eſſenzialmente dall'altro, mancando al primo il diviſore $\sqrt{-1}$, per la di cui aſſenza quello reſta impoſſibile, mentre per la ſua preſenza divien reale il ſecondo.

Meglio ancora ciò ſi comprende col ſeguente diſcorſo: Si dica I il ſettore iperbolico, C il circolare, e ſi avrà $dI = \frac{r^2 d.\,\text{tang.}\varphi}{2(1-\text{tang.}\varphi^2)}$, $dC = \frac{r^2 d.\,\text{tang.}\varphi}{2(1+\text{tang.}\varphi^2)}$. Si prenda nel ſettor circolare l'angolo immaginario $\varphi\sqrt{-1}$, ritenendo il reale φ pel ſettore iperbolico; e naſcerà $dC = \frac{r^2 d.\,\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}{2(1-\text{tang.}\varphi^2)} = dI\sqrt{-1}$, e quindi integrando $C = I\sqrt{-1}$, cioè il ſettor impoſſibile C del cerchio, contenuto dall'angolo impoſſibile $\varphi\sqrt{-1}$, è ugua-

le al settore iperbolico I moltiplicato per $\sqrt{-1}$, che rende un tal valore impossibile. Così nell'espressione del settore iperbolico se si piglia $\varphi\sqrt{-1}$ in vece di φ, e si ritiene φ nel circolare, si trova $dI = \frac{r^2 d.\,\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}{2(1+\text{tang.}\,\varphi^2)}$ $= dC\sqrt{-1}$, e quindi $I = C\sqrt{-1}$, e $C = \frac{I}{\sqrt{-1}}$, vale a dire il settor reale C del cerchio, corrispondente al reale angolo φ, è uguale al settore impossibile I dell'iperbola diviso per $\sqrt{-1}$, la qual divisione toglie alla quantità la sua impossibilità; ovvero finalmente il settore immaginario I dell'iperbola non equivale punto al settor reale C del cerchio, nè può essere da questo rappresentato, ma viene espresso per l'opposto dal prodotto della quantità immaginaria $\sqrt{-1}$ nel settore circolare, vale a dire da una quantità onninamente immaginaria.

Nell'atto di dar compimento a questa breve Memoria mi accorgo con sorpresa, che il famoso Teorema Euleriano intorno all'infinita moltiplicità de' valori del logaritmo d'una proposta quantità può dimostrarsi indipendentemente dal calcolo Infinitesimale, e da ogni ipotesi d'infinitesimi colla pura Algebra finita; ed in tal occasione mi avveggo eziandio, che il Teorema Alemberziano intorno alla riduzione di qualsivia più complicato immaginario alla forma binomiale semplicissima si dimostra ancor esso col solo calcolo delle grandezze finite, ed in un modo assai spedito e rigoroso. Ecco pertanto la dimostrazione del Teorema Euleriano senza assumere alcun principio del calcolo Infinitesimale, nè alcuna nozione di grandezze inassegnabili o infinite.

Presa x per rappresentare qualunque data grandezza, si dimostra col ritorno delle serie, come può vedersi in varj Trattati elementari di Algebra finita, che log.

$\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\text{ecc.}\right)$. Dunque se si nomina φ l'arco d'un cerchio descritto col raggio 1, e si fa $x = \text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}$, nascerà $\log.\frac{1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}} = 2\left(\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1} - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3\sqrt{-1} + \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5\sqrt{-1} - \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7\sqrt{-1}+\text{ecc.}\right) = 2\sqrt{-1}\left(\text{tang.}\,\phi - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3 + \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5 - \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7+\text{ecc.}\right)$. Ma col ritorno stesso delle serie nell'Algebra ordinaria viene dimostrato, che la serie $\text{tang.}\,\phi - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3 + \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5 - \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7+\text{ecc.}$ rappresenta il valore dell'arco circolare φ: sarà dunque $2\varphi\sqrt{-1} = \log.\frac{1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}$, cioè sostituendo $\frac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{cos.}\,\varphi}$ in luogo di tang. φ, sarà $2\varphi\sqrt{-1} = \log.\frac{\text{cos.}\,\varphi+\text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1}}{\text{cos.}\,\varphi-\text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1}} = \log.\frac{(\text{cos.}\,\varphi+\text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1})^2}{\text{cos.}\,\varphi^2+\text{sen.}\,\varphi^2} = 2\log.(\text{cos.}\,\varphi+\text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1})$, e quindi $\varphi\sqrt{-1} = \log.(\text{cos.}\,\varphi+\text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1})$. Se ora si prende $\varphi = \pm 2m\pi$, denotando m tutti i numeri naturali dal zero fino all' infinito, si ha sen. $\pm 2m\pi = 0$, cos. $\pm 2m\pi = 1$: conseguentemente $\pm 2m\pi\sqrt{-1} = \log.1$, cioè a dire log. 1 ha un'infinità di valori 0, $\pm 2\pi\sqrt{-1}$, $\pm 4\pi\sqrt{-1}$, $\pm 6\pi\sqrt{-1}$, ecc. Pigliato poi $\varphi = \pm(2m-1)\pi$, diventa sen. $\pm(2m-1)\pi = 0$, cos. $\pm(2m-1)\pi = -1$. Laonde $\pm(2m-1)\pi\sqrt{-1} = \log.-1$, vale a dire log. -1 ha i seguenti valori infiniti $\pm\pi\sqrt{-1}$, $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, $\pm 5\pi\sqrt{-1}$, $\pm 7\pi\sqrt{-1}$, ecc.

Dimostrato in tal guisa il Teorema Euleriano, si de-

duce subito dal primo valore di log. — 1 la celebre proporzione Bernoulliana fra il diametro e la circonferenza del cerchio, poichè essendo log. — 1 $= \pi\sqrt{-1}$ ne viene $1 : \pi :: \sqrt{-1} : \log. -1$, cioè il diametro alla circonferenza come la radice dell'unità negativa al logaritmo dell'unità negativa.

Dall' ugualtà $\varphi\sqrt{-1} = \log.(\cos.\varphi + \text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1})$ si ricava, preso e pel numero che ha per suo logaritmo naturale l'unità, $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos.\varphi + \text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1}$; e quindi $e^{n\varphi\sqrt{-1}} = \cos.n\varphi + \text{sen.}\,n\varphi\sqrt{-1} = (\cos.\varphi + \text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1})^n$.

Che se supponghiamo $e^{\varphi\sqrt{-1}} = B^{x\sqrt{-1}}$, e conseguentemente $\varphi\sqrt{-1} = x\sqrt{-1}\log. B$, cioè $\varphi = x\log. B$, ne inferiremo $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos.\varphi + \text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1} = B^{x\sqrt{-1}} = \cos.(x\log. B) + \text{sen.}\,(x\log. B)\sqrt{-1}$.

Parimente denotando p, e q due grandezze qualunque si ha $\log.(p + q\sqrt{-1}) = \log. p\left(\frac{p + q\sqrt{-1}}{p}\right)$ $= \log. p\left(1 + \frac{q}{p}\sqrt{-1}\right) = \log. p + \log.\left(1 + \frac{q}{p}\sqrt{-1}\right)$. Pigliſi φ per l'arco del raggio 1 della tangente $\frac{q}{p}$, ovvero del seno $\frac{q}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}$, e del coseno $\frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}$; ed avremo $\log.(p + q\sqrt{-1})$ $= \log. p + \log.(1 + \text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log. p + \log.\frac{\cos.\varphi + \text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1}}{\cos.\varphi} = \log. p - \log.\cos.\varphi + \log.$

(cos.

$(\text{cof.}\,\varphi + \text{fen.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log. p - \log. \frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$

$+ \log.(\text{cof.}\,\varphi + \text{fen.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log.(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \log.$

$(\text{cof.}\,\varphi + \text{fen.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log.(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \varphi\sqrt{-1}.$

Da tali Teoremi in sì poche linee dimostrati coll' ordinario calcolo finito riesce ora facilissimo l' inferire il famoso Teorema del Sig. D' *Alembert*

$(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1}$. Imperciocchè essendosi trovato $\log.(p+q\sqrt{-1}) = \log.(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \varphi\sqrt{-1}$, posto φ per l' arco sopra indicato, ne deriva $\log.(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = (m+n\sqrt{-1})$
$\log.(p+q\sqrt{-1}) = (m+n\sqrt{-1})\log.(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$

$+ (m+n\sqrt{-1})\varphi\sqrt{-1} = \log.(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}} +$

$\log.(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}n\sqrt{-1}} + m\varphi\sqrt{-1} - n\varphi$. Ma abbiamo dimostrato $B^{x\sqrt{-1}} = \text{cof.}(x \log. B) + \text{fen.}(x \log. B)\sqrt{-1}$, e però $(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}n\sqrt{-1}} =$

$\text{cof.}\left(\frac{1}{2}n \log.(p^2+q^2)\right) + \text{fen.}\left(\frac{1}{2}n \log.(p^2+q^2)\right)\sqrt{-1}$;

dunque sostituito questo valore, nascerà

$\log.(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = \log.(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}$

$+ \log.\left(\text{cof.}\left(\frac{1}{2}n \log.(p^2+p^2)\right) + \text{fen.}\left(\frac{1}{2}n \log.(p^2+q^2)\right)\right.$

$\left.\sqrt{-1}\right) + m\varphi\sqrt{-1} - n\varphi$; e passando dai logaritmi ai numeri proviene $(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$

$= e^{m\phi\sqrt{-1}-n\phi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\Big(\text{cos.}\big(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\big)$
$+\text{sen.}\big(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\big)\sqrt{-1}\Big)$. Ora $e^{m\phi\sqrt{-1}}$
$=\text{cos.}\,m\phi+\text{sen.}\,m\phi\sqrt{-1}$. Dunque $(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$
$= e^{-n\phi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\big(\text{cos.}\,m\phi+\text{sen.}\,m\phi\sqrt{-1}\big)\big(\text{cos.}$
$\big(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\big)+\text{sen.}\big(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\big)\sqrt{-1}\Big)$
$= e^{-n\phi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\times\Big(\text{cos.}\,m\phi\,\text{cos.}\big(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\big)$
$-\text{sen.}\,m\phi\,\text{sen.}\big(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\big)+\text{cos.}\big(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\big)$
$.\text{sen.}\,m\phi\sqrt{-1}+\text{cos.}\,m\phi\,\text{sen.}\big(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\sqrt{-1}\big)\Big)$
$= e^{-n\phi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\times\Big(\text{cos.}\big(m\phi+\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\big)$
$+\text{sen.}\big(m\phi+\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\big)\sqrt{-1}\Big)$. Posto pertanto $P=e^{-n\phi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\text{cos.}\big(m\phi+\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\big)$,
$\mathfrak{Q}=e^{-n\phi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\text{sen.}\big(m\phi+\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\big)$,
risulta finalmente $(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=P+\mathfrak{Q}\sqrt{-1}$.

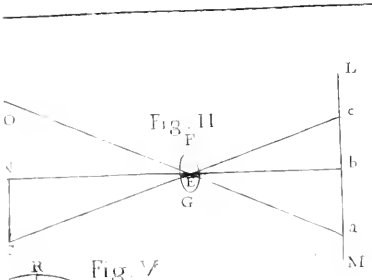


Fig. II
L
c
b
a
M
F
G

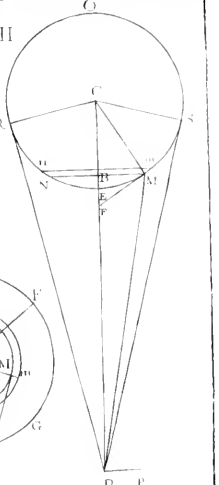


Fig. III
O
C
R
S
P
F

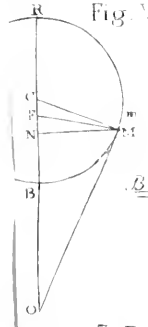


Fig. V
R
O

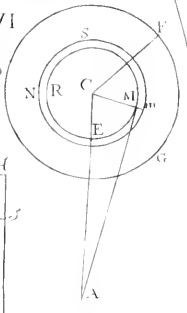


Fig. VI
S
F
O
R
C
E
G
A

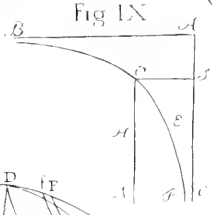
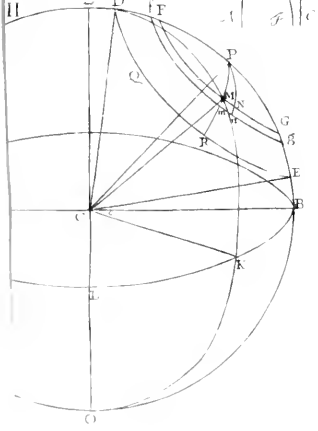


Fig. IX
B
A
C


Z
D
F
P
Q
G
E
B
K
O

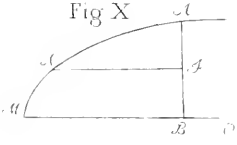


Fig. X
A
B

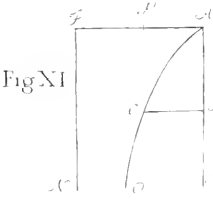


Fig. XI
A
B

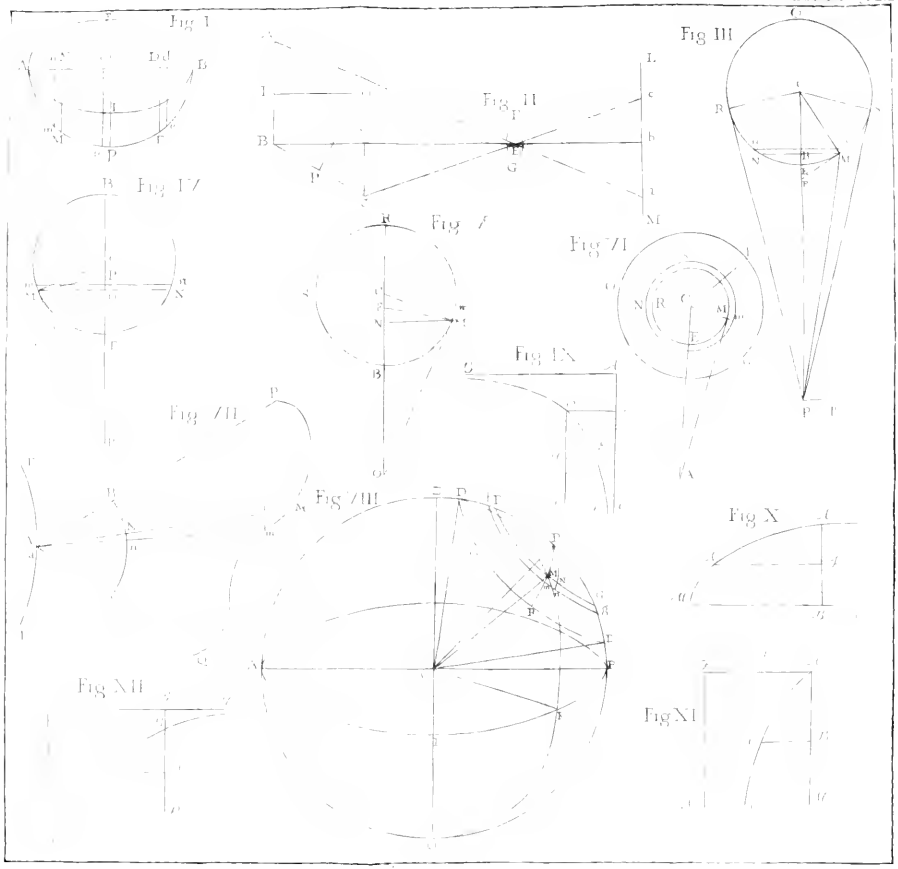


Fig I
Fig II
Fig III
Fig IV
Fig V
Fig VI
Fig VII
Fig VIII
Fig IX
Fig X
Fig XI
Fig XII

DESCRIZIONE
DI UNA
MACCHINA METEREOLOGICA

Per mezzo della quale ſi determina di ora in ora la durata e quantità della pioggia.

Del Sig. Cavaliere MARSILIO LANDRIANI.

SEbbene fino dall' erezione delle più antiche e celebri Accademie ſiaſi tenuto eſatto conto della quantità della pioggia caduta ne' diverſi giorni dell' anno, e vi ſia ſtato perfino chi ha miſurato la quantità della pioggia che cade a diverſe altezze; pure per quanto io ſappia alcuno non vi è ſtato ancora che abbia intrapreſo delle oſſervazioni circa alla durata e quantità della pioggia caduta nelle diverſe ore del giorno, e della notte; eſſendoſi ſoltanto limitate le oſſervazioni ed il regiſtro de' giornali di coloro che hanno intrapreſe delle oſſervazioni metereologiche a indicare ſemplicemente, che in un tal giorno era caduta una data quantità di pioggia, e tutto al più fu lodata la diligenza di chi nel riferire i riſultati delle oſſervazioni ſulla quantità della pioggia caduta in un dato giorno vi aggiunſe che la pioggia era ſtata o continua od interrotta.

Eppure la cognizione della durata della pioggia, non meno che della di lei quantità oraria, non è un oggetto ſemplicemente curioſo, eſſendo eſſa certamente utile ed intereſſante per ben conoſcere l' indole e la natura di un clima, e per render ragione di molti fe-

nomeni dell' atmosfera. Imperocchè se si rifletta che qualunque benchè menoma modificazione del fluido che noi respiriamo non può essere in alcun modo indifferente al ben essere dell' economia animale, e che la durata non meno che la di lei quantità influiscono moltissimo nelle variazioni delle modificazioni dell' atmosfera, nessuno certamente vi sarà che risguardar possa come una vana e sterile curiosità l' occuparsi di queste osservazioni coll' ammetterle nel ruolo delle altre osservazioni metereologiche.

L' umidità dell' atmosfera, che è uno degli elementi della di lei salubrità, non solo procede dalla traspirazione dell' immensa copia de' vegetabili che coprono la terra, dalla respirazione e traspirazione degli animali, dall' evaporazione delle acque e da simili cause, ma anche dalla quantità e durata della pioggia; per modo tale che taluno si è lusingato di poter determinare l' umidità di un clima e di una stagione dalla semplice cognizione della quantità dell' acqua piovuta. Ma sebbene una tale lusinga sia stata dimostrata vana dalle osservazioni e da' confronti del Sig. *Dobson* (*a*), non perciò si può conchiudere che le pioggie non influiscono sull' umidità dell' atmosfera; ma che soltanto non è sempre proporzionale l' umidità dell' aria alla quantità della pioggia.

Per render più giusto, e meno fallace questo confronto fra l' umidità dell' aria e la pioggia conviene aver riguardo più alla durata della pioggia che alla di lei quantità, poichè stando l' aria per un maggiore spazio di tempo in contatto dell' acqua s' imbeve di una maggiore quantità di umido, che non assorbisce sì facilmente nelle dirotte pioggie sebbene abbondantissime.

(*a*) Phil. Transactions.

Inoltre l' aria nella caduta delle pioggie ſi deflogiſtica, ed acquiſta una maggiore ſalubrità; poichè dalle belle ſperienze di *Prieſtley* ſi ſa che uno dei mezzi, che la natura impiega per rendere all' atmosfera l' originaria ſua ſalubrità, è il dilavamento delle pioggie; e ſi ſa altronde che i ſanghi, che per mancanza delle acque tramandano de' vapori moſetici, maſſime ſe ſieno percoſſi dai raggi ſolari, non infettano più l' atmosfera qualora ſieno coperti da una notabile quantità di acqua.

Tutto ciò è appoggiato alla giornaliera ſperienza, e baſta dare un' occhiata allo ſtato dell' aria delle campagne paludoſe per convincerſene; imperocchè in quali ſtagioni l' aria è giudicata e trovata inſalubre? in quelle ſtagioni appunto nelle quali le pioggie ſono rare o di breve durata; poichè allora le terre paludoſe, non eſſendo coperte di molte acque, riſcaldate dal ſole fermentano, ed imputridendo eſalano una notabile quantità di vapori aeriformi parte flogiſticati e parte infiammabili che meſcolandoſi coll' atmosfera ne alterano la di lei purezza e ſalubrità. Nè per altra ragione nelle paludi Pontine, nelle maremme Saneſi, ed in alcuni luoghi paludoſi della Lombardia Auſtriaca, dove e pel genere di coltivazione, e per le molte acque ſtagnanti l' aria è quaſi abitualmente inſalubre, noi non temiamo più di reſpirare quelle arie in quelle ſtagioni in cui le frequenti pioggie hanno reſo all' aria una uniforme, e preſſo a poco eguale ſalubrità.

Egli è vero però che talvolta è ſtato oſſervato che dopo lunghe ſiccità la caduta di una breve pioggia è ſtata accompagnata da febri d' indole maligna, perniciosa, che non ſarebbero inſorte ſe la ſiccità foſſe continuata più oltre; ma queſta pur troppo vera oſſervazione non prova che inſalubri ſiano le pioggie, ma che una tale infezione procede da uno ſtato particolare delle terre paludoſe.

Eſſe ſiccome non ſono che un ammaſſo di cadaveri

d' insetti, di foglie, di virgulti infraciditi e scomposti, quando sono coperte da un notabile strato d' acqua non fermentano, ma vanno lentamente decomponendosi, e risolvendosi ne' loro principj, senza tumulto o notabile effervescenza. Forse anche i vapori esalanti da queste sostanze scomponentisi in vece di mescolarsi coll' atmosfera, incontrando uno strato d' acqua, da quello sono come trattenuti ed imprigionati e se pur giungono fino alla superficie dell' acqua, hanno in parte perduto il loro veleno, e sono in qualche modo meno mofetici: ma quando i fanghi sono stati per lungo tempo esposti e percossi dal sole, e sono resi aridi, tostochè una copiosa quantità di acqua improvvisamente li penetra, la fermentazione per così dire sospesa, od impedita, viene dall' acqua favorita, e promossa a segno che una vera e tumultuosa fermentazione quindi ne nasce, ed un copioso torrente di vapori flogistici alkalici, e talvolta infiammabili si sparge nell' atmosfera, e quella singolarmente infetta ed avvelena.

Il Sig. *Guglielmo White* ha fatto delle belle sperienze ed osservazioni su questa materia, le quali rendono ragione di questi sovraccennati singolari fenomeni dell' atmosfera. Poichè egli ha trovato che il fango paludoso asciutto poco o niente altera l' aria che gli è in contatto; laddove se il fango sia imbevuto da molta acqua, esala una tale quantità di vapori flogistici, che in poco tempo l' aria è resa singolarmente flogisticata. Perciò se dopo una lunga siccità arriva che cada della pioggia di breve durata, l' atmosfera in vece di deflogisticarsi si flogistica, e si rende insalubre; perlochè non è da farsi le meraviglie se talora dopo la caduta di una pioggia di breve durata si sieno rese dominanti le malattie di aria cattiva. Ma se le pioggie sono abbondanti, e di una notabile durata, per cui i fanghi sieno stati abbondantemente penetrati e coperti dall' acque, le pioggie anzi che essere dannose salutari

fono, e benefiche, poichè i vapori putridi ſparſi per l' atmoſfera ſono dalle pioggie precipitati, e la vegetazione che era prima languente ſi rinvigoriſce, e maggior copia d' aria deflogiſticata quindi eſpirano le foglie di tutte le piante.

Ma ſenza eſtenderci più oltre a ragionare dell' utilità che ci proviene dalle pioggie baſta dare un' occhiata ai riſultati che hanno fornito le Oſſervazioni fatte ſulla durata e quantità della pioggia caduta in tutto l' anno ſcorſo (*a*) per comprendere quali utili e curioſe cognizioni ci ſomminiſtri una macchina che di ora in ora ci indichi la quantità non meno che la durata della pioggia. Poichè toſto ſi comprende quale ſia ſtato il meſe, il giorno, l' ora più piovoſa, ſe di giorno piova aſſai più che di notte, e mille altre utili nozioni che dall' uſo di queſta macchina ne derivano.

La macchina che io ho immaginato e che da più di un anno ho fatto coſtruire tiene conto non ſolo della durata, ma ancora della preciſa quantità oraria della pioggia.

AA è una tavola circolare di legno annerito di circa 20 pollici di diametro (vedi *fig.* 1 *tav.* 1), che ha nel mezzo un cerchio d' ottone *BB* diviſo in 24 parti, ciaſcuna delle quali è ſuddiviſa in 30 parti. Eſſendo il cerchio *BB* di un diametro minore della tavola circolare *AA*, neceſſariamente laſcia tutto all' intorno una zona di legno annerito di due pollici di larghezza, la quale è diviſa in due parti eguali *DD*, *CC* da un anello d' ottone *EE*, incaſtrato nella tavola *AA*. Queſta tavola *AA* è fiſſata a ſfregamento ſopra l' albero di una ruota orizzontale, che mediante un movimento

(*a*) Queſte Oſſervazioni ſiccome entrano in un piano di oſſervazioni metereologiche fatte in Milano ſaranno dal Sig. *Prof. Moſcati* pubblicate nel primo volume degli Atti della Società Patriotica di Milano.

d' orologeria compie un' intera rivoluzione nello ſpazio di 24 ore (la *fig.* 1 rappreſenta la tavola circolare che ſi vede poſta orizzontalmente nella *fig.* 2).

Sul piano del telajo del movimento d' orologeria ſottopoſto alla tavola *AA* è fiſſato un ſolido braccio d' ottone orizzontale *F* che porta il telajo *GHJH*, che ſeparatamente, e quaſi nella naturale ſua grandezza è diſegnato nella *tav.* 2 *fig.* 2.

In ciaſcuna delle due laſtre piane orizzontali *HH* di queſto telajo evvi una fineſtra quadrangolare *T*, *S*, deſtinata a ricevere l' aſta quadrangolare *MM* rappreſentata ſeparatamente nella ſua naturale grandezza nella *fig.* 5 della *tav.* 2 Acciocchè queſt' aſta poſſa liberamente muoverſi, e ſcorrere nelle ſuddette fineſtre *S*, *T* ha applicate quattro mobili rotelle d' acciajo *P*, *P* ecc. che appoggiando contro l' aſta quadrangolare *MM* la tengono regiſtrata in modo che non ſi può muover che nello ſteſſo piano, e non impediſcono punto, anzi favoriſcono la libertà de' ſuoi movimenti.

La *fig.* 6 della *tav.* 2 eſprime l' aſta *MM* colla rotella *P* applicatale, e la *fig.* 7 della ſteſſa *tav.* eſprime la rotella *P* ſeparata.

L' aſta quadrangolare *MM* porta ſul piano della ſua eſtremità ſuperiore un braccio orizzontale d' ottone QQ fiſſato colla vite W, il quale piega ad angolo retto in *S*, ed ha alla di lui eſtremità un porta-matita *N*. (Nella *fig.* 5 della *tav.* 2 è tutto ciò baſtevolmente eſpreſſo.)

Dal piano ſuperiore *H* del telajo *HGHG* ſorge una colonnetta d' ottone *O* ſeparatamente rappreſentata nella *tav.* 2 *fig.* 3, la quale ha ſuperiormente una cerniera *N* in cui ſi muove il braccio d' ottone *YY*, la di cui eſtremità termina in un picciolo imbuto oſſia vaſe conico *R*. Queſto braccio *YY* ha non molto lontano dalla cerniera *N* un picciolo bracciuolo tranſverſale Z

le *Z* che appoggia e preme ſul braccio QQ come è baſtevolmente eſpreſſo nella *fig.* 2 della *tav.* 1.

Una molla ſpirale *RR* fiſſata ad un picciolo parallelepipedo *T* che ſorga ſulla laſtra inferiore *H* (nella *fig.* 4. della *tav.* 1. ſi vede ſeparatamente la molla *RR*, ed il parallelepipedo *T*) ſoſtiene tutto il peſo dell' aſta quadrangolare *MM*, del braccio QQ, e dell' altro braccio *YY*, poichè eſſo pure preme l' aſta *MM* per eſſere il bracciuolo *Z* appoggiato ſul braccio QQ. La forza di queſta molla *RR* deve eſſere tale che baſti a tener ſollevata l' aſta *MM* e tutto ciò che le è anneſſo in modo che l' eſtremità della matita *H* ſia diſtante una buona linea parigina ed anche più dalla zona *CC* della tavola circolare *AA*.

Dalla deſcrizione di queſto apparato facilmente ſi comprende che ſituando ſul colmo del tetto un ampio imbuto *AA* di latta, o di rame inverniciato che abbia più piedi quadrati di area (vedi *fig.* 9 *tav.* 2), l' acqua che pioverà in queſto imbuto cadrà nel picciolo vaſe conico *R*, ed il peſo dell' acqua contenuta in queſto vaſe farà abbaſſare la leva oſſia braccio *YY*, e con eſſo l' altro braccio QQ, e la matita *H* ſi abbaſſerà quindi ſulla zona *CC* della tavola circolare *AA*; e continuerà a ſtarvi appoggiata fino a tanto che il vaſe conico *C* farà ripieno d' acqua. Poichè per quanto picciola ſia la quantità dell' acqua caduta nel vaſetto *R* premendo ſull' eſtremità della leva *YY* è ſufficiente a deprimere la leva ſuddetta.

Ora dunque ſe col ceſſar della pioggia ſi poteſſe ottenere che il vaſetto conico *R* da sè medeſimo ſi votaſſe, la molla ſpirale *RR* toltole il peſo dell' acqua contenuta nel vaſetto *R* rialzerebbe alla primiera altezza l' aſta *MM*, e ſeco la matita *H*. Ora un tale votamento del vaſetto *R* ſi ottiene per mezzo di un picciolo ſifoncino di criſtallo *NV* (vedi la *fig.* 6. *tav.* 1.) compoſto di un tubo *N* che continua capillare fino al-

la curvatura dove ſi allarga e termina in *V* a foggia di una penna da ſcrivere.

La capillarità di queſto ſifoncino *NV* e la di lui lunghezza devono eſſere tali, che appena l'acqua tocca l'eſtremità della gamba capillare *N* ſpontaneamente venga attratta, e goccia a goccia fluiſca dall'eſtremità più larga *V* del ſifone *NV*: e ſiccome non è così facile il procurarſi un ſifone che ſia di una tale preciſa capillarità che attragga l'acqua ſenza aſpirar l'aria, e che l'acqua attratta fluiſca dall'altro gambo *V* goccia a goccia, perciò ſoglio procurarmi uno di queſti ſifoni che abbia la gamba *P* di un diametro ſimile a quello dei termometri a ſpirito di vino; indi inſinuando in eſſo diverſe ſetole di cignale facilmente ottengo che l'acqua appena toccato che abbia l'eſtremità del tubo capillare *P* ſia attratta, e goccia a goccia fluiſca dall'altro braccio più largo *V*.

L'uffizio di queſto ſifone *NV*, che è la parte più importante del Croniografo e che deve eſſer adattato al vaſe conico *R*, ſi è di vuotare, ceſſata che ſia la pioggia, tutta l'acqua contenuta nel vaſetto conico *R*; ed è fatto con una gamba capillare acciocchè nelle minute pioggie minore ſia la quantità dell'acqua che fluiſce dal ſifone *NV* di quella che viene raccolta nel vaſe *AA* (*fig. 9 tav. 2*) e che cade nel vaſetto *R*. Poichè anche nelle pioggie minutiſſime il vaſetto *R* è ſempre pieno, conſeguentemente la matita *H* ſta appoggiata alla zona *CC* per tutto quel tempo in cui la pioggia continua a cadere, e laſcia ſulla zona ſuddetta una ſtriſcia bianca per tutto quello ſpazio di tempo in cui è piovuto.

Affinchè la matita *H* ſia pronta a ſcrivere ſulla zona *CC* la durata della pioggia, deve eſſere fatta di una argilla bianca teneriſſima, ed io coll'eſperienza di più di un anno ho trovato ottima quella che volgarmente ſi chiama paſtello bianco de' Pittori.

La gamba *V* del ſifone *NV* è fatta della forma poc'anzi deſcritta, poichè ſe anche la gamba *V* aveſſe un diametro eguale a quello della gamba *N*, non ſempre il ſifone *NV*, ceſſata la pioggia, voterebbe il vaſetto *R*. Imperocchè un ſifone capillare aſpira l'acqua quando tutta la cavità del ſifone ſia intieramente libera; ma ſe una goccia d'acqua all'eſtremità dell'altra gamba che non peſca nel vaſetto *R*, o nella curvatura del ſifone, ſi arreſta, il ſifone più non giuoca. Poichè come è noto dalle ſperienze di *Jurin*, e *Muſſchembroek* un tubo capillare, la di cui eſtremità ſia oſtrutta da una goccia d'acqua o ermeticamente chiuſa, non attrae più l'acqua al diſopra del ſuo livello. Ora ſe ambedue le gambe del ſifone *NV* foſſero di un diametro eguale, frequentemente ed il più delle volte accaderebbe che qualche goccia d'acqua ceſſato il fluſſo del ſifone ſi arreſterebbe o alla eſtremità della gamba più lunga del ſifone, o nella curvatura. Laddove facendo che la gamba più lunga abbia un diametro di tre in quattro linee parigine, e che la di lei eſtremità ſia fatta a foggia di una penna da ſcrivere, giammai l'acqua non può arreſtarſi nè all'eſtremità, nè nella curvatura del ſifone, conſeguentemente l'uffizio del ſifone *NV* non reſta giammai ſoſpeſo, qualunque ſiaſi la circoſtanza della pioggia.

Talvolta accade che l'acqua che piove nel vaſetto *R* porti ſeco qualche grano di ſabbia od altro corpo ſtraniero il quale potrebbe inſinuarſi coll'aſpirazione dell'acqua, introdurſi nel tubo capillare *N*, e rendere inetto l'uſo del ſifone. E certamente di poco ſicuro uſo eſſo ſarebbe ſe non ſi aveſſero varie avvertenze, per cui quand'anche l'acqua che cade nel vaſetto *R* ſia torbida, la di lui funzione non è punto ſoſpeſa. Queſte avvertenze ſono di frammettere al tubo WW (*fig. 2 tav. 2.*) che conduce l'acqua che piove nel grande imbuto *AA* ſituato ſul colmo del tetto, un velo che arreſta e trat-

tiene i grani di ſabbia, e di altri corpi ſtranieri che caſualmente cader poteſſero colla pioggia. A queſto oggetto due o tre pollici al diſopra dell'eſtremità di queſto tubo, eſſo è diviſo in *S*, e *T* per potervi frammettere il velo ſuddetto. Inoltre ſebbene la pioggia prima di cadere nel vaſetto conico *R* attraverſi e filtri pel velo or ora deſcritto, ciò non oſtante varie volte a diſpetto di queſto artificio qualche picciolo grano di ſabbia colla pioggia paſſa pel velo frappoſto nel vaſetto *V*. Per impedire che queſti granelli di ſabbia ſieno aſpirati dal tubo capillare, è neceſſario di fare che la lunghezza della gamba capillare *N* del ſifone *NV* ſia tale che applicato il ſifone *NV* al vaſetto *R* l'eſtremità della gamba *N* ſia diſtante due buone linee dal fondo del ſuddetto vaſe *R*. Poichè i grani di ſabbia che dentro vi cadono, eſſendo ſpecificamente più gravi dell'acqua, precipitano nel fondo conico del vaſetto *R*, e non poſſono quindi giammai entrare nel gambo capillare del ſifone *NV*.

Ciò non pertanto accade, e dalla ſperienza di più di un anno che faccio uſo di queſta mia macchina ſono ammaeſtrato, che talvolta, nè di ciò ſaprei aſſegnarne la cagione, ſe è qualche tempo che non ſia piovuto, il ſifone *NV* avvegnachè non contenga alcun corpo ſtraniero fuori delle ſetole di cignale, pure non aſpira l'acqua, inſomma non fa le funzioni per le quali è ſtato immaginato. Forſe cagione di ciò è il diſſeccamento della ſetola inſinuata nel ſifone, la quale nel diſſeccarſi ſi attortiglia più del biſogno, e riſtringe il foro della gamba capillare *N*. Poichè ſe ſi bagni la ſetola, o a quella ſi ſoſtituiſca un'altra eguale, il ſifone *NV* riprende le primiere qualità. Perciò qualora ſia qualche giorno che non ſia piovuto, e che l'aria ſia ſtata molto aſciutta, è neceſſario d'inumidire il ſifone *NV* e la ſetola in eſſo contenuta, e qualche volta ancora ſarà ben fatto di ſoſtituirvi un'altra: così pure è neceſſario

di cangiare di tempo in tempo il velo frappoſto alle due parti *SW*, *WT* del tubo *W* (*fig.* 2 *tav.* 2) e di pulire il fondo del vaſe conico *R* della ſabbia che a diſpetto del velo interpoſto in eſſo cade; altrimenti col tratto del tempo il velo non è più permeabile dall' acqua, ed il gambo capillare del ſifone *NV s'* interriſce.

E' inutile che io avvertiſca che tutti quegli ſpazj che nella zona *CC* della tavola circolare *AA* (*fig.* 1 e 2 della *tav.* 1) ſaranno ſegnati da una ſtriſcia bianca dinoteranno le ore ed i minuti nei quali la pioggia è caduta, e quegli ſpazj, che ſaranno indicati dalla matita *H*, quelle ore e minuti ſegneranno ne' quali non è piovuto. Poichè ſtante la coſtruzione della macchina or ora deſcritta facilmente ſi comprende che fedelmente la matita *H* ſi abbaſſa ſulla zona *CC* al cominciar della pioggia, e continua a ſtar ivi appoggiata fino a tanto che la pioggia continua, ceſſata la quale toſto ſi rialza.

Per regiſtrare i riſultati giornalieri di queſta macchina, oſſia per regiſtrare le oſſervazioni Croniografiche ho immaginato una tavola comodiſſima, mediante la quale in un ſolo colpo d' occhio ſi vede l' andamento della durata della pioggia di meſe in meſe, di giorno in giorno, di ora in ora; ſi conoſce ſubitamente quali ſieno ſtati i giorni e le ore più piovoſe, ſi ſa ſe piove più di giorno che di notte, ſe più avanti il mezzodì che dopo, e mille altri ſimili utiliſſimi riſultati ci forniſce che difficilmente ſi potrebbero altrimenti ricavare. Per dimoſtrare l' uſo di queſta tavola ho creduto di far coſa grata al lettore di preſentargli quella che comprende le oſſervazioni del meſe di Agoſto dell' anno 1781.

Queſta tavola, come ſi vede, è diviſa da linee orizzontali in 33 ſpazj di una grandezza preſſo a poco eguale, ſolo che il primo ſpazio e l' ultimo ſono al-

quanto più grandi degli altri intermedj. Ciascuno di questi spazj orizzontali è diviso in 26 parti eguali da alcune linee perpendicolari, solo che anche in questo caso la prima divisione e l'ultima sono più grandi delle altre intermedie.

Nel primo spazio orizzontale si scrivono 24 numeri, cioè nella seconda casella si scrive il numero 1, nella terza il 2, e così nelle altre gli altri numeri fino al 24 cioè le 24 ore di un giorno. Nell'ultima casella a mano destra si scrive *somma dei minuti ne' quali è piovuto*, e nella prima casella a mano sinistra si scrive il nome del mese di cui quella tabella comprende le osservazioni. Nelle altre caselle verticali al disotto di questa si scrivono i numeri dall'uno fino al 31 cioè i giorni di un mese, e nell'ultima di queste caselle si scrive *somma dei minuti ne' quali è piovuto in ciascun' ora*.

Posto ciò ogni intervallo orizzontale essendo diviso in 24 parti rappresenterà le singole ore di ciascun giorno, ed ogni spazio orizzontale esprimerà i singoli giorni di ciascun mese. Ora trovando io sulla zona oraria CC (*fig.* 2 *tav.* 1) nel giorno 3 del mese d'Agosto nello spazio corrispondente all'ora quinta di quel giorno una striscia bianca corrispondente a 15 minuti, perciò nella quinta casella del giorno 3 scrivo il numero 15; e nella sesta, settima, ottava, e nona casella di quel giorno scrivo i numeri 25, 10, 15, 5 perchè nell'ora sesta di quel giorno non piovette che per soli 25′, nella settima piovette per 10′ ecc. Nè essendo piovuto in tal giorno dalle 10 fino alle 16, e nell'ora 16 non essendo continuata la pioggia che per soli cinque minuti, perciò nella casella sotto l'ora 16 del giorno 3 scrivo il numero 5, e nell'ultima casella dopo la 24 scrivo il numero 75, perchè appunto in quel giorno la durata della pioggia è stata di soli 75′.

Nel giorno 4 di Agosto nella prima e seconda ora

non piovette, perciò non vi è alcun numero nelle prime due caſelle di un tal giorno; nell' ora terza di un tal giorno la pioggia continuò per 30′, e nell' ora quarta per 40′, e non piovette più alcun' altra ora, perciò nella caſella terza, e quarta vi ſono ſcritti i due numeri 30′ e 40′, e le altre caſelle ſono vuote, e ſolo nell' ultima più grande evvi il numero 70′, cioè la ſomma dei minuti ne' quali è piovuto nel giorno 4.

Senza eſtendermi più oltre ad accennare le altre oſſervazioni Croniografiche che contiene queſta tavola, baſta darle un' occhiata per comprenderne l' uſo, poichè toſto ſi vede che in queſto modo ſi regiſtrano brevemente e nitidamente i riſultati giornalieri del Croniografo, e facilmente ſi poſſono quindi oſſervare gli andamenti della durata della pioggia, e determinare quali ſieno i giorni più piovoſi, e quali i meno piovoſi, ſe ſia piovuto più ne' primi dieci giorni del meſe che ne' ſecondi, ſe più ne' ſecondi che negli ultimi, poichè ſi vede toſto che nel meſe di Agoſto è piovuto aſſai più nei ſecondi dieci giorni del meſe, che nei primi e negli ultimi, e più negli ultimi che nei primi, poichè la durata della pioggia nei ſecondi dieci giorni è ſtata di 610′, negli ultimi di 580′, e nei primi di 225′, ed il totale della durata della pioggia è ſtato in quel meſe di 1415′. Tutta altra diviſione e confronto ſi può facilmente fare, e determinare per eſempio in quali punti lunari ſia maggiore la durata della pioggia ecc.

Per ſapere poi quali ore ſieno le più piovoſe, e quali le meno, ſe piova più di giorno che di notte ecc. ſi ſommano tutti i numeri contenuti in ciaſcuna delle caſelle degl' intervalli verticali, e nelle ultime caſelle più grandi a piedi della tavola ſi ſcrivono le ſomme. Ciaſcuno di queſti numeri ſcritti in ciaſcuna di queſte 24 caſelle rappreſenterà la ſomma dei minuti ne' quali è piovuto in ciaſcun' ora. Dando un' oc-

chiata a queſti numeri ſi vede toſto che le ore più piovoſe nel meſe di Agoſto ſono ſtate la ſeconda, la prima, la quarta, la terza, e la vigeſima; l'ora meno piovoſa è ſtata la diciotteſima, poichè in eſſa non piovette, indi la nona, la diciaſſetteſima, la venteſimaterza, e la venteſimaquarta. Dividendo in tre parti il giorno di 8 in 8 ore ſi trova che le prime otto ore ſono ſtate più piovoſe delle ſeconde e queſte più delle ultime. In ſomma queſta tavola dà in un momento tutti i confronti e paragoni della durata della pioggia ecc.

DELL' IOMETROGRAFO.

Non baſta ſapere la durata della pioggia, conviene anche determinare la quantità dell'acqua che piove di ora in ora. Se la pioggia foſſe ſempre uniforme, tenendo conto della durata ſi avrebbe anche la di lei quantità; ma rare volte anzi quaſi mai ſuccede nel noſtro clima almeno che la pioggia ſia uniforme maſſime nella ſtate e nell'autunno, poichè durante qualche rovinoſo temporale la furia dell'acqua è tale che la quantità dell'acqua che piove uguaglia, e ſupera quella che nello ſpazio d'una ſettimana o di un meſe piove nell'inverno, o nella primavera. Perciò ho penſato di aggiugnere al Croniograſo anche l'Iometrograſo, una macchina cioè che ſulla tavola circolare *AA* (*fig.* 2 *tav.* 1) ſcrive la preciſa quantità dell'acqua che piove d'ora in ora.

Per avere tutta la pioggia, che cade nel grande imbuto *AA* (*fig.* 9 *tav.* 2) ſenza che ſe ne faccia la menoma diſperſione, è neceſſario che l'apertura dell'imbuto *AA* oſſia il tubetto conico *B*, in cui termina l'imbuto *AA*, entri in un tubo cilindrico *CC* di un diametro per lo meno del doppio maggiore della ſuddetta apertura *B*; poichè l'acqua che raccoglie l'imbuto *AA* ſenza ſtriſciare lungo le pareti del tubo *CC* tutta cade nel mezzo

mezzo del tubo suddetto, e la prima goccia che cade dal tubetto *B* cade nel sottoposto vasetto *R* (*fig.* 2 *tav.* 1).

Inoltre è necessario che questo imbuto oltre all' essere di una notabile grandezza sia situato sulla parte più elevata del tetto acciocchè tutta la pioggia qualunque direzione essa abbia sia in esso raccolta. Nel nostro clima in cui nell' inverno, e nell' autunno le pioggie sono talvolta sì minute che sembrano piuttosto una folta nebbia che precipiti che una pioggia, pure adoperando un imbuto che abbia nove piedi quadrati di area, la quantità dell' acqua che esso raccoglie è tale che le goccie che cadono dall' apertura *B* dell' imbuto *AA* (*fig.* 9 *tav.* 2) si succedono con tale e tanta prontezza che non vi è fra l'una e l'altra un quarto di minuto secondo, come ho avuto occasione di osservare adoperando un orologio che segnava i quarti di secondo.

Situato un tale imbuto sul colmo del tetto, l'acqua che da esso fluisce si raccoglie nel vase Iometrico *OAAO* rappresentato nella *fig.* 5 della *tav.* 1. Questo vase *AAOO* è formato di un tubo cilindrico *AA* di cristallo, chiuso inferiormente da una lastra d' ottone *PP* e superiormente da un coperchio parimenti d' ottone *TT*, il quale ha nel mezzo un foro circolare *V* di circa una linea e mezzo di diametro; ed ha lateralmente un tubetto d' ottone *SS*, il quale è fatto a forma di cono in tutta la grossezza della lastra d' ottone *TT*, indi s' inalza cilindrico fino al labbro del vase *OO*.

Io chiamo questo tubo *SS* il tubo sfiatatore, perchè appunto serve a dar uscita all' aria contenuta nel vase *AA* a misura che essa è scacciata dall' acqua che cade pel foro *V*; ed affinchè l'apertura di questo tubo *SS* non venga chiusa da qualche goccia d' acqua che vi si potesse fermare, essa è fatta espressamente di una figura conica.

Nel mezzo di queſto vaſe *AA* evvi un ſifone tantalo *DDCCC* di criſtallo compoſto di due bracci di diſegual diametro e lunghezza. Il braccio più corto *DD* ha circa quattro linee di diametro, e conſerva un tal diametro quaſi fino all'origine della curvatura del ſifone dove ſi riſtringe e non ha che due linee poco più di diametro: vale a dire lo ſteſſo diametro dell' altro braccio *CCC*. L'eſtremità di queſto braccio *DD* giugne quaſi fino a radere il fondo *PP* del vaſe *AA*, non lo tocca però, poichè è da quellò diſtante un quarto di linea franceſe. L'altro braccio *CCC* continua cilindrico per quaſi tutta la ſua lunghezza, eſce dal fondo *PP*, e ſi ſcarica nell'imbuto *K* che or ora deſcriverò.

Al diſopra del coperto *TT* evvi ſtabilmente fiſſato un altro tubo di criſtallo *OO* di un diametro maggiore del vaſe *AA*. Queſto ha lateralmente una fineſtra *B* per ricevere le due leve oſſia aſte orizzontali *QQ YY*, e i pezzi che loro appartengono.

La *fig.* 4 della *tav.* 2. rappreſenta la ſezione oſſia ſpaccato di queſto vaſe Iometrico, e dimoſtra che il braccio *DD* del ſifone *DDCCC* non arriva a toccare il fondo *PP*, che la ſommità della curvatura del ſuddetto ſifone entra nella groſſezza del coperto *TT*, in cui evvi eſpreſſamente una picciola cavità per riceverla, che il tubetto ſfiatatore *SS* è aperto a forma di cono nel vaſe *AA*, e che finalmente nel mezzo del coperchio *TT* evvi un foro circolare *Y*.

Nelle due laſtre orizzontali *HH* del telajo *HGHG* (vedi *fig.* 2 *tav.* 1, e *fig.* 2 *tav.* 2) vi ſono due fineſtre quadrangolari *S*, *T*, nelle quali ſcorre un' aſta quadrangolare *LL* ſimile in tutto all'aſta *MM* ſolo che è alquanto più lunga. Affinchè i movimenti di queſta aſta ſieno liberi e facili, eſſa pure ha applicato quattro rotelle *P*, *P*, ecc. come l'aſta *MM*.

Sul piano dell'eſtremità ſuperiore di queſta aſta *LL* è fiſſata con una vite *W* un'aſta orizzontale *XX*, che

da una parte ha attaccato un porta-matita *K*, e dall' altra porta un tubetto d'ottone *F*, dentro il quale ſi move un'aſta cilindrica *I* che termina in un guancialetto di pelle *L*. L'aſta *I* è attaccata ad una molla ſpirale che la ſoſtiene, come ſi vede nella ſezione di queſto tubetto rappreſentata nella *fig.* 3 della *tav.* 2. In vece della molla ſpirale ſi può fiſſare ſul piano dell'aſta orizzontale *XX* una molla *OO* (*fig.* 10 *tav.* 2), ed attaccare ad eſſa l'aſta cilindrica *I*, poichè queſta molla *OO* fa le veci della molla ſpirale contenuta nel tubetto *F*.

Oltre a ciò l'aſta *LL* ha inferiormente un'aſta d'ottone *FF* verſo l'eſtremità un poco piegata acciocchè il mezzo dell'imbuto *KK* ad eſſa attaccato corriſponda al mezzo della groſſezza dell' aſta quadrangolare *LL*. Il peſo dell'aſta *LL* e di tutti i pezzi che le ſono anneſſi è ſoſtenuto da una molla ſpirale *SS* ſimile a quella che ſoſtiene l'altra aſta *MM*. Anche per queſta aſta *LL* la forza della molla *SS* deve eſſere tale che l'eſtremità della matita *K* ſia tenuta diſtante dalla tavola circolare *AA* circa di due linee parigine.

A miſura che l' acqua pel foro *V* cade nel vaſe *AA* l' aria in eſſo contenuta eſce pel tubo ſfiatatore *SS*, e intanto l'acqua va a poco a poco inalzandoſi, e giunta che ſia raſente la linea punteggiata *XX* (*fig.* 4. *tav.* 2) il ſifone tantalo *DDCCC* in pochi ſecondi vota il vaſe *AA*, poichè giunta l' acqua alla ſuddetta linea *XX*, l' altra acqua che ſopravviene non trovando altro ſpazio da occupare fuori che il picciolo ſpazio cilindrico che forma il foro *V* fatto nel coperchio *TT*, in eſſo s'inalza, e baſta il peſo della picciola colonnetta d' acqua contenuta nel foro *V* per obbligare il ſifone *DDCCC* a vuotare il vaſe *AA*: e ſiccome anche nelle pioggie minutiſſime un tale ſpazio *V* appena arrivata che ſia l' acqua nel vaſe *AA* alla linea punteggiata *XX* in meno di un minuto ſecondo è riem-

piuto; perciò senz' altro si può asserire che tosto che l' acqua è arrivata alla linea *XX* il sifone *DDCCC* voterà il vase *AA*.

Se la curvatura del sifone *DDCC* invece di essere incassata nella grossezza del coperchio *TT* toccasse soltanto il piano inferiore del coperchio *TT* o fosse da quello distante di una qualche linea, accaderebbe che nelle minute pioggie l' acqua che cade nel vase *AA* giunta alla sommità del sifone *DDCC* a poco a poco strisciando lungo le pareti intime del sifone fluirebbe in goccie continue dal braccio più lungo *CC*, e continuando a piovigginare il vase *AA* mai non si voterebbe, ed allora soltanto si voterebbe quando la pioggia fosse abbondante, poichè l' acqua in un tal caso s' inalza tosto al disopra della sommità della curvatura del sifone *DDCC*, e forma al disopra di essa una sensibile colonna d' acqua bastevole a forzare il sifone *DDCC* a vuotare il vase *AA*.

L' acqua che scarica il sifone *DDCC* cade nell' imbuto *K*, e col suo peso tira all' ingiù ed abbassa l' asta *LL*. Il guancialetto *L* attaccato all' estremità dell' asta orizzontale *XX* al momento che si abbassa l' asta *LL* ermeticamente chiude il foro *V*, e non permette quindi che la pioggia che cade durante il flusso del sifone *DDCC* entri nel vase *AA*, e l' obbliga a raccogliersi nel vase superiore *OO*. Oltre il guancialetto *L* coll' abbassamento dell' asta *LL* si abbassa anche la matita *K* attaccata all' altra estremità dell' asta orizzontale *XX*, e sta appoggiata sulla zona *BB* della tavola circolare *AA* fino a tanto che l' imbuto *K* sia ripieno d' acqua.

Cessato il flusso del sifone *DDCC* il vase conico *K* è tosto votato dal sifone *OO*, e la molla spirale *SS* non aggravata dal peso dell' acqua contenuta nel vase conico *K* eleva alla primiera altezza l' asta quadrangolare *LL*, e seco la matita *K* ed il turacciolo *L*. L' acqua piovuta nel tempo che il foro *V* è stato chiuso dal

turacciolo *L*, e che ſi è raccolta nel vaſe *OO*, toſto che il turacciolo *L* s' inalza, e ſchiude il foro *V*, entra ſubito nel vaſe Iometrico *AA* ed ivi s' inalza: continuando la pioggia l' acqua ſi eleva nel vaſe *AA*, e finalmente di bel nuovo giugne alla linea punteggiata *XX*; allora il ſifone *DDCC* novamente vota il vaſe *AA*. L' acqua che ſcarica il ſifone *DDCC* cade nel vaſe conico *K*, abbaſſa l'aſta *LL*, e di bel nuovo il turacciolo *L* chiude il foro *V*, e la matita *K* ſi appoggia ſulla tavola circolare *AA*. Queſto giuoco ogni volta ſi ripete che il vaſe *AA* ſi vuota, e ad ogni votamento la matita *K* appoggia ſulla tavola circolare *AA* e la ſegna laſciando un ſenſibile punto bianco ſulla zona nera *BB*. Perciò ogni punto bianco che ſi troverà ſegnato ſulla zona *BB* indicherà un votamento del vaſe *AA*, talchè ſe per cagion di eſempio il vaſe *AA* ſi è votato 10 volte nell' ora 21, nello ſpazio della zona *BB* corriſpondente ad una tal ora ſi troveranno ſegnati dieci viſibili punti bianchi.

Nell' Iometrograſo che io ho fatto coſtruire per le mie oſſervazioni Metereologiche la capacità del vaſe *AA* è preciſamente eguale ad $\frac{1}{7}$ di linea d' acqua che piova nel vaſto imbuto *AA*, onde ſe nell' ora 21 ſi trovano ſegnati dieci punti, queſti eſprimeranno 10 terzi di linea oſſia tre linee ed un terzo d' acqua piovuta in una tal ora nell' imbuto *AA*. Potrebbe baſtare il portare la preciſione dell' oſſervazione della quantità dell' acqua piovuta ad un terzo di linea, pure adattando a fianco del vaſe *AA* una ſcala *NN* che divida tutta l'altezza del vaſe *AA* in 100 parti eguali, ſi potrà avere la quantità dell' acqua dentro la preciſione di $\frac{1}{300}$ di linea, ciò che è più del biſogno.

Egli è chiaro altresì che quaſi nulla è l'evaporazione dell' acqua che ſi miſura, poichè a miſura che l'ac-

qua piove essa è misurata da questa macchina, e quella che rimane nel vase *AA* non può svaporare stante che l' acqua contenuta nel vase *AA* non comunica coll' aria esterna se non per l' angustia del foro *V* e dello sfiatatore *SS*; ed è chiaro altresì che la misura della quantità della pioggia che cade di ora in ora deve riuscir esattissima, poichè qualora il sifone *DDCC* abbia le dimensioni sovraindicate immancabilmente arrivata che sia l' acqua alla linea punteggiata *XX* voterà il vase *AA*.

Dissi, purchè il sifone *DDCC* abbia le dimensioni sovraindicate, poichè se invece di fare la gamba più corta *DD* di un diametro di 4 linee si facesse di sole due linee e mezzo, molte volte accaderebbe che il vase Iometrico *AA* si voterebbe prima che l' acqua giunga alla linea *XX*. Poichè essendo il tubo *DD* di un tal diametro, dopo che il sifone *DDCC* ha votato il vase *AA* qualche porzione d' acqua resta tuttavia sospesa nel tubo *DD*; perciò sopravvenendo nuova acqua nel vase *AA*, questa colonnetta d' acqua sospesa nel tubo *DD* a poco a poco s' inalza alla curvatura del sifone *DDCC*, e vi perviene prima che l' acqua giunga alla linea punteggiata *XX*; conseguentemente il vase *AA* si voterà ora ad un' altezza ed ora ad un' altra dell' acqua in esso contenuta secondo che maggiore o minore sarà la lunghezza della colonnetta d' acqua sospesa nel tubo *DD*. Un tale inconveniente si evita facendo il braccio più corto *DD* del sifone *DDCC* di un diametro di 4 linee, poichè in un tal tubo l'acqua non può starvi sospesa per essere la gravità di una comunque picciola colonnetta d' acqua maggiore dell' attrazione del vetro coll' acqua.

L' asta *I* a cui è attaccato il turacciolo *L* appartiene ad una molla spirale acciocchè chiuda esattamente il foro *V* al momento che è cominciato il flusso del sifone *DDCC* senza impedire che la matita *K* appoggi sulla

zona *BB* della tavola circolare *AA* anche nel caſo che la ſuddetta matita ſi puntaſſe, poichè il peſo dell' acqua che cade nell' imbuto *AA* ſupera di gran lunga la reſiſtenza della molla ſpirale contenuta nel tubo *I*; ed abbaſſa l' aſta quadrangolare *LL* fino a tanto che il turacciolo *L* chiuda ermeticamente il foro *V*, e che la matita *K* appoggi ſulla zona *BB*.

Ho fatto adattare ſul piano ſuperiore del coperchio *TT* una valvola d' ottone coperta di una pelle. Una molla d' ottone tiene ſollevata queſta valvola dal piano *TT* acciocchè l' acqua poſſa liberamente entrare pel foro *V* nel vaſe *AA*. Ma al momento che il vaſe *AA* è votato dal ſifone *DDCC* la ſuddetta valvola viene abbaſſata dal turacciolo *L*, che appoggiando ſulla valvola la comprime contro il piano ſuperiore del coperchio *TT*. Ceſſato il fluſſo del ſifone, il turacciolo *L* s' inalza coll' aſta quadrangolare *LL*, e la molla attaccata alla valvola inalza la valvola ed apre il foro *V* del coperchio *TT*.

L' artificio di queſta valvola è forſe migliore dell' altro che poc' anzi ho deſcritto, poichè ſe il guancialetto *L* (*fig.* 3 *tav.* 2) non è ben fatto, non ſempre abbaſſandoſi ed appoggiando ſul foro *V* ermeticamente lo chiude; laddove la valvola per eſſere piana, e coperta di una pelle immancabilmente abbaſſandoſi ſul piano del coperto *TT* toglie ogni comunicazione fra il vaſe *AA* ed il pezzo ſuperiore di tubo *OO*.

Una tavola ſimile a quella che ſerve per regiſtrare i riſultati del Croniograſo egualmente ſerve pel regiſtro di quelli che dà l' Iometrograſo, poichè ogni punto che la matita *K* ſcrive ſulla zona annerita *BB* rappreſentando un terzo di linea di acqua che è piovuto nell' imbuto *AA* (*fig.* 9. *tav.* 2), ſi potrebbe per ogni punto che ſi trova ſegnato in ciaſcun' ora ſcrivere ſulla tavola nella caſella corriſpondente a ciaſcun' ora un terzo di linea. Ma ſiccome molte volte accade che per

esempio il vaſe Iometrico *AA* (*fig.* 2 *tav.* 1) non ſi vuota in tre o quattro ore ſe non una ſola volta, e che la pioggia nella prima di queſte ore non durò che per ſoli 15 minuti, nella ſeconda per ſoli 10′, e nella terza 20′, perciò in un tal caſo io ſoglio riſguardare la pioggia come ſe foſſe ſtata uniforme in tutto il tempo in cui è piovuto, e riparto il terzo di linea di pioggia caduta nei tempi ſuddetti proporzionatamente ai numeri ſovraindicati 15, 10, e 20. Dividendo quindi il terzo di linea in 100 parti per li primi 15′, ſi ſcriverà nella caſella il n°. 34 cioè $\frac{30}{100}$ di un terzo di una linea, per li 10′ ſi ſcriverà $\frac{22}{100}$, e per li 20′ $\frac{44}{100}$.

La tavola della quantità della pioggia caduta nel meſe di Agoſto renderà più chiaro gli uſi della medeſima, e la di lei inſpezione dimoſtrerà meglio come ſi poſſa facilmente con eſſa determinare la quantità dell' acqua che cade di giorno in giorno, di ora in ora ecc. quali ſieno ſtate le ore in cui ſia caduta una maggiore copia d' acqua, ſe maggiore ſia la quantità dell' acqua che piove di notte che di giorno ecc.

RICERCHE

AGOSTO

Quantità della pioggia

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	*Somma dei trecentesimi in ciascun giorno*
1																									
2																									
3					300	400	60	100	40							135									1035
4			60	100																					160
5		300	135																						435
6																									
7																									185
8																									
9																									
10																									
11																									
12																									
13																								150	150
14	300	600	150	60																					1110
15																			1800	2700	1200	100			5800
16	9200	630																							9830
17																									
18																									
19														50	60	30	50		20			50			210
20																			1100	600	100				1800
21																									
22																									1005
23																									
24																									
25																									
26																									
27																									
28																									
29																									
30																									
31																									
Somma dei trecentesimi in ciascun O.	9500	1540	345	160	300	400	60	100	40					50	60	165	50		1120	2400	1300	150	100	150	7875

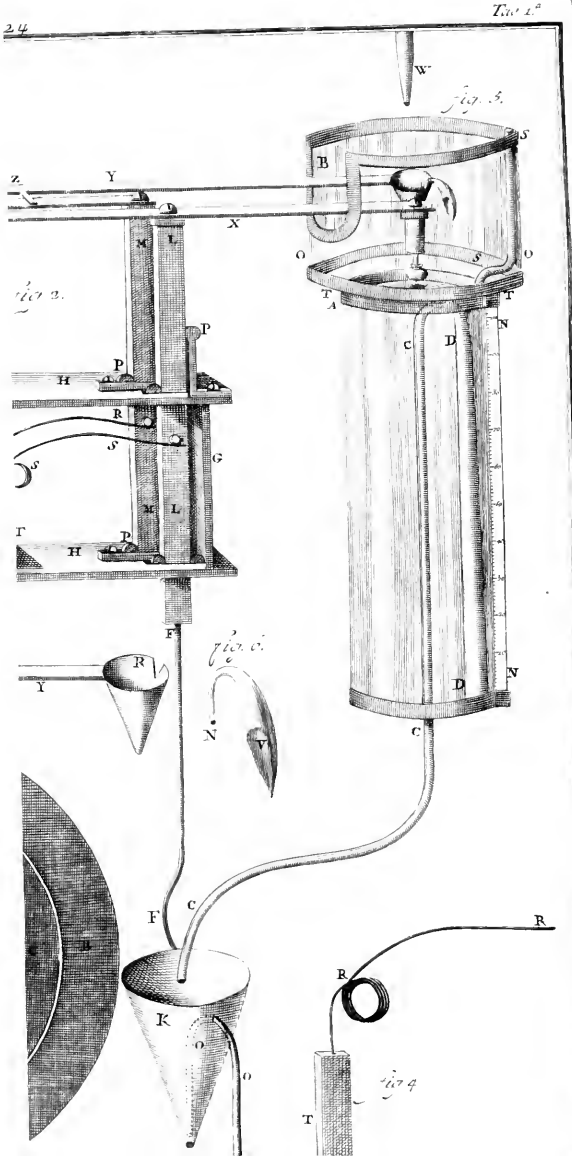
12805 215 7875

AGOSTO

Durata della pioggia 1781.

Mem. Vol. I. p. 5 Vedi a Tomo I. pag. 224

Agosto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Somma di ciascun giorno.	
1																										
2																										
3					10	25	10	15	5							5									75	
4			5	2																					70	
5		25	10																						75	
6																				5					5	225
7																										
8																										
9																										
10																										
11																										
12																										
13																								15	15	
14	60	60	20	10																					150	
15																				30	60	60	15		175	
16	60	55																							115	610
17																										
18																										
19														60	60	15	10		5			5			155	
20																			45	60	5				110	
21			5	60	60	40	25	15		60	60	60	20	25											470	580
22																										
23																										
24																										
25																										
26																										
27																										
28																										
29																										
30																										
31																										
Somma di ciascun giorno.	120	140	105	110	75	65	35	70	5	60	60	60	20	85	60	20	10		50	105	65	65	15	15	1415	
Ore	720						470								325											


W
fig. 5.
S
B
Z
Y
X
O
O
T
T
A
fig. 2.
M
L
P
P
H
R
S
S
G
M
L
P
H
F
C
D
N
C
D
N
fig. 6.
R
Y
N
V
C
F
R
R
K
O
O
fig 4
T

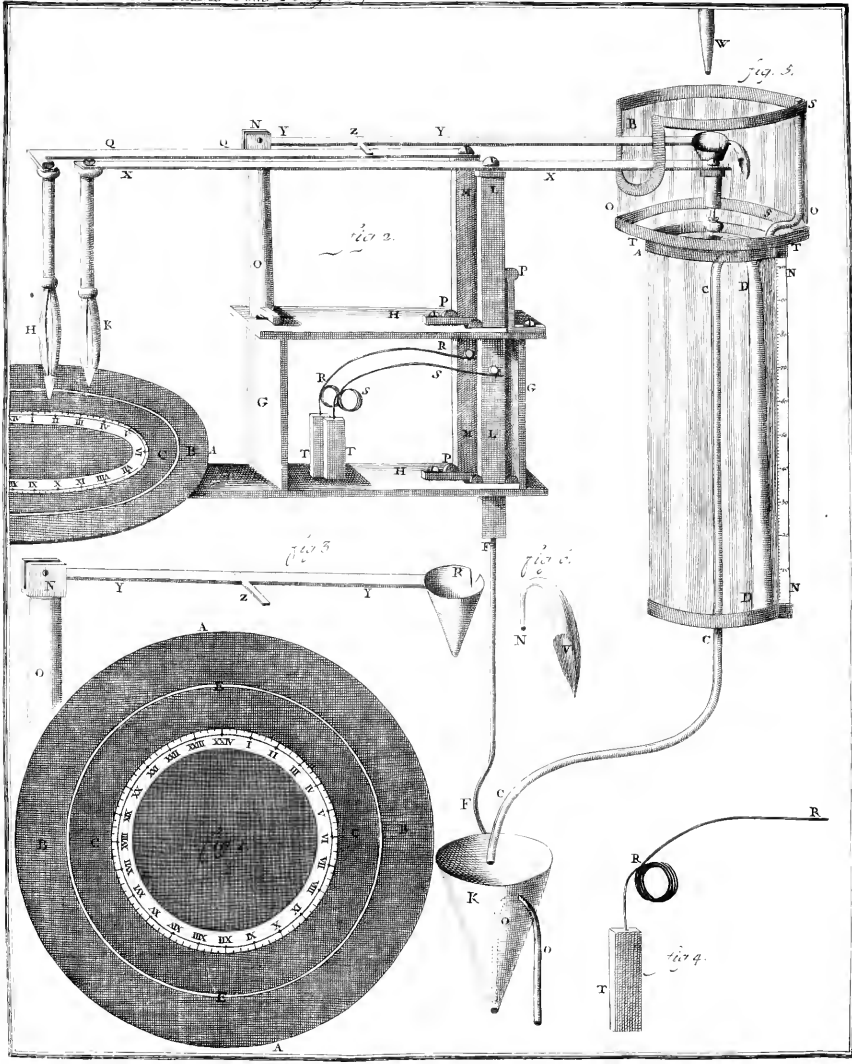


fig. 3.
fig. 2.
fig. 1.
fig. 4.
fig. 5.
fig. 6.
W
N
Y
z
Q
X
B
S
O
T
A
C
D
P
H
K
R
s
G
L
M
F
E
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
XIII
XIV
XV
XVI
XVII
XVIII
XIX
XX
XXI
XXII
XXIII
XXIV

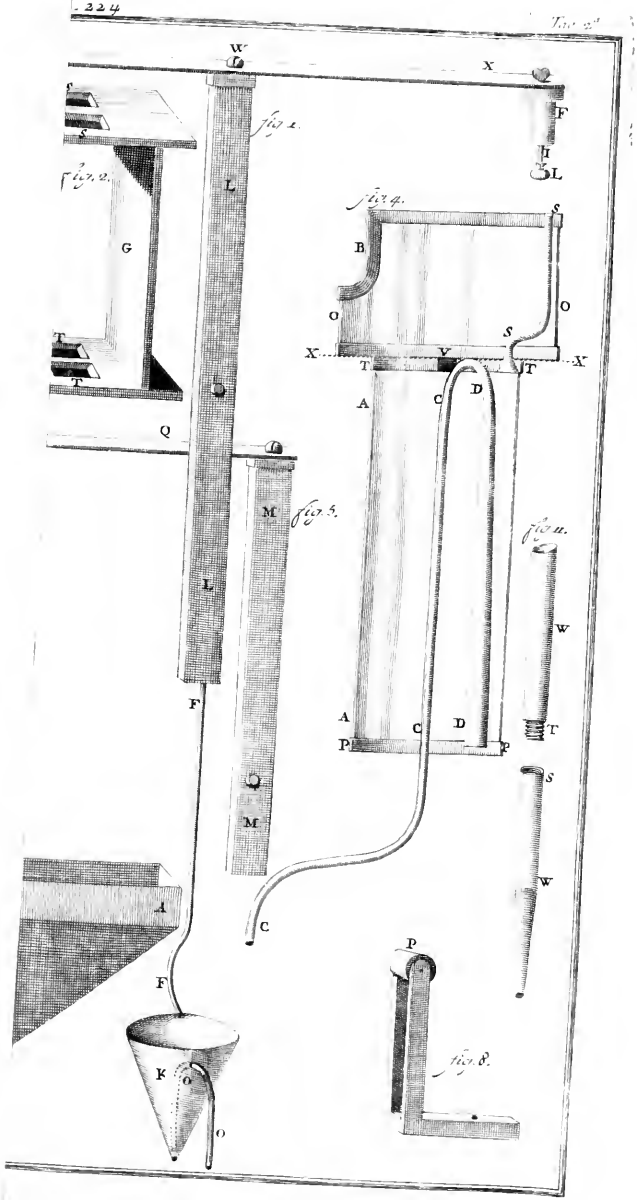
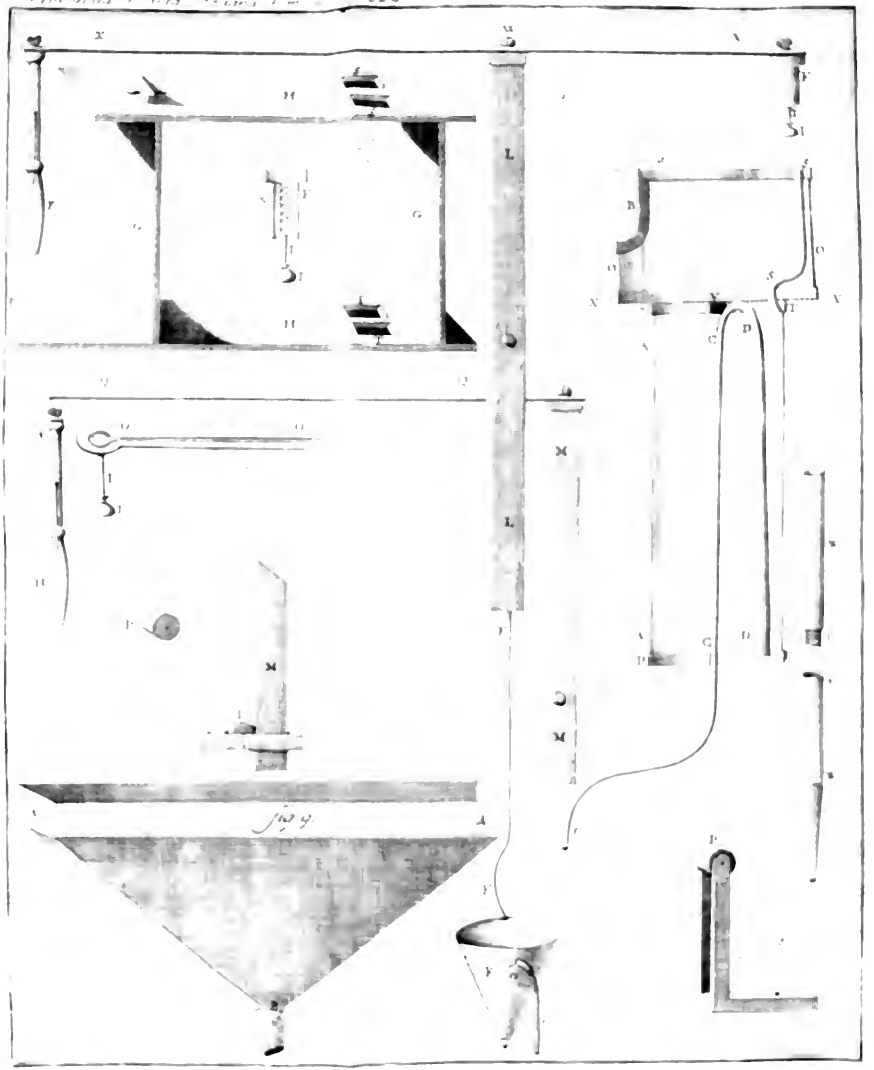


fig. 1.
fig. 2.
fig. 3.
fig. 4.
fig. 5.
fig. 6.
fig. 7.
fig. 8.
W
X
F
H
L
G
S
T
Q
M
B
O
Y
A
C
D
P
K



RICERCHE
ED
OSSERVAZIONI SOCIALI

Fatte per perfezionare il Barometro.

Del Sig. PIETRO MOSCATI Regio Profeſſore,

e Sig. Cavaliere MARSILIO LANDRIANI.

NOnoſtante le immenſe, e laborioſe ricerche del celebre Signor de *Luc*, per determinare le cagioni, per le quali i barometri nello ſteſſo luogo non ſi tengono ad una eguale altezza, e per trovare i mezzi per conſeguire dei barometri, che aveſſero la qualità di tenerſi ad una altezza eguale; pure quando ſi è voluto accuratamente eſtimare la riſpettiva altezza dei barometri fabbricati in diverſi paeſi, febben fatti con tutte le cautele, ed avvertenze preſcritte dal Sig. de *Luc*, ſi è trovato, che il più delle volte queſti differivano fra di loro ſenſibilmente, e che queſta loro differenza non ſolo non era ſempre coſtantemente la medeſima; ma perfino quel barometro, che per alcuni meſi ſi era tenuto coſtantemente più alto dell'altro, dipoi ſi teneva coſtantemente più baſſo, ſiccome fu oſſervato dall'illuſtre, ed eccellente Fiſico il Cav. *Shuckburgh* (*). Per-

(*) Vedi Mem. del Cav. *Shuckburgh*, *Sperienze ed oſſervazioni fatte in Savoja ecc.* inſerita nelle Tranſazioni Filoſofiche vol. 65.

ciò chiunque ha voluto far uso di questi istromenti per esperienze delicate ha dovuto sempre prima d'intraprendere le osservazioni determinare, e tener conto delle rispettive differenze nelle altezze dei barometri adoperati; ed il celebre Sig. *Magellan* (*) per evitare l'incomodo di questa deduzione ha consigliato di situare il nonio del barometro, che si tiene più basso, al medesimo grado marcato dall'altro barometro; e quando si trattò di sperienze di confronto fatte in paesi lontani si è sempre dovuto partire dalla gratuita supposizione, che i barometri adoperati avessero a tenersi ad un'altezza eguale, qualora fossero portati nello stesso luogo. Alcuni altri ancora hanno osservato, che il barometro appena posto in esperienza non indica subito il vero e preciso peso dell'aria; ma che per avere la vera e giusta altezza conviene aspettare ed osservare il barometro, secondo alcuni un quarto d'ora, e secondo che vogliono altri una buona mezz'ora, consigliando di più a dare delle picciole scosse ed urti al barometro per obbligare il mercurio a staccarsi dalle pareti del tubo, che lo attraggono.

Molte altre anomalie ancora si sono osservate in questo genere di sperienze, per le quali taluno scoraggiatosi ha amato meglio di rigettare questo istromento come inefficace per l'oggetto, a cui volevasi farlo servire, la misura cioè delle altezze, che d'indagare da quali cagioni mai derivar potessero queste differenze, e quali fossero i mezzi più opportuni per rimediarvi.

Noi non crediamo di essere pienamente riusciti, meno poi di aver esaurito questa materia; ma ci lusinghiamo che ora, che tanti illustri Fisici del primo ordine si sono occupati, e si occupano sì utilmente di

(*) Dissertation sur les Barometres nouveaux. pag. 105.

ſperienze barometriche, e che non ſolo ſi penſa a far ſervire queſto utile iſtromento alla miſura delle grandi ma anche delle picciole altezze, che le ſperienze, che noi abbiamo fatte, non abbiano ad eſſere riguardate come ſterili e vane ricerche; ma che eſſe poſſano ſicuramente contribuire alla perfezione ed al miglioramento di un così utile iſtromento; eſſendo i riſultati della maggior parte di queſte noſtre ſperienze del tutto nuovi, ed oſiamo dire, di una non mediocre importanza.

Prima d'indicare i diverſi articoli di ricerca, dei quali il Sig. Profeſſor *Moſcati* ed io ci ſiamo occupati, è neceſſario di premettere la deſcrizione dell'apparato da noi uſato per queſte ſperienze, e che noi chiamiamo *Barometro di prova*, appunto per aver con eſſo eſaminato d'onde procedere poteſſero le anomalie oſſervate nelle ſperienze barometriche.

Fig. 1 *KK* è una tavola di legno ſcottata, ed eſſiccata al forno, quindi ancora molto calda unta d'olio, che nuovamente ſi fa aſciugare nel forno, affine di renderla immobile anche ad un ſorte calore della ſtufa. Eſſa è lunga pollici 46, larga 5, e groſſa circa 10 linee, ed ha due feſſure oſſia fineſtre bislunghe *SS*, *OO*, ambedue larghe circa 8 linee; ma la *SS* ha circa 17 pollici di lunghezza, mentre l'inferiore *OO* non ne ha che circa quindici. Sopra queſta tavola ſta per mezzo di due collari d'ottone *BB* fermati con viti incaſſata la canna barometrica *ACD*, lunga eſſa pure 46 pollici, e curvata in *C* a forma di ſifone.

La parte rivoltata di queſto tubo è circa di 4 pollici; due pollici formano la curvatura, gli altri due pollici s'inalzano paralleli al tubo più lungo *AC*, ed entrano per circa un mezzo pollice nella coda di un pozzetto di criſtallo *E*, la di cui capacità, e lunghezza ſono arbitrarie. L'eſtremità di queſto tubo rivoltato pene-

ra circa ad un terzo della cavità sferica del pozzetto *E*, il quale ha lateralmente un tubulo, in cui è con mastice adattato un bocchino di ferro, che si chiude colla vite *F* pure di ferro. L'apertura superiore di questo pozzetto (come si vede dalla figura 2, nella quale è disegnato separatamente il pozzetto *E*) è svasata, anzi termina in un vero imbuto, perchè venendo per qualche accidente a smoversi la canna *PP*, che si adatta nel collo di questo imbuto, il mercurio in essa contenuto non abbia a spandersi per terra. Altronde siccome in questo imbuto si sono frequentemente cangiate le canne *PP* nelle sperienze, che faremo per riferire, queste si possono con molta facilità adattare con cera, e la figura d'imbuto è molto opportuna a questo effetto. L'estremità superiore della canna *ACD* riposa in un incavo fatto nella tavola coperto di una doppia pelle; la parte curvata *CD* della suddetta canna non meno, che il pozzetto *E*, e tutta la canna al disotto dell'apertura *SS*, sono incassate per la metà della loro grossezza nella tavola *KK*, e sono con opportuno cemento su quella assicurate.

A fianco della canna *ACD* ad una certa distanza è fissata la scala d'ottone *NN*, sotto alla quale evvi un rocchetto, che s'incastra in una sega dentata, mediante la quale si può con somma facilità inalzare, od abbassare una lunga riga d'ottone *TT*, che scorre sulla lastra piana d'ottone *NN*, su cui sono le divisioni in pollici linee ecc., e che è attaccata con viti alla sottoposta sega dentata. Il lembo di questa riga scorrevole d'ottone *TT* per quella parte, che guarda le divisioni fatte sulla scala d'ottone *NN*, è fatta a smusso, e sullo smusso sono incise le divisioni di due nonj.

Questa riga d'ottone *TT*, che si move colla sega dentata, è lunga circa 30 pollici, perchè avendo alle due sue estremità attaccati due anelli *H*, *L*, per mezzo di due solide code d'ottone si può coll'anello in-

feriore *L* ſcorrere tutta la canna *PP*, e coll' anello ſuperiore *H* percorrere la canna barometrica *ACD* da *S* in *S*. La figura 6 rappreſenta in grande l'anello *H* che attaccato per mezzo della coda *M* alla riga *TT* ſcorre ſulla canna *AC*, e la figura 5 eſprime l'altro anello più grande *L* fiſſato all'eſtremità della riga *TT*.

Il lembo tagliente di ciaſcuno di queſti anelli deve eſſer tale, che preciſamente corriſponda allo zero della diviſione dei due nonj fatti ſullo ſmuſſo della riga *TT*; di più è neceſſario, che queſti anelli ſieno più larghi della canna ſu cui ſcorrono, maſſime l'inferiore *L*, il quale ha circa 8 in 9 linee di diametro, acciocchè poſſa ſcorrere ſopra canne di 4 e più linee di diametro adattabili nell'imbuto del pozzetto *E* in vece della canna *PP*.

Per muover poi la ſega dentata ſottopoſta alla ſcala *NN* l'albero del rocchetto, che incontra i denti della ſega, penetra la groſſezza della ſcala *NN*, ed è formontato da un bottone incatramato d'ottone *R*, mediante il quale con tutta facilità ſi fanno muovere il rocchetto, e la ſega ſottopoſti.

Qualora vogliaſi mettere in eſperienza queſto apparato conviene ſoſpenderlo in una poſizione verticale; e ſituarlo in modo, che la luce ſia al di dietro della tavola. Ciò fatto ſe ſi voglia per cagion d'eſempio determinare di quanto ſi accreſca l'altezza barometrica coll'ingrandimento del vuoto, ſi ſitua l'anello inferiore *L* in modo che lo zero della diviſione del ſuo nonio eſattamente corriſponda al principio della diviſione della ſcala *NN*; indi ſi verſa nella canna *PP* tanto mercurio, quanto baſta perchè il colmo della colonna mercuriale rada preciſamente il lembo tagliente dell'anello *L* (*), facendo allora girare il bottone *R*, ſi fa

(*) Nella figura 7 è rappreſentato il contatto del lembo dell'anello L colla ſommità della curva mercuriale.

inalzare l'anello *H* fino a tanto che egli pure tocchi col ſuo lembo tagliente l'apice della curva ſuperiore della colonna mercuriale inalzata nella canna *ACD*, e ſi nota ſopra una carta la diſtanza che evvi fra l'apice della curva, dirò così, mercuriale del tubo *PP* e quella del tubo *ACD*. Ciò determinato ſi ſitua l'anello *H* inferiore in modo, che lo zero del ſuo nonio coincida col primo pollice della ſcala *NN*. In un tal caſo per diminuire il vuoto nella canna *ACD* di un pollice, conviene verſare nella canna *PP* del mercurio fino che l'apice della curva mercuriale tocchi il lembo dell'anello *L*, indi s'inalza l'anello *H*, e ſi miſura come nella prima ſperienza la diſtanza fra l'apice della curva inferiore e quello della curva ſuperiore: la differenza, che ſi troverà fra la diſtanza avuta nella prima ſperienza, quando ſopra la colonna mercuriale vi erano 16 pollici di vuoto, e quella che ſi è trovata nella ſeconda ſperienza, in cui non vi erano che ſoli 15 pollici di vuoto, ſarà intieramente dovuta al pollice di meno di vuoto, che era ſopra la colonna mercuriale, purchè la canna *ACD* e la canna *PP* ſieno di un diametro uniforme; poichè ſe il loro diametro nelle lunghezze *SS*, *PP* non foſſe uniforme, ſi potrebbe attribuire la maggiore o minore altezza oſſervata alla differenza de' diametri.

Simili avvertenze ſi debbono avere quando ſi fanno delle ſperienze ſulle differenze de' diametri, delle canne della diverſa attrazione, delle differenti ſpecie di vetro e ſimili.

Qualora poi ſi vogliano aver delle canne, che abbiano un diametro eguale, oppure ſi voglia eſplorare, ſe una canna ſia, o no perfettamente cilindrica, rigettati tutti gli altri metodi propoſti ne' diverſi Trattati ſopra i barometri, come inſufficienti ed ineſatti, noi crediamo che il migliore di tutti, ed inſieme il più facile ſia quello che noi abbiamo ſeguito.

La tavola deſcritta *KK* non è tutta di una eguale

larghezza in tutta la sua lunghezza, poichè verso la metà della sua altezza vicino alla scala *NN* è tagliato un pezzo della medesima della larghezza circa di $\frac{1}{4}$ di pollice, come si vede nella figura 1. Alle due estremità di questo taglio sono fissati orizzontalmente due grossi anelli d'ottone (*), nella grossezza di ciascuno dei quali vi sono tre lunghe viti XXX, che servono a comprimere, ed a trattenere fortemente qualunque canna WW, che venga inserita fra gli anelli suddetti. Situata in questo modo immobilmente, e verticalmente negli anelli, e colle viti la canna WW, si versa in essa un poco di mercurio, e coll'anello *V* si determina l'elevazione della curva della picciola colonna di mercurio versata nel tubo WW; indi per avere delle quantità precisamente eguali in misura di mercurio si prende il tubo a chiave *AB* di cristallo (vedi *fig. 3*), il quale è simile agli altri solo che in vece di avere tutta la chiave *C* penetrata da un foro cilindrico, il foro di questa chiave non penetra che a soli due terzi della grossezza della chiave. Questo foro conico continua anche nel pezzo quadro, in cui gira la chiave, anzi si va notabilmente allargando, formando una specie d'imbuto. La figura 5 rappresenta lo spaccato di questo tubo a chiave con entro la chiave *C*. *AB* è il pezzo quadro; *CC* la chiave del tubo; *V* il foro conico a forma d'imbuto; ed *I* la continuazione dello stesso foro nella chiave *CC*. *S* poi è un foro cilindrico, che penetra tutta la grossezza del pezzo quadro *AB*. Voltata pertanto la chiave *C* in modo, che il foro *I* della medesima formi un solo foro col foro *V* del pezzo quadro *AB*, si riempie di mercurio tutta la cavità conica *VI*, e facendo girare la chiave *C* si taglia, e si separa dal rimanente il mercurio contenuto nel fo-

(*) Si vede uno di questi anelli disegnato più in grande nella fig. 8.

ro *I* della chiave *C*, e si continua a volgere la chiave fino a tanto che si arriva a fare comunicare il foro *I* della chiave col foro cilindrico *S* del pezzo quadro.

Ora la quantità del mercurio contenuto nella chiave, e tagliato in questo modo, sarà sempre una quantità costante in misura, la quale, se versata in una canna cilindrica W, deve formare in qualunque stato della medesima canna un'altezza costante; ma se la canna W si va allargando all'in su, la seconda misura di mercurio in essa versata occuperà un minore spazio di quello occupato dalla prima misura; tutto il contrario succederà, se la canna W in vece di allargarsi si ristringa; l'anello *V*, che scorre sulla canna W per mezzo della sega, e del rocchetto *R*, poichè è attaccato solidamente con viti alla riga d'ottone *TT*, misurerà la lunghezza, che acquistano le successive misure eguali di mercurio versate nella canna W, di cui vogliasi misurare il calibro.

Siccome noi abbiamo con questo mezzo misurate molte canne, che con qualunque altro conosciuto metodo si sarebbero giudicate perfettamente cilindriche, ed abbiamo trovato, che pochissime resistono a questa prova; e se vene sono che sieno tali, non lo sono che per lo spazio di pochi pollici; perciò quando le differenze nel diametro nelle diverse parti delle canne non sono grandissime, nè eccedono $\frac{1}{12}$ di linea, noi sogliamo risguardarle come buone, poichè facendo una tavola esatta di queste differenze, quando si voglia servirsi di una di queste canne per un barometro, o per qualunque altro istromento, che esigga una canna, che sia perfettamente cilindrica, tenendo conto, e computando le differenze notate nella tavola, si arriva ad aver dei risultati di una eguale precisione a quelli, che si sarebbero avuti adoperando una canna perfettamente cilindrica.

Noi

Noi abbiamo distinti i diversi articoli di ricerca, de' quali ci siamo occupati, in differenti paragrafi; perchè qualora si avesse voluto dare un trattato completo delle cagioni, che contribuir possano a fare che i barometri non si tengano ad un'altezza eguale posti nel medesimo luogo, saremmo stati costretti a riportare, e ripetere tutto ciò, che è stato detto, e pubblicato dagli altri; onde per amore della brevità abbiamo creduto che fosse miglior partito quello di dividere gli articoli delle nostre sperienze in varj distinti paragrafi.

§. I.

Del mercurio, che si deve adoperare pei barometri.

Ognuno sa, che difficilmente si può avere del mercurio, che sia totalmente sgombro di materie straniere, che ne alterano la di lui purezza, e conseguentemente la di lui specifica gravità. La maggior parte de' mercurj, che sono in commercio, contengono del bismut, qualche volta del piombo, e dello stagno. Quello delle miniere d'Idria, sciolto nell'acido nitroso, diviene leggiermente lattiginoso, versando nella soluzione dell'acqua distillata, appunto perchè il bismut si stacca dall'acido, e si precipita sotto forma di magistero. Ciò nonostante questo è un mercurio di ottima qualità.

Colla sublimazione, e colla distillazione difficilmente si può togliere al mercurio il metallo straniero in quello disciolto.

La calce nera qualche volta interspersa di un pulviscolo giallo, che si forma agitando lungamente il mercurio, oppure triturandolo, non è gia prodotta, come alcuni pensano, dai metalli misti col mercurio, che nella triturazione ed agitazione si staccano; ma questo

pulviſcolo è una ſpecie di precipitato perflogiſticato, oſſia una calce mercuriale combinataſi coll' acido dell' atmoſfera flogiſticato. Di fatto queſta calce è fornita anche dai mercurj, che non contengono punto alcun metallo ſtraniero.

Il filtrarlo per un cono ſottiliſſimo di carta, o per una pelle, può in alcuni caſi giovar a ſeparare porzione dei metalli miſti col mercurio, quando queſti ſieno in notabile quantità; ma non mai ſi arriverà con queſto mezzo a depurarlo interamente.

Alcuni pretendono, che ſiccome lo ſpirito di nitro ha una maggiore affinità col biſmut, che col mercurio, ſi poſſa collo ſpirito di nitro ſeparare tutto il biſmut contenuto nel mercurio. Ma chiunque conoſce l' arte degli aſſaggi, facilmente con noi converrà, che ſebbene una porzione del biſmut ſia con queſto mezzo ſeparabile, ve ne rimane tuttavia ſempre una notabile porzione inattaccata dall' acido nitroſo.

Siccome per le ſperienze barometriche è neceſſario di conoſcere la gravità ſpecifica del fluido, che ſi adopera per miſurare il peſo dell' aria, ed altronde per evitare qualunque incomoda computazione eſſendo molto opportuno il trovar un proceſſo, con cui avere un mercurio di una coſtante gravità ſpecifica, ci ſiamo anche di ciò occupati eſaminando con accurate ſperienze la diverſa gravità ſpecifica dei mercurj, ed indagando il proceſſo, che dia coſtantemente un mercurio di una data gravità ſpecifica.

Un cubo, o cilindro d' oro puriſſimo inverniciato di vernice di gomma copal per impedire, che il mercurio non lo attacchi, ſucceſſivamente peſato nei diverſi mercurj potrebbe dare la differenza delle gravità ſpecifiche dei diverſi mercurj tra la bilancia idroſtatica, non può mai indicare le menome differenze nelle gravità ſpecifiche de' corpi. Buffon nei *Supplementi all' Introduzione alla ſtoria naturale de' minerali* ha fat-

to offervare, che la bilancia idroſtatica non può indicare ſe non quelle differenze nelle gravità ſpecifiche de' corpi, che ſono maggiori della viſcoſità, ed adeſione delle molecole del fluido, in cui vengono peſati i corpi. Ma a ciò ſolo non ſi riſtringe l'imperfezione della bilancia idroſtatica, perchè il corpo peſato nel fluido, oltre all'adeſione delle parti dello ſteſſo fluido che egli deve ſuperare, vincer deve anche il grado d'attrazione, che lo ſteſſo fluido ha col corpo in eſſo peſato. Per eſempio ſi ſupponga per un momento, che i tre metalli l'oro, il rame, ed il cobalto abbiano un'eguale gravità ſpecifica; dico, che la bilancia idroſtatica indicherebbe, che queſti tre metalli abbiano una diverſa gravità ſpecifica, quando nella noſtra ipoteſi è in tutti loro eguale, poichè l'oro, ſecondo le belle ſperienze del Sig. *Morveau* (*), eſſendo attratto dal mercurio con una forza eguale a 446, il rame con una forza eguale a 142, ed il cobalto con una forza eguale a 8; il cubo, o cilindro d'oro immerſo nel mercurio, e ſoſpeſo alla bilancia ſi moverà in quel fluido metallico con maggior difficoltà del rame, ed il rame ſarà ſmoſſo più difficilmente del cobalto nella ſuddetta proporzione di 446, 142, 8; onde per rendere alla bilancia il perduto equilibrio è neceſſario di metter nella coppa tanto di peſo, che non ſolo equivalga all'eccesſo della gravità ſpecifica dell'oro ſopra quella del mercurio, ma anche che ſia equivalente alla quantità dell'attrazione del mercurio coll'oro. E minor eſſendo queſta attrazione del mercurio col rame, e col cobalto, minor peſo ſarà neceſſario di contrapporre nella bilancia per rimettere l'equilibrio (**).

(*) Elements de Chymie de Dyon. Vol. I.

(**) L'eſame delle imperfezioni della bilancia idroſtatica eſſendo eſtraneo all'oggetto di queſta Memoria farà più opportunamente trattato nelle *Lezioni di Fiſica* che ſarò per pubblicare.

Perlochè noi ci ſiamo appigliati ad altri mezzi più opportuni; e primieramente, ſiccome la gravità ſpecifica de' corpi in parità di volume è come i loro peſi; abbiamo peſato con una bilancia ſenſibile dei volumi eguali di mercurio, ed abbiamo effettivamente trovato, che il mercurio revivificato dal ſublimato corroſivo, e dal cinabro ſono più peſanti di tutti gli altri mercurj venali, e che anche la gravità ſpecifica di queſti mercurj venali è fra loro molto diverſa.

Il mezzo impiegato per avere delle quantità in volume eguali di mercurio è ſtato un tubo a chiave di criſtallo *AB* (*fig.* 4) che ha una chiave *C*, la quale in vece di eſſere traforata da un foro, che penetri tutta la di lei groſſezza ha un ampio foro *I*, che non penetra, che a $\frac{2}{3}$ circa; ſi riempie dunque di mercurio tutta queſta cavità, ed il foro ſvaſato *V* del pezzo quadro del tubo a chiave *AB*; indi col volgere la chiave *C* ſi ſepara la quantità del mercurio contenuto nel foro *I* della chiave *C*, la quale ſarà ſempre una quantità eguale in volume di mercurio. Si peſino dunque ſei, o ſette di queſti volumi eguali di una data ſpecie di mercurio con una bilancia ſenſibiliſſima, e ſi prenda la media de' loro peſi; queſta media ſarà il peſo ſpecifico di quella ſpecie di mercurio.

Si può anche preſcindere dall' uſo di queſto tubo a chiave *AB* per avere delle quantità eguali in volume di mercurio.

Si prenda un tubo termometrico *AA* (*fig.* 11), che abbia ad una delle eſtremità ſoffiata una boccia *B*, e ſi riempia tutto di mercurio, come ſi aveſſe a fare un termometro; ciò fatto col calore ſi faccia montar il mercurio fino all' apertura del tubo, e ſi adatti al tubo un cono di carta *DD* ripieno di mercurio di modo che venendo il mercurio a raffreddarſi nella boccia il tubo abbia ad eſſere perfettamente pieno di mercurio. Di fatto quando il mercurio nella boccia è ridotto ad

una certa temperatura, bisogna immergerlo nel ghiaccio, e colà tenerlo immerso fino a tanto che abbia acquistato la temperatura del ghiaccio: allora si toglie il cono di carta *DD*, e per mezzo del fuoco si vuota il termometro *M* di tutto il mercurio, che egli contiene, il quale deve risguardarsi come una costante quantità. Ma questo metodo è troppo operoso, ed incomodo, ed esigge dell'abilità e destrezza nel caricare di mercurio questo termometro.

L'apparato, col quale abbiamo determinati gli altri elementi della costruzione del barometro, ci ha servito anche a determinare la gravità specifica dei diversi mercurj colla massima precisione, e facilità.

Situato il barometro di prova in una posizione verticale, e versato nella canna inferiore *PP* tanto mercurio fino che arrivi precisamente al decimoquarto pollice, si cerca, e si determina la precisa altezza del mercurio nell'altro braccio più lungo *ACD* del barometro. Ciò fatto si estrae, aprendo la vite *F* del pozzetto *E* (vedi la figura 2 in cui è rappresentata più distintamente questa vite *F*) dal braccio corto tanto mercurio, quanto basti per fare, che la superficie inferiore della colonna mercuriale segni il secondo pollice; indi si rimettano in questa canna in luogo dei dodici pollici di mercurio estratti altri dodici pollici di mercurio revivificato dal sublimato corrosivo, o dal cinabro, di modo che questo mercurio segni il pollice decimoquarto precisamente. Se il mercurio revivificato dal cinabro, o dal sublimato corrosivo è più pesante del mercurio della miniera d'Idria, i dodici pollici di questo mercurio versati nella canna inferiore *PP* dovranno contrabilanciare una colonna di mercurio d'Idria di una lunghezza maggiore di dodici pollici, conseguentemente il mercurio nel tubo lungo barometrico *ACD* dovrà tenersi più elevato, quando vi sono nel tubo corto *PP* dodici pollici di mercurio revivificato, di

quando in vece di queſti dodici pollici vi ſono dodici pollici di mercurio della miniera d'Idria.

Tale è il metodo, che noi abbiamo ad ogni altro preferito in queſta ricerca, e che ci ha dimoſtrato, che le diverſe ſpecie di mercurio, che ſono in commercio, hanno una diverſa gravità ſpecifica; e che non ſempre quello, che è revivificato dal cinabro, ha una gravità coſtante, perchè nei cinabri comuni evvi molte volte del piombo in iſtato di minio, che ſi revivifica, ed il mercurio reſuſcitato dal cinabro ha un certo untume, e forma una certa pellicola, che difficilmente gli ſi può torre.

Il mercurio revivificato dal ſublimato corroſivo per mezzo della calce è quello, che noi abbiamo trovato avere una gravità ſpecifica più coſtante d'ogni altro mercurio, e perciò deve eſſere ad ogni altra ſpecie di mercurio preferito per caricare barometri, termometri, di modo che qualora i barometri ſieno caricati con queſta ſpecie di mercurio non è neceſſario di tener conto della gravità ſpecifica del mercurio, potendoſi aſſumere per eguale ſenza alcun pericolo di sbagliare. Anzi noi conſigliamo chiunque voglia intraprendere delle oſſervazioni barometriche di una certa preciſione ad adoperare dei barometri caricati di mercurio revivificato dal ſublimato corroſivo, perchè oltre all'eſſer queſto mercurio di una gravità ſpecifica coſtante è molto più fluido, ed è meno attratto dal vetro di qualunque altra ſpecie di mercurio, che noi abbiamo ſperimentato. Di fatto il colmo delle colonne di un tal mercurio è qualche poco più elevato, e conveſſo di quando queſte colonne ſono di un qualunque altro mercurio, appunto perchè eſſendo più fluido, vale a dire eſſendo meno fra loro aderenti le molecole, che lo compongono, le parti centrali della colonna mercuriale riſentono meno l'attrazione delle pareti del tubo di vetro, e quella delle molecole di mercurio, che ſono a quelle più vicine.

§. II.

Della qualità del vetro più opportuno pel barometro.

Il Sig. de *Luc* (*) alla pag. 161 delle *Ricerche ſulle modificazioni dell' atmosfera* riflettendo alla perfezione, a cui ſono ſtati portati i cannocchiali acromatici, dopo che ſi è penſato alla ſcelta della qualità del vetro, crede, che qualora ſi penſaſſe a trovar qualche ſpecie di vetro omogeneo, ſi potrebbe forſe ottenere che le colonne di mercurio chiuſe in queſto vetro non obbediſſero, che al ſolo peſo dell' aria, ed al calore, oppure che la loro reſiſtenza aveſſe ad eſſere coſtantemente la medeſima. Effettivamente deve l' attrazione del vetro col mercurio eſſer differente ſecondo la quantità, qualità, e miſtura delle ſoſtanze delle quali egli è formato (**). Sarebbero perciò intereſſanti ſperienze quelle, che determinaſſero il grado d' attrazione dei diverſi vetri col mercurio, ed a queſto oggetto opportuniſſimo ſarebbe l' apparato del Signor *Morveau*, con cui ha dimoſtrato l' attrazione del vetro col mercurio. Ma per dimoſtrare, che queſta attrazione del mercurio colle diverſe ſpecie di vetro influiſce ſulle altezze barometriche, s' adattino nel pozzetto del barometro di prova varie canne di una medeſima groſſezza, lunghezza, e diametro, ma di vetro

(*) Recher. ſur les Modif. de l' Athmoſphere Vol. 2.

(**) Il Sig. *Balti* ſupponendo, che la depreſſione del mercurio ne' tubi capillari dipenda dalla ripulſione, crede che queſta forza ripulſiva ſia differente nei diverſi vetri; ed avendo immerſo nel mercurio 4 tubi capillari aventi eguale diametro, e lunghezza, trovò che il mercurio ſtava inegualmente in eſſi depreſſo. Queſti quattro tubi erano di vetro di Bologna, di Venezia, di Firenze, e di Roma. Collect. Accad. Vol. X. partie etrang. pag. 785.

diverso, e si osservi a quale altezza nel tubo lungo si tenga elevato il mercurio.

Le sperienze, che noi abbiamo fatto si limitano a tre sole specie di vetro, al vetro che si fabbrica a Venezia ad imitazione del Flint d' Inghilterra, al Flint Inglese, ed al cristallo di Boemia.

Adattato il tubo di Flint Veneto, che aveva 6 pollici di larghezza, e 2 $\frac{1}{2}$ linee di diametro, il mercurio si tenne a pollici 29. lin. 6. 0039.

In un tubo di Flint Inglese l' altezza fu di 29 pollici linee 6. 0049.

In un tubo di cristallo di Boemia il mercurio si tenne a 29 pollici lin. 6. 0045.

Dunque la qualità del vetro influisce sull' altezza del barometro.

§. III.

Degli effetti dell' ineguaglianza de' diametri de' tubi barometrici nell' altezza della colonna mercuriale.

La prima osservazione, che noi abbiamo intorno a questo argomento, è quella del Sig. Avvocato *la Plantade* riferita dal Sig. *Cassini* nelle *Memorie dell' Accademia Reale delle scienze* per l' anno 1773. Poichè il suddetto Avvocato ha osservato, che il mercurio ne' barometri di diametri fra loro disuguali si tiene ad una altezza ineguale. Più precisa fu l' osservazione, che fecero in seguito i Signori *Cassini*, e *Monnier* (*), i quali avendo portato sul Canigou due barometri di un diametro disuguale, osservarono, che il mercurio si teneva più basso di circa $\frac{2}{7}$ di linea nel barometro più stretto;

(*) Meridienne verifiée p. 224.

ſtretto; oſſervazione, che fu pur fatta da molti altri, e ſegnatamente nel 1750 dal Sig. le *Cat* (*) ed *Hollmann* (**), il primo de' quali parimenti ha trovato, che il mercurio ſi tiene altrettanto più baſſo ne' barometri, quanto queſti ſono di un diametro più riſtretto. Ma ſiccome alcuni credevano, che un tal fenomeno procedeſſe dalla maggiore quantità d' aria contenuta ne' tubi di un diametro anguſto; poichè ſi fa, che è più difficile il purgar bene d' aria i tubi barometrici, quando ſono di una certa anguſtia, ed il Sig. *Hollmann* pare che non attribuiſca alla grandezza del diametro l' oſſervato fenomeno; l' ingegnoſo Sig. Dott. *Cigna* (***) fece unire aſſieme due tubi di diſugual diametro in modo, che formavano una porta romana, e riempiuti queſti due tubi di mercurio li capovolſe nel mercurio, ed oſſervò, che coſtantemente il mercurio ſi teneva di $\frac{1}{4}$ o di $\frac{1}{7}$ di linea più baſſo nel tubo riſtretto, che nell' altro, che aveva un maggior diametro; poichè in queſto caſo la quantità dell' aria contenuta nella parte vota non poteva aver alcuna parte nel fenomeno, eſſendo lo ſteſſo vuoto comune ad ambedue i tubi barometrici.

Ma il Sig. de *Luc* è andato anche più oltre in queſta ricerca, avendo trovato

1. Che i barometri, che ſono fatti a ſifone ſi tengono ſempre più alti di quelli fatti a recipiente.

2. Che i barometri fatti di un ſemplice ſifone, la di cui parte ſuperiore ſia più riſtretta dell' inferiore, ſi tengono ſempre più baſſi di quelli, che hanno una figura contraria.

(*) Magaſin Francois pour l' année 1750.

(**) Philoſophical Tranſ. an. 1742. Act. Acad. Gotting. Vol. 3. de mercurii in barometris diverſis eodem tempore & eodem loco diverſa altitudine.

(***) Acta Accademiæ Taur. Vol. 1.

3. Che i barometri, alla ſommità de' quali havvi una boccia, ſi tengono ad una maggiore altezza, quando la parte ſuperiore della colonna mercuriale giunge nella cavità della boccia, e queſto effetto tanto più ſenſibilmente ſi manifeſta, quanto più il mercurio è inoltrato nella boccia, di modo che allora ſi tiene di due linee più alto di quando il barometro ha una boccia abbaſſo.

4. Che i barometri, che hanno un tubo di un diametro uniforme, ſi tengono ad un' altezza preſſo a poco eguale.

5. Che l' ineguaglianza nelle altezze barometriche ſcompariſce ne' barometri a recipiente, quando tutto il recipiente ſia riempiuto di mercurio, e che il mercurio arrivi nel tubo ſuperiore al recipiente.

Perciò il Sig. de *Luc* ha preſcritto, come una condizione neceſſaria per la coſtruzione dei barometri di adoperare dei tubi di un dato diametro, e di rigettare aſſolutamente la coſtruzione di quei barometri che foſſero fatti a recipiente.

Ma ſiccome non oſtante, che il Sig. *Cardinale* de Luines (*) abbia con eſperienſe dimoſtrato, che la differenza nelle altezze barometriche è ſenſibile anche ne' tubi di un diametro maggiore di tre linee; alcuni però vi ſono, che appoggiati alle ſperienze di *Hollmann* (**) dalle quali riſulta che la differenza nelle altezze barometriche è ſoltanto ſenſibile ne' tubi di un diametro minore di tre linee, e che queſta differenza non è ſenſibile ne' tubi di un diametro maggiore, credono eglino, che nelle ſperienze del Sig. *Cardinale* il mercurio ſi ſia tenuto più alto anche nel tubo di un diametro di tredici linee, perchè foſſe meglio purgato d'aria degli al-

(*) Mem. de l'Accademie Royal des Sciences 1768.

(**) Acta Accademiæ Gotting. pag. 227. Vol. 1.

tri tubi di un minor diametro, o anche perchè, ſuppoſto che in tutti i Barometri del Sig. *Cardinal* de Luines (*) foſſe eguale la quantità dell' aria contenuta nel vuoto barometrico, minore doveva eſſere la compreſſione dell' aria contenuta nel tubo grande di quella, che era nel tubo di un minor diametro, mentre, eſſendo in un maggiore ſpazio doveva eſſere più rarefatta. Volendo cavillare ſulle ſperienze del Sig. *Cardinal* ſi potrebbe anche opporgli, che la maggiore quantità del vuoto nel Barometro di 13 linee di diametro poteva contribuire beniſſimo a tener ſollevato il mercurio ad una maggiore altezza di quella, a cui ſi teneva ne' tubi di un minor diametro.

Perciò noi abbiamo creduto, che foſſe per eſſere coſa utile, ed importante per l' ottima coſtruzione de' barometri il determinare con ben fatte ſperienze, ſe veramente l' altezza del barometro diveniva maggiore coll' aumento del diametro, anche oltre all' aſſegnato limite delle linee tre.

Le prime ſperienze, che noi abbiamo fatto per decidere pienamente queſto articolo di controverſia, ſono ſtate fatte con due tubi dello ſteſſo vetro, uno de' quali aveva tre linee di diametro, e l' altro ſei in ſette

(*) I riſultati delle ſperienze del Sig. *Cardinal* de Luines ſono

1. Che i barometri caricati con mercurio bollente ſi tengono più elevati de' barometri caricati a freddo.

2. I barometri bolliti ſono quelli, che ſono più regolari.

3. Un barometro caricato a mercurio bollente, che abbia due terzi di linea è egualmente efatto, che un barometro, che abbia linee $\frac{1}{2}$ o linee $\frac{2}{7}$, ovvero 2. $\frac{1}{2}$. linee di diametro.

4. Il movimento del mercurio nei tubi capillari è regolare.

5. I barometri caricati di mercurio bollente non oſtante, che i tubi ſieno ſtati lavati con iſpirito di vino ſi tengono egualmente alti che i non lavati.

6. Ne' tubi di un grandiſſimo diametro, come di 13 linee parigine, il mercurio ſi tiene più alto, che ne' tubi di un diametro ordinario di 2 $\frac{1}{2}$ linee.

Mem. de l' Accademie Royale des Sciences année 1768. pag. 247.

linee, che noi abbiamo fatto unire affieme, e curvare a forma di porta romana, e che avendo riempiuti di mercurio gli abbiamo capovolti in un comune recipiente ripieno di mercurio. Il risultato di questa sperienza, che abbiamo fatto con altri tubi di un diametro minore di 3 linee, e maggiore di 6, è stato, che è vera l' osservazione fatta dal Sig. *Cardinal* de Luines, che l' altezza nella colonna del mercurio sospesa ne' tubi vuoti d' aria è sensibilmente maggiore ne' tubi di 6 linee di diametro di quella de' tubi di 3 linee. Di più noi abbiamo osservato in queste sperienze, che la curva della superficie del mercurio ne' tubi di un diametro maggiore, è sensibilmente più convessa di quella sospesa ne' tubi di un diametro minore, la quale è qualche volta quasi appena sensibile ne' tubi di un diametro minore di 2 linee.

L' errore del Sig. *Hollmann*, e degli altri che hanno creduto, che al di là di 3 linee non avesse luogo il fenomeno della maggiore altezza, procede forse dall' avere eglino estimata la lunghezza della colonna mercuriale, non dalla convessità, ossia dall' apice della colonna mercuriale, ma bensì dai lembi, l' altezza de' quali alle volte è uguale ne' tubi di disuguale diametro, non ostante che diversa sia l' elevazione della curva ossia dell' apice della curva della colona mercuriale.

Ma ciò, che dimostra pienamente l' azione, e gli effetti dell' ineguaglianza dei diametri nell' altezza del barometro sono le sperienze, che noi abbiamo fatte col nostro barometro di prova, poichè i risultati delle sperienze fatte con esso non sono soggette ad alcuna eccezione.

Nel pozzetto di questo nostro barometro sono state da noi successivamente adattate cinque canne tutte di un' egual lunghezza, e dello stesso vetro, i diametri delle quali erano linee $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, ed avendo fatto in maniera, che in queste diverse canne il

mercurio si teneſſe coſtante ad una data altezza abbiamo oſſervato che nel tubo lungo la colonna si allungava, o si accorciava in ragione della differenza de' diametri ne' tubi inferiori.

Quando si adoperò il tubo, che aveva un diametro di $2\frac{1}{2}$ linee franceſi, il mercurio si tenne coſtantemente a pollici 29 lin. 6.020.

Col tubo di 3 linee di diametro l' altezza fu pollici 29, lin. 6.010.

Nel tubo di $3\frac{1}{2}$ linee franceſi l' altezza fu pollici 29, lin. 6.002.

Nel tubo di 4 linee l' altezza è ſtata pollici 29, lin. 6. . . .

Nel tubo di $4\frac{1}{2}$. linee il mercurio si tenne a 29, pollici, linee 5.070.

Da queſta ſperienza si raccoglie, che l' effetto dell' ineguaglianza del diametro ne' tubi barometrici ha luogo al di là del preteſo limite di tre linee franceſi, e che qualora si vogliano fare dei barometri di paragone è neceſſario di tener conto del diametro delle canne che si adoperano. Inoltre ſiccome l' altezza varia col diametro del tubo barometrico, perciò conviene che la canna barometrica non ſolo ne' barometri a ſifone, ma anche ne' barometri Torricelliani ſia di un diametro uniforme in tutto lo ſpazio di variazione.

§. IV.

Se la quantità della ſuperficie libera del vetro al diſopra della colonna mercuriale influiſca ſull' altezza del Barometro.

Quantunque i fenomeni dei tubi capillari, e le loro leggi non ſieno traſportabili ai tubi di un maggior diametro; pure per non laſciare alcuno ſcrupolo abbiamo voluto eſperimentare, ſe la quantità della ſuperficie li-

bera del vetro al disopra della colonna mercuriale influisca sull' altezza del mercurio ne' tubi di un diametro non capillare. Poichè siccome i fluidi ne' tubi capillari dello stesso diametro si tengono elevati ad un' altezza tanto maggiore, quanto è maggiore la lunghezza del tubo al disopra del livello del fluido, in cui sono immersi; così pure si poteva dubitare, che la maggiore elevazione del mercurio osservata crescere coll' aumento del vuoto barometrico procedesse dalla maggiore lunghezza, e quantità del vetro al disopra della collonna mercuriale.

Inoltre se questa maggiore altezza avesse luogo appunto per questa cagione converrebbe, che ne' barometri a sifone, come è quello del Sig. de *Luc*, si tenesse conto della lunghezza del tubo, che sta al disopra della superficie del mercurio contenuto nel tubo inferiore più corto qualora si trattasse di avere dei barometri di paragone. Posto ciò era dunque necessario di osservare l' altezza barometrica in un tubo a sifone, il di cui braccio inferiore avesse un costante diametro, ma una lungghezza variabile a piacimento,

Anche in queste sperienze abbiamo trovato opportunissimo il nostro barometro di prova, poichè avendo fatte adattare tre canne tutte dello stesso vetro, e diametro di disuguale lunghezza, abbiamo successivamente osservato l' altezza della colonna mercuriale in un tempo, che il peso dell' aria era invariabile, avendo la costante avvertenza in queste sperienze di mettere sempre ad un' altezza eguale la colonna mercuriale nel braccio corto, ed osservando, e determinando sempre l' altezza della colonna mercuriale nel braccio lungo col solito anello, e meccanismo di *Ramsdem*.

Il risultato di tre osservazioni fatte in diversi tempi cogli stessi tubi è stato il seguente, senza la menoma variazione.

Con un tubo di Flint Veneto lungo sei pollici, e

di un diametro di lin. 2, e mezzo franceſi il mercurio coſtantemente ſi tenne a pollici 29, linee 6.0045.

Con un tubo dello ſteſſo vetro, e diametro, ma che aveva 9 $\frac{1}{2}$ pollici franceſi di ſuperficie libera al di ſopra del mercurio, l'altezza della colonna mercuriale fu pollici 29, linee 7.....

Finalmente con un tubo del ſuddetto vetro, e diametro, e che aveva 27 pollici di ſuperficie libera il mercurio ſi tenne a pollici 29, linee 7004.

Non baſtandoci queſte ſperienze, poichè ci pareva molto importante il determinare queſto articolo con eſperienze deciſive, abbiamo voluto oſſervare l'altezza barometrica adattando nel pozzetto del noſtro barometro di prova un tubo lungo 6 in 7 pollici franceſi, indi per mezzo di cera abbiamo aggiunto a queſto tubo un' altro pezzo di canna dello ſteſſo vetro in modo, che la ſuperficie libera del vetro al di ſopra del mercurio era in queſta ſeconda ſperienza triplice di quella, che era nella prima ſperienza, ed abbiamo di fatti oſſervato, che l'altezza barometrica variava colla lunghezza della ſuperficie libera del vetro al di ſopra del mercurio.

Diverſe conſeguenze ſi poſſono dedurre da queſte ſperienze.

I. La quantità dell'attrazione del vetro col mercurio creſcendo in ragione della quantità della ſuperficie libera del vetro, il mercurio ſi deve tener più alto in quel tubo, che ha una maggiore lunghezza.

II. Creſcendo l'altezza del mercurio nel barometro coll'aumento della ſuperficie libera del vetro al diſopra del mercurio, converrà ne' barometri Torricelliani tener conto di queſto elemento di variazione, quando ſi tratti di miſurar delle grandi altezze, perchè coll'ingrandimento del vuoto creſce l'azione della ſuperficie libera del vetro.

III. Ne' barometri a ſifone, nei quali a miſura che

cresce nel tubo lungo la superficie libera del vetro; d' altrettanto scema questa superficie libera nel tubo corto, non sarà necessaria questa deduzione, perchè i vantaggi di una parte sono compensati dalle perdite dell' altra parte.

IV. Finalmente nelle nostre sperienze intorno all'influenza del moto sull' altezza barometrica non ha luogo questo elemento di variazione appunto per essere il nostro barometro di prova fatto a sifone.

Ciò che però è d' avvertirsi in quelle sperienze, si è, che l' equazione che si può dedurre dalle nostre sperienze per l' influenza del vuoto, sarebbe soltanto applicabile ai barometri a sifone; poichè nei barometri semplici, e Torricelliani questa equazione deve essere maggiore appunto per l' azione non compensata dalla superficie libera del vetro.

Noi spieghiamo questi fenomeni tanto dei tubi di diverso diametro, come quelli dei tubi di diverse lunghezze, e qualità di vetro subordinandoli al fenomeno generale dell' attrazione del vetro col mercurio; attrazione, che è provata, e dimostrabile da mille sperienze, poichè non solo una lastra piana di cristallo posta in contatto del mercurio aderisce con un notabile grado di forza, ma quando il contatto del vetro col mercurio è più perfetto l' attrazione è sensibilmente maggiore. Prova di ciò eloquente ci forniscono gli stessi barometri, nei quali, qualora per mezzo del fuoco sieno stati ben purgati d' aria, molte volte nel raddrizzarli il mercurio sta attaccato alla sommità del tubo, e la colonna mercuriale vi sta sospesa a 40, ed anche più pollici, talchè per farla discendere, e distaccare è necessario di scuotere vivamente il tubo barometrico, ed anche nello staccarsi di questa colonna mercuriale si osserva, che questa già non si stacca dal tubo alla sommità; ma bensì si spezza al disotto di quella di 4 in 5 pollici, e questa porzione di colonna mercuriale sta

tuttavia

tuttavia aderente alla ſommità della canna barometrica.

Ma che giova cercare degli eſempj ſe gli ſteſſi tubi capillari, co' quali taluno ha preteſo di dimoſtrare eſſervi una vera ripulſione fra il vetro ed il mercurio, ci forniſcono la prova più convincente?

L'eſperienza vien riferita da *Muſſchembroek* (*). Prendaſi un tubo di vetro, che abbia l'eſtremità inferiore capillariſſima, e ſi verſi in queſto tubo una certa porzione di mercurio, e ſi oſſerverà, che da queſta capillare apertura il mercurio non fluirà, e ſoltanto fluirà, quando la colonna di mercurio verſata nel tubo ſuperi l'attrazione del vetro col mercurio (**). Poſto dun-

(*) *Muſſchembroek Diſſertationes Phyſic. Math. de Tubis Capill. &c.*

(**) Che il mercurio ne' tubi Capillari ſtia al diſotto del ſuo livello, perchè l'attrazione delle parti, che lo compongono ſia maggiore dell'attrazione del vetro col mercurio è un'ipoteſi, che è reſa molto plauſibile dalle ſperienze de' Signori *Rondelli*, e *Bonzi*. (*Act. Acad. Bon.*) i quali hanno oſſervato, che immergendo tre fili metallici nel mercurio, uno d'oro, d'argento l'altro, e di rame il terzo, in modo che una porzione di queſti fili foſſe immerſa, e l'altra fuori del mercurio; oſſervarono, diſſi, che in capo ad un certo tempo il mercurio ſi elevava al di ſopra del ſuo livello, e penetrava nel filo metallico anche per quella parte, che era fuori del mercurio; di più oſſervarono, che nell'oro il mercurio era più in alto penetrato, che nell'argento, e meno nel rame. Ora ſe ſi rifletta alle belle ſperienze del Sig. *Morveau* (*Elements de Chimie Vol.* 1.) dalle quali riſulta, che il mercurio ha coll'oro un maggior grado d'attrazione, che coll'argento, e più coll'argento, che col rame, facilmente ſi comprenderà la ragione, per cui il mercurio ſi è levato più alto nel filo d'oro, che nel filo d'argento, e più nel filo d'argento, che in quello di rame, di modo che ſe in vece di tubi di vetro, i quali hanno ſempre col mercurio un minor grado d'attrazione di quello, che hanno fra loro le molecole mercuriali, ſi faceſſero le ſperienze con tubi capillari fatti o di oro, o di argento, l'attrazione delle quali ſoſtanze col mercurio è maggiore di quella, che hanno fra loro le molecole mercuriali, il mercurio in queſti tubi capillari metallici non ſi terrebbe al diſotto del ſuo livello, ma ſi ſolleverebbe al di ſopra più, o meno ſecondo la maggiore, o minore affinità del mercurio colla ſoſtanza metallica, di cui è formato il tubo capillare ecc.

que, che il vetro attragga il mercurio s' intende perchè la ſuperficie della colonna mercuriale nei barometri ſia ſempre o conveſſa, o concava, e non mai piana; conveſſa quando il barometro s' inalza, oppure quando il mercurio è verſato in una canna inferiormente chiuſa; concava quando il barometro diſcende, perchè le parti della colonna mercuriale contenuta nel tubo, che ſono più vicine alle pareti attraenti della canna, riſentono aſſai più l' attrazione delle medeſime, che quelle, che ſono più lontane, perciò reſiſtono ad eſſere ſmoſſe con una forza proporzionata al grado d'attrazione, che paſſa fra il vetro ed il mercurio. A miſura che ſi va ſcoſtandoſi dalle pareti del tubo barometrico, l'attrazione divien minore, e perciò le parti della colonna mercuriale a miſura che ſono più vicine all' aſſe della colonna, che è il ſito più lontano dalla ſuperficie attraente, s' inalzano di più, e quelle che ſono nell' aſſe della colonna ſono quelle che ſi tengono più elevate delle altre; talchè la curva formata dalla ſuperficie della colonna mercuriale eſprime la curva dell' attrazione del vetro a diverſe diſtanze. Di fatto ſi oſſerva, che a miſura che le canne barometriche ſono di un maggior diametro, maggiore è anche in eſſe l' elevazione del mercurio, perchè le parti centrali eſſendo più lontane dalle pareti del tubo appena ſentono la loro attrazione, e non obbediſcono, che al ſolo peſo dell' aria. Che ciò ſia, facile è il farne l' eſperienza.

Si prenda un tubo di vetro, che abbia due pollici di diametro, e chiuſa una delle ſue eſtremità, verſata in eſſo una colonna di mercurio, ſi oſſerverà, che la ſuperficie della ſommità di queſta colonna non è totalmente curva, ma piano-curva, eſſendo la parte centrale di queſta ſommità quaſi piana, appunto perchè queſte parti centrali della colonna eſſendo molto diſcoſte dalle pareti della canna, ſono fuori della ſfe-

ra d'attrazione. Per queſta medeſima ragione ancora il mercurio nei barometri ſi tiene altrettanto più elevato, e la curva, che il mercurio forma, è tanto più conveſſa, quanto più i barometri ſono di un diametro maggiore; poichè le parti centrali di una colonna mercuriale non obbediſcono che al ſolo peſo dell'aria, nè la loro elevazione è impedita o diſturbata dall'attrazione delle pareti del vetro. Così pure il mercurio ſi tiene più alto nel tubo lungo barometrico *ACD* a miſura che è minore il diametro del tubo *PP* adattato nell'imbuto del pozzetto *E*, o maggiore la forza attraente della ſuperficie libera della canna *PP*, ovvero del vetro della medeſima canna *PP*.

Da queſto medeſimo principio d'attrazione del vetro ſi potrebbe facilmente dedurre la ſpiegazione di varj fenomeni riſguardanti il barometro, che noi per brevità tralaſciamo di riferire, invitando ſoltanto i Fiſici, che deſiderano di fare delle buone oſſervazioni barometriche, a preferire il vetro Flint d'Inghilterra a qualunque altra ſpecie di vetro, ed a ſcegliere il tubo barometrico di un diametro, che ſia per lo meno di 3 linee franceſi, perchè dalle oſſervazioni, che abbiamo fatte, le parti di una tale colonna mercuriale, che ſono nell'aſſe della medeſima, riſentono pochiſſimo l'attrazione delle pareti della canna, che le contiene; talchè eſtimando l'altezza della colonna mercuriale dall'apice della curva da quella formata, ſi è quaſi ſicuro di avere il vero e preciſo peſo dell'aria, che comprime il mercurio.

§. V.

Dei tubi barometrici interiormente inverniciati.

Siccome le ſperienze del Sig. *Jurin* (*) hanno dimoſtrato, che la depreſſione del mercurio nei tubi capillari non ha luogo, quando il tubo vitreo ſia coperto da un velo di ſevo, o di cera, poichè in queſti caſi il mercurio anzi che ſtare al diſotto del ſuo livello s'inalza in eſſo ſenſibilmente; ed altronde le ſperienze, che noi abbiamo riferite, apertamente dimoſtrano, che molti fenomeni dei tubi capillari ſono comuni anche ai tubi di un diametro non capillare, abbiamo voluto ſperimentare, ſe il mercurio ne' tubi interiormente inverniciati ſi tenga, o no più elevato, che ne' tubi di un egual diametro non inverniciati.

Per fare l'eſperienza in una maniera deciſiva e convincente abbiamo preſo un tubo di Flint d'Inghilterra lungo circa un piede, di 3 linee di diametro ſenſibilmente per tutta la ſua lunghezza, e l'abbiamo interiormente inverniciato per la lunghezza di circa 6 pollici colla vernice ordinaria di ſpirito di vino (**). Indi lo abbiamo, toſto che fu aſciutto, adattato con cera nel pozzetto *E* per la parte, che non era inverniciata, ed abbiamo verſato in eſſo tanto mercurio, fin-

(*) Phil. Tranſ. n. 333.

(**) Siccome taluno può avere la curioſità di rifare queſta ſperienza, e potrebbe forſe trovarſi imbarazzato nel dare la vernice alla ſola metà della canna, crediamo, che ſia neceſſario d'indicare il mezzo da noi adoperato, ed è d'immergere nella vernice la canna *PP*, per quella parte, che ſi vuole inverniciare. Indi adattando l'altra eſtremità nella bocca aſpirare l'aria in eſſa contenuta, ſino che la colonna di vernice arrivi a quella altezza, che ſi vuole coprire di vernice; ritirando la bocca applicata alla canna, la colonna di vernice cade nel vaſe, e tutta la ſuperficie della canna toccata dalla colonna di vernice reſta benissimo, ed uniformemente inverniciata ecc.

chè questo arrivasse precisamente all'altezza di 4 pollici; indi coll'anello scorrevole *H* abbiamo al solito determinata la lunghezza della colonna mercuriale elevata nel tubo barometrico *ACD*, che fu da noi trovata essere pollici Inglesi 29, lin. 6. 030. Ciò fatto abbiamo rivoltato il nostro tubo, ed adattatolo con cera nel pozzetto *E*, come nella prima sperienza, ma per la parte inverniciata, e versato in questo tubo precisamente 4 pollici di mercurio, abbiamo trovato, che l'elevazione della colonna mercuriale nel tubo *ACD* era di pollici 29 lin. 6. 045, cioè di 015 di linea più alta di quando il mercurio nel tubo *PP* era nella parte non verniciata.

Non si può attribuire questa maggiore elevazione del mercurio, quando fu messa in esperienza la canna *PP* per la parte inverniciata, all'essere questa canna divenuta di un diametro più ristretto pel velo di vernice, che le è stato applicato, poichè si è dimostrato nel paragrafo dell'effetto dell'ineguaglianza dei diametri nei tubi barometrici, che quando invece di una canna *PP* di $3\frac{1}{2}$ linee di diametro si adattò nel pozzetto un'altra canna di un diametro di sole 3 linee, la differenza nell'altezza del mercurio fu solo di 008, mentre nella nostra sperienza, nella quale certamente il sottile strato di vernice non poteva restringere il diametro della canna di mezza linea, l'altezza osservata del mercurio fu solo di, 0. 015.

§. VI.

Dell'azione dell'elettricità sopra il barometro.

Poichè in questa Memoria si tratta delle cagioni che influiscono sull'altezza del mercurio nel barometro indipendentemente dal peso dell'aria e del calore, non si doveva tralasciare di esaminare se l'elettricità faccia

o no variare l'altezza del mercurio nel barometro. Egli è vero che il Sig. *Comus* (*) ed il Sig. *Changeux* (**) hanno fu di ciò pubblicate delle offervazioni e fperienze che fembrano fciogliere queſto problema, poichè eſſe tendono a provare che l'elettricità altera fenſibilmente l'altezza del mercurio nel tubo barometrico fino a farla divenir maggiore di due linee; ma le fperienze di queſti Signori non fono abbaſtanza circoſtanziate per meritarſi tutta quella fede che unicamente ſi accorda a fperienze fatte con tutte le avvertenze poſſibili, poichè è facile trafcurandone alcuna di prendere de' groſſi abbagli. Altronde ſiccome il Signor *Changeux* nella fua Memoria riferiſce che non fempre elettrizzando ha luogo la maggiore elevazione della colonna mercuriale nel tubo barometrico, perciò con qualche fondamento ſi poteva dubitare che l'offervata maggiore altezza non all'elettricità, ma a qualche altra non avvertita circoſtanza ſi doveſſe aſcrivere. Onde non ci parve inutile di conſultare l'oracolo della fperienza.

Elettrizzato un barometro con elettricità vitrea fempre e coſtantemente s' inalza colle ſeguenti circoſtanze; cioè s' inalza fempre aſſai più nella prima volta, che in tutte le altre conſecutive, così che ſe quando ſi comincia l'eſperimento ſi è ottenuto l'aumento di $\frac{40}{100}$ di linea, le altre volte conſecutive non arriva che a $\frac{25}{100}$. Laſciato in quiete il barometro torna a dare elettrizzandolo la prima elevazione più grande. Quando ſi cava la ſcintilla ſi abbaſſa ad un tratto il mercu-

(*) Journal de phyſique.
(**) Journal de phyſique.

rio per quasi tutto lo spazio che si era inalzato ; non si ricompone però all'altezza di prima se non dopo alcuni minuti.

Nell' atto che il barometro è elettrizzato sortono dalla colonna mercuriale delle visibili scintillette state già osservate da altri fisici (*); la colonna mercuriale sensibilmente oscilla, non per tremore, nè scosse del barometro, ma per mero effetto dell'elettricità. Questa oscillazione, e coscintillazione accade anche togliendo l' anello che abbraccia il tubo barometrico, così che ad esso ascrivere non si può un tale fenomeno.

Elettrizzato un barometro con elettricità resinosa, per la prima volta alquanto si alza, ma meno che colla elettricità vitrea; oscilla e dà qualche scintilla : elettrizzato in seguito altre volte consecutive non si muove visibilmente o almeno pochissimo. Toltogli l'elettricità, pare che si rialzi, e che si renda più convesso, e non ritorna alla primitiva elevazione se non dopo circa un quarto d'ora.

Ma con tutto ciò che queste sperienze provino che il fluido elettrico influisce sull'altezza barometrica, pure non si può inferire che esso possa avere alcuna parte nelle variazioni del barometro, direttamente almeno, poichè non mi è mai accaduto di osservare alcuna differenza durante un furioso temporale fra due barometri uno de' quali era isolato : dissi direttamente poichè l'elettricità può benissimo render l' aria più o meno grave, avendo avuto più volte occasione di osservare che nell'atto che scoppia qualche fulmine il mercurio sensibilmente oscilla nel tubo barometrico, probabilmente per essere l'aria scossa ed urtata dal fluido elettrico che in grande copia dalle nubi si lancia alla terra.

(*) Vedi *de Luc* Rech. sur les modif. de l'athm. Vol. I.

§. VII.

Se le oscillazioni della colonna mercuriale nei tubi barometrici contribuiscano ad accrescere l'altezza barometrica.

Nei barometri fatti di un tubo capillare che almeno non ecceda una linea di diametro è sensibilissimo il fenomeno della maggiore altezza a cui in essi si tiene sospesa la colonna mercuriale dopo che o collo smovere la tavola su cui è fissato il tubo barometrico, o con qualunque altro artificio si è obbligata la colonna mercuriale a fare delle oscillazioni in un barometro che aveva il diametro di $\frac{8}{10}$ di linea; il mercurio dopo aver oscillato per il tratto di cinque in sei pollici, si tenne più alto di 3 lin. e $\frac{6}{10}$ e non si ricompose all'equilibrio coll'aria se non dopo passate molte ore.

Ne' barometri di un maggior diametro sebbene un tal fenomeno non sia così sensibile come ne' tubi di un diametro ristretto, pure lo è abbastanza, perchè si abbia ad avere de' riguardi nelle osservazioni e sperienze barometriche.

Il Signor de *Luc* per tacer di molti altri ha consigliato di non osservare l'altezza barometrica se non dopo una buona mezz' ora che sia stato situato immobilmente il barometro, ed ha inoltre prescritto di dare al tubo barometrico de' piccioli urti, acciocchè più presto l'altezza della colonna mercuriale si ricomponga all'equilibrio col peso dell'aria.

L' apparato rappresentato nella figura 10 è ottimo per fare queste sperienze, poichè col comprimere il cilindro *SS* ed obbligarlo ad immergere più o meno nel

mercurio contenuto nel vaſe *AA*, ſi può con tutta la facilità obbligare la colonna mercuriale a fare delle oſcillazioni più o meno grandi a piacimento ſenza correre alcun pericolo che l'aria s' introduca nel tubo barometrico *DD* ad alterarne il vuoto. Le ſperienze ſono ſtate più volte replicate in diverſe circoſtanze di peſo di aria, di umidità, di temperatura, ed altre ſimili.

I riſultati generali delle ſperienze ſono 1. Che quanto più grande è il numero delle oſcillazioni che ha fatto la colonna mercuriale, e quanto più eſſe ſi ſono eſteſe in uno ſpazio ſenſibile, altrettanto maggiore è l'altezza a cui ſi tiene la colonna mercuriale, e maggior tempo v' impiega a diſcendere all' altezza corriſpondente al real peſo dell' aria.

2. Che nei giorni umidi e caldi minore è queſto eccеſſo di altezza nella colonna mercuriale, che nei giorni aſciutti e freddi.

3. Che ne' tubi di un diametro notabile, come di 4 in 5 linee, non ha preſſo che luogo un tal fenomeno, ed all' oppoſto è più ſenſibile ne' tubi a miſura che eſſi ſono più anguſti.

4. Che il mercurio nei tubi di un diametro di tre in quattro linee come ſono i barometri ordinarj dopo 20', o 30' ſi riduce alla vera altezza corriſpondente al peſo dell' aria.

5. Che il dare al tubo barometrico delle picciole ſcoſſe, ſiccome viene conſigliato dal Signor de *Luc*, contribuiſce moltiſſimo a fare che la colonna mercuriale più preſto ſi abbaſſi.

7. Che è un' ottima pratica quella di fare che il mercurio diſcenda lentamente quando ſi mette il barometro in eſperienza, poichè più corte, e minori rieſcono le oſcillazioni della colonna mercuriale, conſeguentemente minore è l' eccеſſo dell' altezza della colonna mercuriale.

§. VIII.

Se la quantità più o meno grande del mercurio contenuto nella cisterna ossia pozzetto del barometro semplice Torricelliano influisca sull' altezza barometrica.

Da che colle sperienze riferite nei paragrafi antecedenti si è scoperto che alcune circostanze apparentemente indifferenti possono contribuire a diminuire, od accrescere l'altezza barometrica, ed altronde qualunque ricerca che riguardi la perfezione del barometro non essendo giammai inutile; si è voluto con esperienze determinare: *se la quantità più o meno grande del mercurio contenuto nel pozzetto del barometro semplice Torricelliano influisca sull' altezza barometrica*; poichè essendo la maggior parte dei barometri migliori fatti a pozzetto come sono quelli di *Ramsdem*, *Magellan*, *Brander* ecc. era necessario di stabilire se la capacità di questi pozzetti poteva essere arbitraria, siccome generalmente si riguarda, oppure se nella costruzione dei barometri paragonati esser doveva costante ed eguale.

A questo effetto si è fatto costruire un barometro in cui la massa del mercurio contenuto nel pozzetto fosse variabile senza che variasse la quantità della superficie del mercurio esposto all' aria. La figura 10 rappresenta questo barometro. *AA* è un vase cilindrico di cristallo il quale è superiormente aperto, ed inferiormente termina in un tubo cilindrico *BB* che s' inalza parallelo al vase *AA*. In questo vase *AA* pesca profondamente il tubo barometrico *DD*, sopra il quale evvi una lunga vite WW che si muove nel collare *X* fissato alla tavola del barometro. Questa vite WW ha alla di 'ei estremità inferiore fissato un lungo cilindro di legno *SS* infilato nel tubo barometrico *DD*, di modo che col muovere la vite WW si può inalzare, od ab-

baſſare a piacimento il cilindro *SS*, e farlo più o meno immergere nel vaſe *AA*.

Ora per fare le ſperienze neceſſarie per determinare ſe la quantità del mercurio contenuto nel vaſe *AA* influiſca ſull' altezza barometrica per mezzo della vite *WW*, s' inalza il cilindro di legno *SS* fino a tanto che appena di una linea circa ſia immerſo nel mercurio contenuto nel vaſe *AA*. Ben s' intende, che a miſura che s' inalza il cilindro *SS* è neceſſario di verſare del mercurio nel vaſe *AA* acciocchè quando il cilindro *SS* è inalzato alla maggiore altezza del mercurio nel vaſe *AA* ſia ad una altezza tale che nel tubo comunicante l' apice *BB* della colonna mercuriale tocchi il tagliente dell' anello *C* fiſſato ſulla canna *BB*. Qualora dunque il mercurio contenuto nel vaſe *AA* ſia a queſta altezza ſi miſura con tutta la preciſione l' elevazione della colonna mercuriale ſoſpeſa nel tubo barometrico *DD*; indi per mezzo della vite *WW* ſi abbaſſa il cilindro *SS* finchè ſia immerſo di tre, di cinque, o più linee nel vaſe *AA*; e ſiccome a miſura che il cilindro *SS* s' immerge nel vaſe *AA* eſſo ſcaccia un volume di mercurio eguale alla parte immerſa del ſuddetto cilindro *SS*, perciò facilmente ſi comprende che ſi può avere nel pozzetto *AA* ora una maggiore, ed ora una minore quantità di mercurio a piacimento, ſenza che perciò varj la quantità della ſuperficie del mercurio eſpoſto all' aria, poichè eſſendo cilindrico il vaſe *AA*, ed *SS* cilindro, l' anello mercuriale compreſo fra le pareti del vaſe *AA* ed il cilindro *SS* è coſtantemente eguale.

La grandezza del vaſe *AA*, e del cilindro *SS* nel barometro che ſi è fatto coſtruire è tale che un abbaſſamento di una linea del cilindro *SS* ſcaccia un volume di cinque oncie di mercurio, e potendoſi abbaſſare il ſuddetto cilindro di 15 linee, ſi può avere un pozzetto che abbia una capacità variabile dalle 5 on-

cie fino alle 65 oncie, ciò che è anche più del bisogno.

Ridotto il cilindro ligneo *SS* ad una tale altezza che esso non era immerso nel mercurio che di una sola linea, e fatto che successivamente immergesse da una linea fino a 15 linee, e presa ad ogni depressione del cilindro *SS* con tutta l' esattezza l' altezza della colonna mercuriale sospesa nel tubo barometrico *DD*, nonostante che la quantità del mercurio contenuto nel vase *AA* variasse dalle cinque oncie fino alle 65, pure non vi fu la menoma differenza. Perciò pare che si possa conchiudere che la quantità del mercurio contenuto nel pozzetto non influisca nè punto, nè poco nell' altezza della colonna mercuriale sospesa nel tubo barometrico, e che è quindi arbitraria la grandezza del pozzetto ne' barometri semplici Torricelliani.

§. IX.

Se la grandezza del vuoto barometrico influisca sull' altezza della colonna mercuriale sospesa nel barometro.

Nella parte superiore del barometro, che comunemente chiamasi il vuoto barometrico, per quanto bene sia purgato di aria il mercurio vi rimane sempre una picciola porzione di aria che è impossibile forse l' espellerla intieramente. Il Sig. de *Luc* disperando di poter rendere gli accurati suoi barometri assolutamente privi di aria si contentò di farli che non ne contenessero che una determinata e costante quantità di cui ne tenne sempre esatto conto nelle sue osservazioni. Altri per render sensibile l' effetto di questa aria contenuta nel vuoto barometrico immaginarono di fare che l' estremità superiore del tubo barometrico terminasse in un' ampia boccia affinchè quel poco d' aria che rimane nel

mercurio di cui questo fluido coll' ebullizione non si può totalmente liberare, dilatandosi in uno spazio notabile abbia a comprimer meno la sotto posta colonna mercuriale (*a*). Di fatto se si facciano caricare due barometri che abbiano eguali dimensioni, che sieno egualmente caricati ecc. e solo che uno di essi in luogo di avere la parte superiore di un diametro eguale al rimanente della canna barometrica abbia invece soffiata una boccia di una sensibile capacità, si osserverà che il mercurio si terrà più elevato nel barometro che ha superiormente la suddetta boccia, che nell' altro la di cui canna da un capo all' altro è perfettamente cilindrica.

Ma un tale fenomeno non è stato bene spiegato coll' attribuirlo soltanto alla maggiore rarefazione dell' aria contenuta nello spazio voto, poichè vi ha qualche parte la maggiore superficie vitrea della boccia. Altronde se la maggiore elevazione della colonna mercuriale osservata nel barometro che ha superiormente una boccia procedesse soltanto dalla rarefazione dell' aria, ne verrebbe che in un barometro, la cui canna fosse cilindrica da un capo all' altro ed in cui la grandezza del vuoto fosse variabile, ne verrebbe, dissi, che gli aumenti nell' altezza della colonna mercuriale sarebbero proporzionali esattamente all' accresciuta grandezza dello spazio vuoto, ciò che non corrisponde alle sperienze che sono per riferire.

Situata la tavola *KK* ossia il barometro di prova in un piano esattamente perpendicolare all' orizzonte, ed adattata nell' imbuto del pozzetto *E* una canna *PP* di un diametro eguale in tutta la sua lunghezza, si

(*a*) Quand' anche con tale artifizio si arrivasse a rendere insensibile l' effetto dell' aria che vi è sempre nel vuoto barometrico si avrebbe un peggiore inconveniente nell' accresciuta fragilità e peso del barometro, che essendo una macchina destinata al trasporto deve essere quanto è possibile solida, e leggera.

versò in essa tanto mercurio, finchè nel tubo barometrico *ACD* non vi fosse che un vuoto di soli due pollici. Ciò fatto per mezzo degli anelli scorrevoli *H*, *L* si determinò colla maggiore precisione possibile la distanza fra i due colmi delle due colonne di mercurio contenute ne' due tubi *AC*, *PP*, e fu trovata essere poll. 29 lin. 6.04; coll' aprire la vite *F* del pozzetto *E* (vedi la *fig.* 2) si estrasse tanto mercurio dalla canna *PP* fino che l' apice della colonna mercuriale in essa contenuta si è abbassato di due pollici esattamente. Corrispondentemente a questo abbassamento della colonna mercuriale contenuta nella canna *PP* lo spazio vuoto nel tubo *AC* crebbe di due pollici, onde fu in tutto di 4 pollici. Misurata la distanza fra i due colmi delle colonne mercuriali contenute nelle canne *AC*, *PP*, fu trovata essere poll. 29 lin. 6.011. Con 6 pollici di vuoto fu poll. 29 lin. 6.018; con 8 pollici di vuoto fu poll. 2 lin. 6.023; con 10 pollici di vuoto fu poll. 29 lin. 6.032; con 12 poll. di vuoto fu poll. 29 lin. 6.034; con 14 poll. di vuoto fu poll. 29 lin. 6.039.

Non contenti di aver determinato in questo modo che la grandezza del vuoto barometrico influisce sull' altezza barometrica si è voluto ripetere la medesima sperienza in un altro modo, cioè in un ordine contrario facendo che la grandezza del vuoto barometrico andasse di due in due pollici diminuendo, ciò che facilmente si ottenne versando del mercurio nella canna *PP* in modo che in essa il mercurio s' inalzi di due in due pollici; poichè con questo ordine retrogrado si va all' incontro di molti scrupoli e dubbj che potrebbero nascere sulla sperienza fatta nel modo sovraccennato.

Sebbene facendo rimontare in questo modo il mercurio nella canna *AC* i risultati delle osservazioni non corrispondono esattamente a quelli che si sono avuti facendo che il mercurio discenda, e che il vuoto ba-

rometrico vada aumentando; pure ſono abbaſtanza conſiſtenti e ſicuri per iſtabilire con certezza, che coll' aumento del vuoto ſi accreſce l' altezza barometrica, ma non proporzionalmente alla rarefazione dell' aria che può eſſer nella parte vuota del barometro.

Non è poi meraviglia ſe i riſultati delle ſperienze ed oſſervazioni fatte obbligando il mercurio a rimontare, non corriſpondano eſattamente a quelli che ſi hanno facendo che il mercurio diſcenda, poichè dalle ſperienze riferite nel paragrafo VII conſta, che facendo fare delle oſcillazioni alla colonna mercuriale ſoſpeſa nel tubo barometrico, l'altezza della colonna varia per l' attrazione eſercitata dalla canna ſulla colonna mercuriale; onde per ottenere una piena corriſpondenza fra le oſſervazioni fatte a mercurio aſcendente e diſcendente ſarebbe ſtato neceſſario di laſciare un intervallo di tempo fra una oſſervazione e l' altra di una buona mezz' ora acciocchè l' effetto dell' attrazione che neceſſariamente inſorge per lo ſfregamento ed oſcillazione della colonna mercuriale aſcendente o diſcendente intieramente ſvaniſſe. Ma non ſi è avuto l' agio di fare queſte oſſervazioni con queſti neceſſarj intervalli di tempo; ciò nonoſtante però le differenze dei riſultati delle oſſervazioni fatte a colonna aſcendente o diſcendente non ſono molto notabili, poichè non arrivano ad eſſere maggiori di 15 centeſimi di linea ingleſe, prendendo la media di 4 ſerie di oſſervazioni fatte nello ſteſſo giorno.

Più notabili differenze ſi oſſervano ripetendo queſte ſperienze in diverſe circoſtanze di temperatura, poichè queſte differenze talvolta arrivano ad eſſere maggiori di 30 centeſimi di linea, ed anche più, e ciò per la ſola ed unica circoſtanza di una diverſa temperatura. Poichè avendo io ripetuta l' eſperienza di far diſcendere di due in due pollici il mercurio nella canna *AC* mentre la temperatura dell' aria della ſtanza in cui

ſperimentava era ſtata eſpreſſamente con una ſtuffa riſcaldata di 30° Reaumuriani, per 14 pollici di vuoto l' aumento dell' altezza barometrica fu ſolo di $\frac{33}{100}$ laddove fatta la medeſima ſperienza in un giorno in cui la temperatura dell' aria era ſoltanto gr. 17 Reaumuriani, l' aumento fu notabilmente maggiore cioè di $\frac{59}{100}$ di linea ed anche più.

Sarebbe inutile il riferire minutamente le ſperienze fatte per aſſicurarſi che la grandezza del vuoto barometrico influiſce moltiſſimo ſull' altezza della colonna mercuriale; e che l' aumento dell' altezza della colonna mercuriale, poſta la ſteſſa quantità di vuoto, varia colla temperatura del mercurio contenuto nel barometro, poichè le ſperienze fatte per queſto oggetto non ſono abbaſtanza numeroſe per poter ricavare una formola che con ſicureza eſprima la quantità dell' influenza del vuoto corriſpondente ad ogni grado di temperatura del mercurio, e ad ogni pollice di vuoto.

Noſtro progetto però era d' intraprendere queſta ſerie d' oſſervazioni onde ricavare una tale cognizione, e certamente l' apparato da noi immaginato poteva fornirci queſti dati: ma ſfortunatamente diſtratti in molte altre occupazioni avendo dovuto in diverſi giorni riprendere queſte ſperienze che eſiggono molta attenzione e diligenza, nel maneggiare frequentemente il barometro di prova, avvenne che qualche bolla d' aria furtivamente entrò nella canna *AC* ad alterare l' eſattezza del vuoto barometrico: nè avendo avuto finora comodo di caricare di nuovo e purgar bene d' aria queſto barometro ſiamo coſtretti a pubblicare queſte *Oſſervazioni*, che avrebbero potuto eſſer più perfette, qualora aveſſimo avuto agio di eſtenderle a tutte quelle combinazioni che eſigge la natura di queſte ricerche.

L' imperfezione

L'imperfezione però di queſte oſſervazioni non eſclude che eſſe non ſieno attendibili per dimoſtrare che l'ampiezza del vuoto barometrico influiſce ſull' altezza della colonna mercuriale, e che una tale influenza non è proporzionale alla dilatazione dell' aria che vi è ſempre nei barometri per quanto bene purgati eglino ſieno, e che eſſa varia ſecondo la temperatura del mercurio contenuto nel barometro. Ora poſta la verità di queſte importanti oſſervazioni, come mai ſi potrà luſingarſi di una certa preciſione, e corriſpondenza nelle oſſervazioni barometriche ſe non ſi è mai tenuto conto dell'ampiezza del vuoto ſovraſtante alla colonna mercuriale? Se mai ſi è dubitato che queſto effetto foſſe maggiore o minore ſecondo la diverſa temperatura del mercurio? eppure frequentemente ſuccede nella miſura delle grandi altezze che un barometro a piedi del monte abbia una temperatura notabilmente diverſa da quella che ha il barometro alla ſommità del monte. Inoltre ſe l'influenza del vuoto varia colla di lui ampiezza, e ſe una tale influenza arriva talora ad eſſere di $\frac{60}{100}$ in $\frac{70}{100}$ di linea, chi non vede la neceſſità di tener eſatto conto di queſta influenza nelle miſure delle grandi altezze, nelle quali la grandezza del vuoto varia da un pollice fino a 14 e più pollici? Perlochè utiliſſima coſa ſarebbe che taluno intraprendeſſe una ſerie di oſſervazioni ben fatte mediante le quali ſi determinaſſe la quantità dell' influenza della grandezza del vuoto barometrico di pollice in pollice dai 15 gradi al diſotto del ghiaccio fino a 25° al diſopra della congelazione. Frattanto le ſperienze che abbiamo riferito in queſto paragrafo baſtar poſſono a far ſentire l'importanza di una tale ricerca che contribuirebbe certamente a rendere più ſicuro l'uſo di queſto utile iſtrumento.

Noi crediamo che la quantità dell' influenza del vuoto non sia proporzionale alla dilatazione dell' aria che vi è sempre anche nei barometri meglio purgati d'aria; ma proceda dalla maggiore perfezione del vuoto barometrico, perchè a misura che il vuoto s' ingrandisce esso diviene più perfetto, in quanto che quel poco d'aria che è nella parte vota dilatandosi in un maggiore spazio comprime meno la sottoposta colonna mercuriale. Ora il mercurio essendo meno compresso dall'aria contenuta nello spazio voto si cangia in un vapor elastico che estendendosi nello spazio voto comprime esso pure la sottoposta colonna mercuriale, per modo che non si deve tener conto della sola compressione dell'aria rarefatta che è nella parte vota del barometro, ma anche di questo vapor elastico mercuriale la di cui quantità ed elaterio è più o meno grande secondo che è più o meno grande e conseguentemente perfetto il vuoto barometrico.

Questo vapor elastico mercuriale non è un ente ipotetico. Negli atti dell' Accademia di Parigi (*) è riferita un' osservazione che dimostra che il mercurio quando non è compresso dall'aria ad un discreto grado di calore si cangia in vapori; poichè furono osservate le pareti della parte vuota del barometro stabilmente fissato ad un muro coperte da minutissimi globetti mercuriali; fenomeno che io pure ebbi occasione di ammirare in Toscana. Il Sig. *Roy* inoltre, il Sig. *Ramsdem* ed altri osservarono essi pure questa singolare sublimazione del mercurio; anzi il Sig. *Roy* (**) nella sua bella memoria del barometro riferisce d'aver fatto l' esperienza di riscaldare tutto il mercurio contenuto nella canna barometrica, mentre la parte vota era raf-

(*) Mem. de l'Acad. Roy. des Sciences.
(**) Phil. Transf.

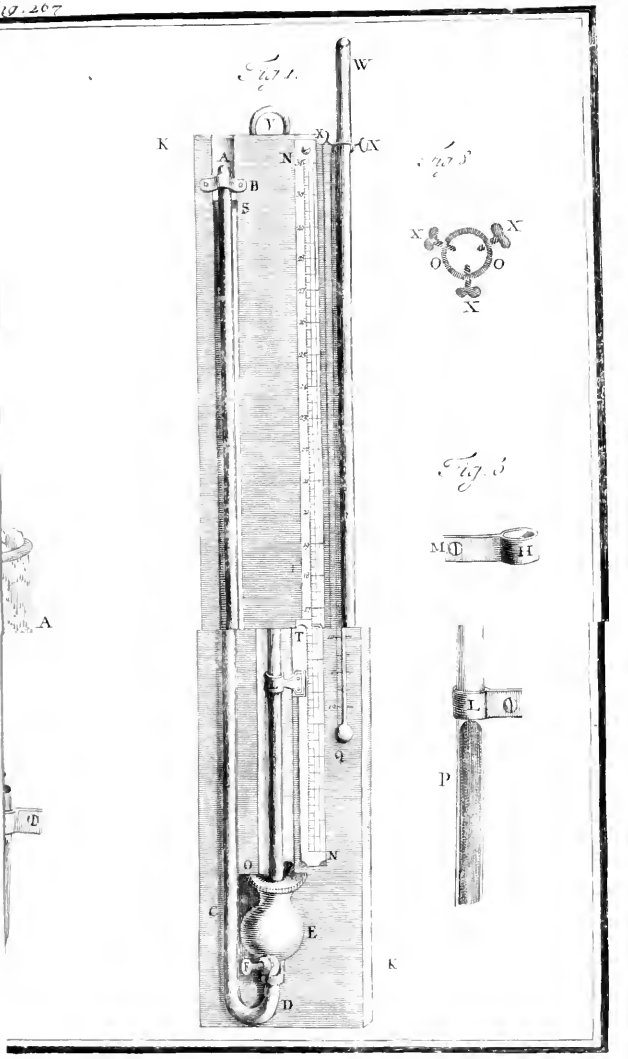
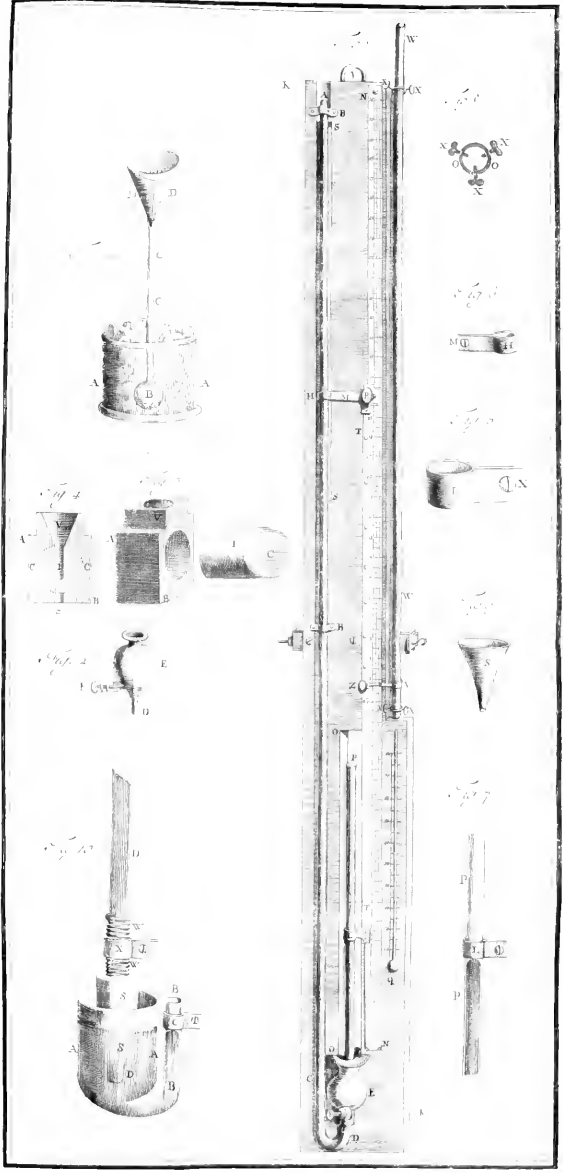


Fig. 1.
W
Y
K
X
X
A
N
B
S
Fig. 3
X
X
O
O
X
Fig. 5
M
H
T
Q
O
N
C
E
K
D
L
Q
P



freddata da un bagno di ghiaccio pesto; ed assicura di aver osservato che il freddo applicato al vuoto barometrico faceva condensare il vapor elastico mercuriale sulle pareti del tubo sotto forma di visibili globetti mercuriali. Tanto è vero che anche il mercurio, toltogli la compressione dell'aria, si volatilizza e si sublima; onde la proprietà osservata da *Nairne* (*) dei fluidi facilmente evaporabili quando non sono compressi dall'aria è comune al mercurio che è un fluido di meno facile evaporazione.

Questa evaporazione del mercurio e trasformazione in un vapore elastico è facilitata e promossa dal calore siccome accade ai liquori evaporabili, onde non è meraviglia se le osservazioni sull'influenza dell'ampiezza del vuoto barometrico non si corrispondono quando sono fatte in temperature diverse, perchè è in ragione della temperatura la quantità di questo vapore elastico mercuriale che si svolge dal mercurio quando non è compresso dal peso dell'aria.

Forse e senza forse la quantità di questo vapore svolgentesi dal mercurio variar potrebbe in ragione dell'ampiezza della superficie del mercurio. Ma non affrettiamoci a pronunziare prima di consultare l'oracolo della sperienza.

(*) Transf. Philos. Journal de Phis. de Rozier.

NUOVA INVESTIGAZIONE

DELLA

SOMMA GENERALE DELLE SERIE.

Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Direttore delle Scuole Militari di Verona.

Randando la ſtoria de' progreſſi umani nelle Scienze, e nell' Arti, ella è coſa ordinaria il vedere alle più luminoſe ſcoperte fatta ſtrada da alcune cognizioni per l'innanzi ſconneſſe e ſterili da molti anni, che baſtava ravvicinare per diſcernervi un' intima relazione, e una fecondità del tutto inaſpettata. Si potrebbe dire in qualche modo delle produzioni dell' intelletto quello, che ſuol dirſi dell' operazioni della natura: che non ſi fanno altramente per ſalto. E ſe pur talvolta ci appariſcono di getto, ciò addiviene perchè non abbiamo preſenti tutte le loro relazioni, nè le fila capitali, alle quali ſi attengono neceſſariamente. Il ſolo ormai familiariſſimo Calcolo Differenziale può darcene un eſempio ſegnalato; calcolo, che unito al ſuo inverſo ha fatto mutar faccia alle Scienze Matematiche. Non aveavi, che un breve paſſo da fare, una non difficile eſtenſione da darſi al modo di calcolare gli elementi delle linee, e dell' aree di *Barrovio*, e di *Wallis* per metterlo in tutta la luce, che ha avuto prima dal ſublime ingegno di *Newton*, indi da quello di *Leibnitz*. Così combinando i metodi di *Barrovio*, e di *Wallis* con altri precedenti, e con quello eziandio degl' indiviſibili del *Cavalieri*, e queſto coll' antico dell' eſauſtioni, è agevole il conoſcere, che tutto va

per iſcala, e che d'ordinario un' invenzione non è che un anello aggiunto ad una lunga catena di cognizioni anteriori.

Egli è noto da gran tempo, che prendendo la differenza ſucceſſivamente de' termini conſecutivi di una ſerie, comunque eſſi procedano con legge o ſenza legge, la ſerie delle differenze che ne riſulta ammette ſempre una ſomma nella combinazione di alcuni termini della ſerie primitiva, onde ha tratto l' origine, la quale perciò vien detta comunemente Sommatoria o Sommatrice, relativamente alla ſerie derivata, di cui ella ſomminiſtra la ſomma. Ma ſe non v' ha ſerie da cui non poſſa trarſi la ſerie delle differenze, non è del pari agevole coſa il ritorno, o il rimontare da una ſerie alla ſerie primitiva, da cui può ella eſſere ſtata originata. Se ſi eccettuino le ſerie a differenze coſtanti, e qualche caſo particolare di ſerie frazionali, ond' è ſtata aſſegnata la ſomma per queſta via dalla mano poſſente del Sig. *Eulero* nel principio delle ſue Inſtituzioni di Calcolo Differenziale, non abbiamo ſu di ciò alcun altro importante tentativo, ch' egli ſteſſo chiama difficiliſſimo. E pure la natura ſteſſa della coſa il vuole, che tra l' una e l' altra v' abbia uno ſtretto legame, una determinata conneſſione, per cui, eſſendo dato il termine generale della ſerie delle differenze, ſia pure in pronto il termine generale della ſommatrice.

Biſogna credere, che queſti due oggetti non ſieno mai ſtati abbaſtanza avvicinati. Non avrebbero per certo traſcurato i Geometri di profittarne, e ne ſarebbe conſeguito indubitatamente un paſſo de' più vantaggioſi nell' ardua Teoria delle ſerie. Di fatto pigliandola in eſame a parte a parte ne' diverſi Autori, che vi ſi ſono applicati, vedeſi quaſi per ogni claſſe capitale meſſo in uſo e adattato un metodo particolare. Ma quello che ha per obbietto le ſerie ſuſcettibili di ſomma algebraica, non ſi eſtende ſu le traſcendenti. Un

altro le comprende entrambe, ma ſotto un' eſpreſſione compoſta d' infiniti termini, la quale non s' interrompe e divien finita, che in alcuni caſi ſingolari.

Dove all'oppoſito internandoſi più addentro, che non s' è fatto, nell' indole loro, ſi avrebbero ſvolti ſintomi baſtevoli, onde ſcuoprire le ſerie ſommatrici, alle quali ſi riferiſcono neceſſariamente. V' ha poi più d' un ordine di ſerie totalmente intrattabili, alle quali non può aggiugnere alcuno de' metodi conoſciuti ſinora, in cui pure non è ſommamente oſcura l' intima relazione colle ſommatrici. Queſto è quello, che imprendo a moſtrare in queſta Memoria, ove con andamento facile e ſempre uniforme ſi riducono ad un unico metodo ordini di ſerie, che potevano parere incompatibili ſotto una legge comune per tutti. L' ho fatto rapidamente, eſſendomi propoſto men di fare un Trattato generale ſu queſta immenſa dottrina, che di aprirvi una ſtrada non battuta, in cui per fin le ſerie, che non ammettono propriamente termine generale, e quelle che non ne ammettono che di traſcendenti, non ricuſano di ſtare a fianco dell' Algebraiche, e delle Geometriche più ſemplici. Non laſcerò di ribatterla, e di far parte a' Geometri de' progreſſi, che mi farà permeſſo di farvi; non eſſendo infruttoſo alcun paſſo ulteriore, che poſſa farſi a perfezione ed incremento di una Scienza, ch' è il rifugio ultimo delle matematiche ſublimi, e a cui ſi attiene il calcolo integrale dell' equazioni differenziali finite, come ſi avrà occaſione di vederlo nella ſuſſeguente Memoria.

PRINCIPJ FONDAMENTALI.

§. I.

Qualunque progreſſione regolare creſcente o decreſcente, di qualunque natura ella ſiaſi, può ſempre ridurſi alla forma (*K*)

A, $A+b$, $A+b+c$, $A+b+c+d$, ecc. ..... (K)

conſiderando, che una certa grandezza A vada continuamente variando ſtato, e diventando ſucceſſivamente $A+b$, $A+b+c$, ecc. e la progreſſione altro non ſia che la diſpoſizione in ſerie di queſti ſtati ſucceſſivi della grandezza A.

§. II.

Per conſeguenza la differenza di due termini proſſimi ſarà neceſſariamente la variazione dall' uno all' altro di queſti ſtati ſucceſſivi; e la ſerie delle differenze de' termini (L)

b, c, d, e, ecc. ..... (L)

ſarà la collezione ordinata di tutte queſte variazioni conſecutive.

§. III.

Se coll' indeterminata x ſi eſprima nella progreſſione (K) la località in generale di uno ſtato qualunque della grandezza A, è coſa nota

I. Che vi ha una certa funzione di x, la quale rappreſenta generalmente tutti queſti ſtati, o tutti i termini della progreſſione, e per ciò ſuol dirſi termine generale della progreſſione.

II. Che qualunque volta, prendendo la ſomma ſucceſſivamente di due termini, di tre, di quattro ecc. della progreſſione (K), ne riſulta un' altra progreſſione regolare avente per termine generale una nuova funzione di x, queſta funzione vien comunemente detta ſomma generale della progreſſione (K).

III. E che la ſomma della progreſſione (K) all' infinito è quello che queſta funzione diventa, allorchè ſi aſſegna all' indeterminata x un valore infinito.

§. IV.

Chiamando pertanto T il termine generale della progreſſione (K), T' quello che diventa T ſoſtituendovi $x+1$ in luogo di x; ſarà neceſſariamente T' il termine generale d' una progreſſione, che comincia dal ſecondo termine della progreſſione (K).

§. V.

E prendendo la differenza T'' delle due funzioni T, T', è manifeſto, che T'' è il termine generale della ſerie (L) delle variazioni (§. II.), o delle differenze ſucceſſive de' termini della ſerie primitiva.

§. VI.

Se ſi ſottragga la grandezza variante A dal termine $x.^{mo}$ della progreſſione primitiva, il reſiduo non è altro evidentemente, che la ſerie (L) delle differenze compreſe tra il primo termine, e il termine $x.^{mo}$; e però, eſſendo T il termine generale della ſerie primitiva, la differenza tra la funzione T e la grandezza variante A ſarà neceſſariamente uguale alla ſomma di $x-1$ termini della ſerie delle differenze (L).

§. VII.

Per conſeguenza la differenza tra la funzione T' e il primo termine A ſarà la ſomma generale della ſerie delle differenze (L), di cui T'' è il termine generale. Imperciocchè, eſſendo la differenza tra la funzione T e il primo termine A uguale alla ſomma di $x-1$ termini della ſerie (L) (§. VI.), e T' eſſendo quello che diventa T ponendovi $x+1$ in luogo di x, egli è manifeſto,

manifesto, che la differenza tra T' e il primo termine A sarà uguale alla somma di x termini della serie (L).

Questa nuova funzione pertanto sarà il termine generale d'una serie avente per termini le somme successive de' termini della serie (L), e però ne esprimerà ella la somma generale (§. III).

§. VIII.

Se dunque si faccia, che la serie (L) rappresenti generalmente qualsivoglia progressione regolare, di cui sia T'' il termine generale, per determinarne la somma basterà rimontare dal termine T'' ai termini T, T'.

§. IX.

E poichè $T'' = T' - T$, sarà $T' - T$ ciò che diremo costantemente la forma differenziale di qualunque termine generale T'', siccome quello, che risulta dalla differenza de' termini T', T.

CAPITOLO PRIMO.

DELLE SERIE A DIFFERENZE COSTANTI.

PROBLEMA I.

Sommare le Serie a differenze costanti di qualunque ordine elle sieno.

RISOLUZIONE.

Essendo l'espressione (M)

$$A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2) + (D + 4Dx + 6Dx^2 + 4Dx^3) \ldots + \Omega(x+1)^n - \Omega x^n \ldots\ldots\ldots\ldots (M)$$

il termine generale delle ſerie a differenze coſtanti, in cui x è l' eſponente de' termini; il ſi metta ſotto la forma differenziale (N) (§. IX)

$A(x+1)+B(x+1)^2+C(x+1)^3+$ ecc.....
$-Ax-Bx^2-Cx^3-$ ecc. . . . . (N)

Si ſoſtituiſca l' unità in luogo di x nel ſecondo membro (O)

$Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ ecc. . . . . (O)

preſo affermativamente, il che ſomminiſtra la quantità (O')

$A+B+C+D+E+$ ecc. . . . . (O')

e ſi prenda la differenza (P) tra le eſpreſſioni (O), (O')

$Ax+Bx^2+Cx^3+$ ecc. $-A-B-C-D-$ ecc.... (P).

Dopo di che ſi metta in (P) $x+1$ in luogo di x; oppure ſi ſottragga, ch' è lo ſteſſo, la quantità (O') dal primo membro della forma differenziale (N); e ſi avrà l' eſpreſſione (R)

$Ax+(2Bx+Bx^2)+(3Cx+3Cx^2+Cx^3)$
$+$ ecc. . . . . $+\mathfrak{Q}(x+1)^n-\mathfrak{Q}$ . . . . . (R)

dico, che (R) è la ſomma generale di tutte le ſerie a differenze coſtanti.

Imperciocchè, ponendo $x+1$ in luogo di x nel ſecondo membro dell' eſpreſſione (N), ne riſulta il primo manifeſtamente. Dunque, eſſendo $Ax+Bx^2+Cx^3$ $+$ ecc. il termine generale d' una ſerie, ſarà neceſſariamente $A(x+1)+B(x+1)^2+C(x+1)^3+$ ecc. il termine generale d' una ſerie, che comincia dal ſecondo termine di quella (§. IX.). E però la differenza (M) di queſte due funzioni è il termine generale della ſerie delle variazioni (§. V.) o delle differenze ſucceſſive de' termini della ſerie, di cui la funzione (O) è il termine generale; $A+B+C+D+$ ecc. è la quantità variante; e l' eſpreſſione (P) è la ſomma generale di $x-1$ termini della ſerie delle differenze (§. VI). Ma l' eſpreſſione (R) è quello che diventa (P) mettendovi $x+1$ in luogo di x. Per conſeguenza ſarà

(*R*) la ſomma generale della ſerie (§. VII), di cui la funzione (*M*) è il termine generale, cioè di tutte le ſerie a differenze coſtanti. Il che ecc.

ESEMPIO.

Sia propoſta una ſerie a differenze coſtanti, di cui ſi dimanda la ſomma, eſſendo (*S*) il ſuo termine generale

$$9 - 2x + 2x^2 \ldots\ldots (S)$$

Biſogna primieramente trarre dall'eſpreſſione (*M*), che rappreſenta i termini di queſte ſerie generalmente, il termine generale delle ſerie a ſeconde differenze coſtanti, cioè

$$A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2).$$

Per ritrovare i valori delle indeterminate A, B, C non s'ha che a formare le tre ſeguenti equazioni $A + B + C = 9$; $2B + 3C = -2$; $3C = 2$, dalle quali ſi ricaverà agevolmente $A = \frac{31}{3}$, $B = -2$, $C = \frac{2}{3}$.

Dopo di che ſi traggano dall'eſpreſſione generale delle ſomme (*R*) i termini comprendenti le ſteſſe indeterminate A, B, C, vale a dire

$$(A + 2B + 3C)x + (B + 3C)x^2 + Cx^3$$

e vi ſi ſoſtituiſcano i valori ritrovati. L'eſpreſſione, che ne verrà

$$\frac{25x}{3} + \frac{2x^3}{3}$$

ſarà la ſomma generale ricercata.

SCOLIO I.

E' ſuperfluo l'aggiugnere altri eſempj, eſſendo per sè chiaro e facile il metodo per tutti gli ordini di queſta natura di ſerie, intorno alle quali è ſtato ſcrit-

to da tanti illuſtri uomini e così diffuſamente in altri tempi, come può vederſi nell'Opere di *Faulhaber*, *Ramellini*, *Wallis*, *Mercator*, *Preſtet* ecc. parlando de' più antichi, e in quelle più recenti de' dottiſſimi *Bernoulli*, *Eulero*, *Riccati* ecc. Ne ho trattato io ſteſſo con un mio particolar metodo in un Opuſcolo ſtampato in Verona nel 1767. Ma non laſcia per queſto di raccomandarſi abbaſtanza il metodo preſente per la ſomma facilità e ſemplicità con cui poſſono elle maneggiarſi, e con queſta ſegnata differenza da tutti gli altri, che non è altramente riſtretto a queſta ſola e ſingolar claſſe di ſerie.

Scolio II.

Paſſando a trattare ne' ſuſſeguenti Capitoli d' altre nature di progreſſioni, penſo di ommettere le dimoſtrazioni, che richiederebbe ogni particolare propoſizione, per non ripetere ſempre una medeſima coſa, eſſendo tutte appoggiate a' principj fondamentali, che abbiamo premeſſo, e dello ſteſſo preciſo tenore della precedente.

CAPITOLO SECONDO.

DELLE SERIE FRAZIONALI A SOMMA ALGEBRAICA.

Lemma.

La differenza di due frazioni della forma (*I*) (*II*)

$$\frac{f}{m.\,2m.\,3m\ldots xm} \ldots\ldots (I) \qquad \frac{d}{2m.3m.4m\ldots(x+1)m} \ldots (II)$$

ſi riduce alla forma (*III*)

$$\frac{\pm f(x+1)m \mp dm}{m \cdot 2m \cdot 3m \ldots (x+1)m} \ldots\ldots (III).$$

Imperciocchè, non differendo i fattori de' denominatori tra di sè fuorchè in quello, che il primo della frazione (*II*) comincia dal secondo della frazione (*I*), e l'ultimo di questa riesce il penultimo di quella, è manifesto che tutti i fattori della frazione (*I*), eccettuato il primo, sono i fattori medesimi della frazione (*II*), eccettuato l'ultimo. Per conseguenza il numeratore della differenza è patentemente $\pm f(x+1)m \mp dm$, e il denominatore $m \cdot 2m \cdot 3m \ldots (x+1)m$. Dunque ecc.

PROBLEMA II.

Sommare le serie frazionali a fattori semplici consecutivi.

Risoluzione.

Poichè l'espressione (*M*) è il termine generale di queste serie

$$\frac{\pm\left(A+Bx+Cx^2+\text{ecc}\ldots\mathfrak{Q}x^n\right)\left(a+b(x+n+1)\right)}{\left(a+bx\right)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots\ldots\left(a+b(x+n+1)\right)} \mp \frac{\left(A+B(x+1)+C(x+1)^2+\text{ecc}\ldots\mathfrak{Q}(x+1)^n\right)(a+bx)}{\left(a+bx\right)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots\ldots\left(a+b(x+n+1)\right)}$$

$\ldots\ldots\ldots (M)$

la si ponga sotto forma differenziale, la quale si ridurrà, pel Lemma precedente, alla forma (*N*)

$$\pm \frac{A+Bx+Cx^2+\text{ecc}\ldots\mathfrak{Q}x^n}{\left(a+bx\right)\left(a+b(x+1)\right)\ldots\left(a+b(x+n)\right)} \mp \frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots+\mathfrak{Q}(x+1)^n}{\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots\left(a+b(x+n+1)\right)}$$

$\ldots\ldots\ldots (N)$

Si ſoſtituiſca l'unità in luogo di x nel primo membro del binomio (N), con che ſi avrà l'eſpreſſione (C)

$$\frac{A+B+C\ldots\ldots+\Omega}{(a+b)\,(a+2b)\ldots\,(a+b(n+1))}\ldots\ldots(C)$$

e preſa la differenza tra il ſecondo membro del binomio (N), e la quantità (C), ſi avrà l'eſpreſſione (Ω)

$$\pm\frac{(A+B+C+\text{ecc}\ldots\Omega)\,(a+b(x+1))\,(a+b(x+2))\ldots(a+b(x+n+1))}{(a+b)(a+2b)..(a+b(n+1))\,((a+b(x+1)\,(a+b(x+2))..(a+b(x+n+1)))}$$

$$\mp\frac{((a+b)(a+2b)\ldots(a+b(n+1)))\,(A+B(x+1)+C(x+1)^2+\ldots\Omega(x+1)^n)}{(a+b)\,(a+2b)\,..\,(a+b(n+1))\,((a+b(x+1)\,(a+b(x+2))\,..(a+b(x+n+1)))}$$

$$\ldots\ldots(\Omega)$$

la quale è la ſomma generale delle ſerie frazionali a fattori ſemplici conſecutivi, e a ſomma algebraica.

La Dimoſ. è la ſteſſa, come nella I. Propoſizione.

Esempio.

Sia da ſommarſi la ſerie, di cui $\frac{1+x}{x(1+x)\,(2+x)}$ è il termine generale.

Poichè ſono tre i fattori al denominatore, ſi faccia $n=1$ nel termine generale (M); ed eſſendo decreſcente la ſerie, ſi avrà generalmente

$$\frac{(A+Bx)\,(a+b(x+2))-(A+B(x+1))\,(a+bx)}{(a+bx)\,(a+b(x+1))\,(a+b(x+2))}$$

$$=\frac{2Ab-aB+bBx}{(a+bx)\,(a+b(x+1))\,(a+b(x+2))}$$

Paragonando queſt' eſpreſſione generale col termine generale propoſto ſi ricaverà pel valore delle indeterminate $a=0$, $b=1$, $A=\frac{1}{2}$, $B=1$. Si tragga ora dal-

la ſomma generale (Q), colla ſoſtituzione di $n=1$, l'eſpreſſione generale ſeguente

$$\frac{(A+B)(a+b(x+1))(a+b(x+2))-(A+B(x+1))(a+b)(a+2b)}{(a+b)(a+2b)(a+b(x+1))(a+b(x+2))}$$

e vi ſi ſoſtituiſcano i valori ritrovati. La frazione riſultante $\frac{x(3x+5)}{4(1+x)(2+x)}$ ſarà la ſomma generale ricercata, e poſto $x=\infty$, ſarà $\frac{3}{4}$ la ſomma della ſerie all'infinito.

PROBLEMA III.

Sommare le ſerie frazionali a fattori compoſti conſecutivi.

Risoluzione.

Eſſendo l'eſpreſſione (M)

$$\pm\frac{(A+Bx+Cx^2\ldots+Qx^n)(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}{(M+Nx+Ox^2\ldots+Sx^{n+1})(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots+S(x+1)^{n+1})}$$
$$\mp\frac{(A+B(x+1)\ldots+Q(x+1)^n)(M+Nx\ldots+Sx^{n+1})}{(M+Nx+Ox^2\ldots+Sx^{n+1})(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots+S(x+1)^{n+1})}$$
$$\ldots\ldots\ldots (M)$$

il termine generale di queſte ſerie, il ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$\pm\frac{A+Bx+Cx^2\ldots+Qx^n}{M+Nx+Ox^2\ldots+Sx^{n+1}}$$
$$\mp\frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots+Q(x+1)^n}{M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots+S(x+1)^{n+1}}\ldots\ldots(N)$$

Poſto ciò, ſi ſoſtituiſca l'unità in luogo di x nel pri-

mo membro dell'espressione (N); dal che risulterà la quantità (C);

$$\frac{A+B+C+D\ldots\ldots+\Omega}{M+N+O\ldots\ldots+S}\ldots\ldots(C)$$

e si prenda la differenza tra la quantità (C) e il secondo membro della forma (N). L'espressione risultante (Ω).

$$\frac{\pm\left(A+B+C\ldots\ldots+\Omega\right)\left(M+N(x+1)\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}{\left(M+N+O\ldots\ldots+S\right)\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}$$
$$\mp\frac{\left(M+N+O\ldots\ldots+S\right)\left(A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots\ldots+\Omega(x+1)^n\right)}{\left(M+N+O\ldots\ldots+S\right)\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots(\Omega)$$

sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

ESEMPIO.

Trovare la somma della serie, di cui $\frac{1+3x+x^2}{x^2(1+x)^2}$ è il termine generale.

Poichè i fattori del denominatore non eccedono il secondo grado, è agevole il vedere, che fa d'uopo supporre $n=1$, perchè i fattori del denominatore nell'espressione generale (M) non oltrepassino questo grado. È però la frazione, che rappresenta il termine generale di tali serie, sarà necessariamente di questa forma

$$\frac{AN-BM+AO+(2AO+BO)x+BOx^2}{\left(M+Nx+Ox^2\right)\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2\right)}$$

Ora, paragonando questa espressione col termine generale dato, si trova facilmente essere $M=N=0$, $A=B=O=1$. Sostituendo pertanto questi valori nell'espressione (Ω), ne risulta la forma

$$\frac{3x+2x^2}{(1+x)^2}$$

$$\frac{3x+2x^2}{(1+x)^2}$$

che farà la ſomma generale ricercata.

SCOLIO.

Eſaminando il termine generale *(M)* di queſta ſorta di ſerie nella Propoſizione precedente, ſi riconoſce agevolmente, che il numero de' fattori ſemplici nel denominatore eccede di due unità il numero di ſimili fattori nel numeratore. Queſta condizione è neceſſaria non meno per queſte ſerie, che per quelle a fattori ſemplici conſecutivi, perchè poſſano eſſere ſuſcettibili di ſomma algebraica. Ma havvi ancora un' altra condizione da ſoddisfare nelle ſerie a fattori compoſti per riſpetto a' coefficienti. Ne' termini generali delle ſerie della II. Propoſizione il numero $n+1$ delle indeterminate, che debbono definirſi, non eccede il numero de' termini che poſſono aver luogo ne' numeratori de' termini generali propoſti; ma non è così nelle ſerie a fattori compoſti. Imperciocchè il numero delle indeterminate eſſendo parimente $n+1$, i coefficienti che poſſono aver luogo ne' numeratori de' termini generali ne' caſi particolari ſono al numero di $2n+1$. In conſeguenza è neceſſario, che queſti coefficienti abbiano tra di sè una determinata relazione, affinchè le equazioni poſte poſſano tutte aver luogo ad un tempo. E appunto, oltre all' enunciata comune colle ſerie a fattori ſemplici, v' è queſta condizione di più da adempiere per le ſerie a fattori compoſti, perchè ammettano ſomma algebraica; il che s' accorda puntualmente con quello che da altri ancora è ſtato avvertito.

CAPITOLO TERZO.

DELLE SERIE RICORRENTI.

PROBLEMA IV.

TRovare la ſomma generale delle progreſſioni geometriche.

RISOLUZIONE.

Poichè l'eſpreſſione

$$(\pm A \mp AK^b)\,K^{a\dagger bx} \ldots\ldots (M)$$

è il termine generale delle progreſſioni geometriche, ſi metta ſotto la forma differenziale (*N*)

$$\pm AK^{a\dagger bx} \mp AK^{a\dagger b(x\dagger 1)} \ldots\ldots\ldots (N).$$

Si ſoſtituiſca poi nel primo membro $AK^{a\dagger bx}$ l' unità in luogo di x, e ſi avrà l'eſpreſſione $AK^{a\dagger b}$. Se pertanto ſi prenda la differenza tra queſta quantità e il ſecondo membro della forma differenziale $AK^{a\dagger b(x\dagger 1)}$, l'eſpreſſione riſultante (*Q*)

$$AK^{a\dagger b}\,(\pm 1 \mp K^{bx}) \ldots\ldots (Q)$$

farà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA V.

Sommare le ſerie compoſte di progreſſioni algebraiche, e geometriche.

RISOLUZIONE.

Eſſendo la formula (*M*)

$\pm K^{a+bx}\left(A'-A'K^{d}+Ax-AK^{b}(x+1)+Bx^{2}-BK^{b}(x+1)^{2}\ldots.+\mathcal{Q}x^{n}-\mathcal{Q}K^{b}(x+1)^{n}\right)$
..... (M)

il termine generale di queſte ſerie, il ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$\pm\left(A+Ax+Bx^{2}\ldots+\mathcal{Q}x^{n}\right)K^{a+bx}\mp\left(A+A(x+1)+B(x+1)^{2}\ldots+\mathcal{Q}(x+1)^{n}\right)K^{a+b(x+1)}$
..... (N)

ſoſtituendo poi l'unità in luogo di x nel primo membro della forma (N), ſi prenda la differenza tra la quantità che ne riſulta e il ſecondo membro, e ſi troverà l'eſpreſſione $(\mathcal{Q})$

$\pm K^{a+b}\left(A-A'K^{bx}+A-AK^{bx}(x+1)+B-BK^{bx}(x+1)^{2}\ldots.+\mathcal{Q}-\mathcal{Q}K^{bx}(x+1)^{n}\right)$
..... $(\mathcal{Q})$

Sarà pertanto $(\mathcal{Q})$ la ſomma generale, che ſi ricercava. Il che ecc.

Esempio.

Sia da trovarſi la ſomma generale della ſerie, che ha per termine generale la funzione $2^{x}(1+x+x^{2})$. Giacchè la più alta poteſtà di x nel termine generale della ſerie algebraica non oltrepaſſa il ſecondo grado, ſi faccia $n=2$ nel termine generale (M). Eſſendo creſcente la ſerie, l'eſpreſſione generale, che ne riſulterà, ſarà

$K^{a+bx}\left(-A'+A'K^{b}-Ax+AK^{b}(x+1)-Bx^{2}+BK^{b}(x+1)^{2}\right)$

in cui poſto $K=2$, $a=0$, $b=1$, ſi avrà

$$2^{x}\left(A'+2A+2B+(A+4B)x+Bx^{2}\right)$$

e però, paragonando i termini tra di sè, ſi troverà eſſere $A'=5$, $A=-3$, $B=1$. Soſtituiti queſti valori nell'eſpreſſione $(\mathcal{Q})$, per eſſere creſcente la ſerie, ſarà

$$2^{x}(6-2x+2x^{2})-6$$

la ſomma generale ricercata.

COROLLARIO I.

Egli è dimoſtrato da gran tempo, che i termini generali di tutte le ſerie Ricorrenti ſono formule eſponenziali, o eſponenziali moltiplicate con quantità coſtanti, oppure con funzioni di x intiere e razionali. E poichè col mezzo della IV e V Propoſizione ſi ſommano tutte le ſerie aventi sì fatte eſpreſſioni per termini generali, ſi avrà la ſomma conſeguentemente di tutte le ſerie Ricorrenti, che a tali ſerie ſi riducono generalmente.

COROLLARIO II.

Se ſi faccia $n=o$ nelle due eſpreſſioni (M), $(\mathfrak{Q})$ della Prop. precedente, ſi ottiene il termine e la ſomma generale di tutte le ſerie eſponenziali della IV.

COROLLARIO III.

E facendo ſemplicemente $K=1$, ſi cangiano toſto queſte ſerie in ſerie a differenze coſtanti, il che ſi conforma a quanto ha dimoſtrato il Sig. *Moivre* nel ſuo eccellente libro *de Menſura ſortis*, e il Sig. Daniele *Bernoulli* nel III. Vol. de' vecchj Comentarj di Pietroburgo per vie differentiſſime.

CAPITOLO QUARTO.

DELLE SERIE FRAZIONALI A SOMMA ESPONENZIALE.

PROBLEMA VI.

SOmmare le ſerie frazionali a fattori ſemplici conſecutivi, e a ſomma eſponenziale.

RISOLUZIONE.

La formula (M)

$$\pm\frac{K^{a+bx}\left((A+Bx+Cx^2\ldots+\mathfrak{Q}x^n)\ (a+b(x+n+1))\right)}{(a+bx)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots.\left(a+b(x+n+1)\right)}$$
$$-\frac{K^{a+bx+b}\left((a+bx)\ (A+B(x+1)\ \ldots+\mathfrak{Q}(x+1)^n)\right)}{(a+bx)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots.\left(a+b(x+n+1)\right)}$$
$$\ldots\ldots\ldots(M)$$

è il termine generale di queſte ſerie. Il ſi metta dunque ſotto la forma differenziale (N), ſecondo il lemma del II. Cap.

$$\pm\frac{A+Bx+Cx^2.\ldots+\mathfrak{Q}x^n}{(a+bx)\ldots.(a+b(x+n))}K^{a+bx}$$
$$\mp\frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2.\ldots.+\mathfrak{Q}(x+1)^n}{\left(a+b(x+1)\right)\ldots\ldots\left(a+b(x+n+1)\right)}K^{a+b(x+1)}$$
$$\ldots\ldots\ldots(N)$$

e meſſa l' unità in luogo di x nel primo membro di queſta forma, ſi prenda la differenza tra la quantità che ne riſulta e il ſecondo membro. Si ricaverà la formula $(\mathfrak{Q})$

$$\pm K^{a+b}\Big(\big(A+B+\text{ecc.}\ldots\ \Omega\big)\big((a+b(x+1))\ldots\ldots(a+b(x+n+1)\big)\Big)$$
$$\Big((a+b)(a+2b)..(a+b(n+1))\big(a+b(x+1)\big)(a+b(x+2))..(a+b(x+n+1))\Big)$$
$$-K^{a+b+b}\Big((a+b)\ldots a+b(n+1)\big)\big(A+B(x+1)\ldots+\Omega(x+1)^n\big)\Big)$$
$$\Big((a+b)(a+2b)..(a+b(n+1))\big(a+b(x+1)\big)(a+b(x+2))..(a+b(x+n+1))\Big)$$
$$\ldots\ldots\ldots(\Omega)$$

la quale farà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA VII.

Sommare la ſteſſa claſſe di ſerie a fattori compoſti conſecutivi.

RISOLUZIONE.

Poichè l' eſpreſſione (M)

$$\pm K^{a+bx}\left(\frac{\big(A+Bx\ldots+\Omega x^n\big)\big(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1}\big)}{\big(M+Nx\ldots+Sx^{n+1}\big)\big(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1}\big)}\right)$$
$$\left(\frac{-K^b\big(A+B(x+1)\ldots+\Omega(x+1)^n\big)\big(M+Nx\ldots+Sx^{n+1}\big)}{\big(M+Nx\ldots+Sx^{n+1}\big)\big(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1}\big)}\right)$$
$$\ldots\ldots(M)$$

è il termine generale di queſte ſerie, gli ſi dia la forma differenziale, che gli è propria (N)

$$\pm\frac{A+Bx\ldots+\Omega x^n}{M+Nx\ldots Sx^{n+1}}K^{a+bx}$$
$$\mp\frac{A+B(x+1)\ldots+\Omega(x+1)^n}{M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1}}K^{a+b(x+1)}\ldots\ldots(N)$$

Ponendo in ſeguito l'unità in luogo di x nel primo termine dell'eſpreſſione (N), dal che riſulta la quantità (C),

$$(C)\ldots\ldots\frac{A+B+C\ldots+\Omega}{M+N+O\ldots+S}K^{a+b}$$

ſi prenda la differenza tra il ſecondo termine della formula (*N*) e la quantità (*C*), e ſi avrà l'eſpreſſione (Q)

$$\pm K^{a+b}\left(\frac{\left((A+B+C\ldots+Q)\,(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}{(M+N+O\ldots+S)\,(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right.$$
$$\left.\frac{-K^{bx}(A+B(x+1)\ldots+Q(x+1)^n)\,(M+N+O\ldots+S))}{(M+N+O\ldots+S)\,(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots(Q)$$

La quale ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

Esempio.

Sia propoſta da ſommare la ſerie, di cui

$$\frac{(3-4x+x^2)\,2^x}{(x^2-x+1)\,(x^2+x+1)}$$

è il termine generale.

Si tragga dal termine generale (*M*) di queſte ſerie (*Prop. preced.*) l'eſpreſſione convenevole a queſto caſo, facendo $n=1$, $K=2$, $a=0$, $b=1$, $M=O=1$, $N=-1$. Si avrà la formula ſeguente

$$\frac{\left(A+2B-(3A+B)x+(A-B)x^2+Bx^3\right)2^x}{(x^2-x+1)\,(x^2+x+1)}$$

la quale paragonata col termine particolare propoſto ſomminiſtrerà $A=B=1$. Determinati tutti queſti valori, ſi ſoſtituiſcano nella ſomma generale (Q), e ne riſulterà la formula

$$\frac{(4+2x)2^x}{x^2+x+1}-4$$

la quale ſarà la ſomma generale ricercata.

SCOLIO.

E' neceſſario l'avvertire in queſto luogo, come s'è fatto precedentemente, che eſſendo il numero delle indeterminate del numeratore ſempre minore del numero dell'equazioni da formare, fa d'uopo neceſſariamente, che v'abbia una determinata relazione tra queſti coefficienti, perchè la ſerie ſia ſuſcettibile di ſomma eſponenziale della forma (Q).

PROBLEMA VIII.

Sommare la ſerie (R)

$$\frac{P}{(P\pm 1)(P^2\mp 1)}+\frac{P^2}{(P^2\pm 1)(P^3\pm 1)}+\frac{P^3}{(P^3\pm 1)(P^4\pm 1)}\cdots\cdots$$
$$+\frac{P^x}{(P^x\pm 1)(P^{x+1}\pm 1)}\cdots\cdots (R)$$

RISOLUZIONE.

Si metta ſotto forma differenziale il termine generale propoſto . . . . . $\frac{P^x}{(P^x\pm 1)(P^{x+1}\pm 1)}$
la quale farà della forma ſeguente (N)

$$\frac{1}{(P-1)(P^x\pm 1)}-\frac{1}{(P-1)(P^{x+1}\pm 1)}\cdots\cdots (N)$$

Si ponga nel primo termine l'unità in luogo di x, e ſi avrà l'eſpreſſione $\frac{1}{(P-1)(P\pm 1)}$; ſi ſottragga quindi il ſecondo termine da queſta eſpreſſione. La formula (Q) riſultante

$$\frac{P(P^x-1)}{(P-1)(P\pm 1)(P^{x+1}\pm 1)}\cdots\cdots (Q)$$

farà

ſarà pe' noſtri principj la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

CAPITOLO QUINTO.

LE ſerie a differenze coſtanti, e le ſerie Ricorrenti in generale ammettono tutte ſenza eccezione una ſomma generale Algebraica, o eſponenziale, ſiccome abbiamo veduto nelle Prop. I. IV. V. All' oppoſito le ſerie frazionali non ne ſono generalmente ſuſcettibili, avendovene un' infinità, che non ammettono che ſomme traſcendenti. Le Prop. II, e VI non abbracciano che le ſerie a ſomma Algebraica o eſponenziale. Ma non laſcia perciò il noſtro metodo di ſoggettare anche quelle alle ſue leggi. In effetto le ho tutte generalmente ridotte ſotto forme Integrali, e nel preſente Capitolo eſporremo il modo di ſommarle. Così per tutt' altra via ſi vedranno compreſe ſotto generaliſſime eſpreſſioni le ſomme di queſta natura di ſerie che ſono ſtate per l' addietro tolte per mano da tanti illuſtri uomini, e ſopra le quali ho io pure pubblicato una Memoria nel 1775, che ha per titolo *Specimen de Seriebus convergentibus*. Al qual paſſo non diſdice il ricordare, che un Geometra de' primi inclinò a credere, che il metodo da me adoperato in quel Libro poteſſe avere comuni i principj con quello che l' immortale *Eulero* eſpoſe nel VI. Vol. degli antichi Com. di S. Pietroburgo. Ma per verità deriva il mio metodo da alcune propoſizioni fondamentali, che ho premeſſo, delle quali realmente non ſo di eſſere debitore a chi che ſia, e ſu le quali non s' appoggia altramente il metodo Euleriano. Moſtriamolo con qualche facile eſempio. Si tratti di ſommare le ſerie, che hanno (*A*)

$\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)}$ per termine generale. Avendo dimostrato al §. V. di quel mio Opuscolo essere $\frac{1}{qx^{b:a}}\int\left(x^{b:a}dx.\frac{1-x^n}{1-x}\right)$ la somma generale delle serie aventi per termine generale $\frac{x^n}{an+b}$, moltiplicando quest' espressione, e la serie per $x^{e:c-b:a}$, e fatta un' integrazione, ricavo immediatamente, posto sempre nelle quantità finite $x=1$, la formula

$$(B)\ \ldots\ \frac{1}{bc-ae}\int\left(1-x^{e:c-b:a}\right)x^{b:a}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$$

ch' esprime la somma generale di quelle serie. Continuando così a fare altra moltiplicazione e successiva integrazione determino di mano in mano le somme generali per tre fattori, indi per quattro ecc. come può vedersi al §. X.

Il Sig. *Eulero* nel §. 10 di quella Memoria, per le serie aventi l' espressione (A) per termine generale, opera in questo modo. Chiama S la somma ricercata. Moltiplica la lettera S, e la serie per px^π, e differenzia l' equazione; indi determina il valore di p, π in a, b. Moltiplica di nuovo quest' equazione differenziata per px^π, e dopo un' altra differenziazione determina il valore di p, π in a, b, c, e. Passando poscia a due successive integrazioni, ov' entra s, e ds, trova finalmente per s la stessa espressione nostra (B). Se la serie avesse tre fattori, prende da capo a trattarla con simili operazioni, e così di mano in mano per quattro, e per tal numero di fattori che vuole. Parrebbe differente anche ne' principj un metodo che con una sola moltiplicazione, ed una sola integrazione di funzioni semplici di x, perveniss ad un risultamento, che un al-

tro non ottiene che con due moltiplicazioni, due differenziazioni, e due integrazioni; e molto più in progreſſo creſcendo il numero de' fattori. Ma quello che fiamo qui per eſporre è ben da tutti diverſo così ne' principj, come nell' applicazione.

Delle Serie Frazionali trascendenti.

PROBLEMA IX.

Trovare il termine generale della ſerie (Υ)

$$\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}+\frac{1}{m+3n}\ldots\ldots\ldots(\Upsilon)$$

ſotto una forma integrale.

Risoluzione.

Eſſendo $(\mu)\ \frac{1}{m+nx}$ il termine generale algebraico della ſerie (Υ), fa d' uopo, che il nuovo termine generale dia dopo l' integrazione l' eſpreſſione (μ). Per conſeguenza non ſi tratta che di aſſumere tal funzione differenziale d' una variabile z, ch' eſſendo integrata, e avendo poſta l' unità in luogo di z nell' integrale, ne riſulti la funzione algebraica (μ). Ma appunto facendo l' integrazione della funzione differenziale $\frac{1}{n}z^{m:n+x-1}dz$, è manifeſto, che l' integrale

$$(r)\ldots\ldots\ldots\frac{1}{n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)=\frac{1}{m+nx}$$

fatto $z=1$ dopo l' integrazione. Dunque la formula (r) rappreſenta il termine generale della ſerie (Υ). Il che ecc.

PROBLEMA X.

Sommare la ſerie (Y) della Prop. precedente.

RISOLUZIONE.

Poichè $\frac{1}{n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)$ è il termine generale della ſerie (Y), il ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n+x-1}\,dz}{1-z}-\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n+x}\,dz}{1-z}\ldots\ldots(N)$$

Meſſa poi l'unità in luogo di x nel primo termine, con che ſi ha $\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n}dz}{1-z}$ (C), ſi ſottragga dall'eſpreſſione (C) il ſecondo termine della forma (N). La differenza, che ne riſulta $(\mathfrak{Q})$

$$\frac{1}{n}\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\ldots\ldots(\mathfrak{Q})$$

farà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA I.

La formula (M)

$$\frac{A}{n/\varsigma..\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-p:q-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n+x-1}dz\ldots(M)$$

integrata da $z=0$ *ſino a* $z=1$, *è il termine generale di tutte le ſerie* (X)

$$\frac{A}{(m+n)(p+q)\ldots(\Delta+\omega)}+\frac{A}{(m+2n)(p+2q)\ldots(\Delta+2\omega)}\text{ ecc...(X)}$$

nelle quali il numeratore è una quantità coſtante, e il

denominatore il prodotto d'un numero qualunque di fattori ſemplici.

DIMOSTRAZIONE.

Si traggano per ordine fuor de' ſegni le quantità differenziali, e ſe ne prendano ſucceſſivamente gl' integrali in modo che ſvaniſcano per la ſoſtituzione di $z=0$. Si avrà dalla prima in ordine l'integrale $\frac{nz^{m:n+\varkappa}}{m+nx}$; il che eſſendo moltiplicato per $z^{p:q-m:n-1}dz$, e integrato darà per la ſeconda

$$\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n+\varkappa-1}dz = \frac{nqz^{p:q+\varkappa}}{(m+nx)(p+qx)}$$

e così operando ſucceſſivamente ſi perverrà alla forma

$$\frac{nqs\ldots.\Phi\omega z^{\Delta:\varpi+\varkappa}}{(m+nx)(p+qx)+\ldots(\Delta+\omega x)}$$

la quale diviſa per $nqs\ldots.\phi\omega$, e moltiplicata per A, dopo di aver fatto $z=1$, è il preciſo termine generale delle ſerie propoſte (X). Il che ecc.

PROBLEMA XI.

Sommare le ſerie (X) *della Prop. precedente.*

RISOLUZIONE.

Eſſendoſi dimoſtrato, che la formula integrale (M) è il termine generale di queſte ſerie, la ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$\frac{A}{nqs\ldots.\uparrow\omega}\int x^{\Delta:\varpi-\mu:\varrho-1}dz\ldots.\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n+\varkappa-1}dz}{1-z}$$

$$\frac{-A}{nqs\ldots.\Phi\omega}\int x^{\Delta:\varpi-\mu:\varrho-1}dz\ldots.\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n+\varkappa}dz}{1-z}\ldots\ldots(N)$$

Messa quindi l'unità in luogo di x nel primo termine, dal che risulta l'espressione

$$\frac{A}{nqs....\varphi\omega}\int z^{\Delta:\alpha-\mu:\beta-1}dz.....\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n}dz}{1-z}$$

si sottragga da questa espressione il secondo termine della forma (N). La differenza $(\mathfrak{Q})$

$$\frac{A}{nqs..\varphi\omega}\int z^{\Delta:\alpha-\mu:\beta-1}dx...\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{\nu}}{1-z}\right)$$

$$.....(\mathfrak{Q})$$

farà manifestamente la somma generale dimandata. Il che ecc.

TEOREMA II.

La formula (M)

$$\frac{\delta.}{ndz}\left(bz^{a:b-m:n}\int\left(z^{m:n+\kappa-1}dz\right)\right)....(M)$$

è il termine della serie (μ)

$$\frac{a+b}{m+n}+\frac{a+2b}{m+2n}+\frac{a+3b}{m+3n}+\text{ecc.}....\frac{a+bx}{m+nx}....(\mu)$$

esprimendo la lettera δ. *una differenziazione ordinaria.*

DIMOSTRAZIONE.

Si prenda attualmente l' integrale della quantità sotto il segno. La formula (M) diverrà

$$\frac{\delta.(bz^{a:b+\kappa})}{dz\,(m+nx)}$$

la quale essendo differenziata somministra

$$\frac{a+bx}{m+nx}z^{a:b+\kappa-1}.$$ E poichè quest' espressione svanisce

facendovi $z=0$, si ponga $z=1$. Si avrà $\frac{a+bx}{m+nx}$, ch'è effettivamente il termine generale della serie (μ). Il che ecc.

COROLLARIO I.

Si perverrebbe allo stesso risultamento se la funzione (M) fosse sviluppata, com' è manifesto. Imperciocchè, facendo $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=\pi$, si avrebbe l' espressione seguente

$$\frac{b\tau}{n}z^{\pi-1}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)+\frac{b}{n}z^{a:b+x-1}$$

dalla quale, dopo l' integrazione compiuta, e la sostituzione di $z=1$, si ricaverebbe il medesimo termine generale di prima. In fatti, posto $z=1$ nelle quantità finite, la formula diventa

$$\frac{b\tau}{n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)+\frac{b}{n}$$

e però, integrando, si ha

$\frac{b\tau}{n}\cdot\frac{nz^{(m+nx):n}}{m+nx}+\frac{b}{n}=\frac{b\tau z^{(m+nx):n}}{m+nx}+\frac{b}{n}$, cioè, fatto $z=1$, $\frac{b}{m+nx}\left(\frac{a}{b}-\frac{m}{n}\right)+\frac{b}{n}=\frac{a+bx}{m+nx}$.

COROLLARIO II.

Nello stesso modo si proverebbe, che l' espressione

$$\frac{1}{dz}\delta.\left(ez^{c:e-a:b+1}\times\frac{1}{ndz}\delta.(bz^{a:b-m:n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)\right)$$

è il termine generale della serie

$$\frac{(a+b)(c+e)}{m+n}+\frac{(a+2b)(c+2e)}{m+2n}\ldots\ldots+\frac{(a+bx)(c+ex)}{m+nx}$$

e l'espressione

$$\frac{1}{d2}\delta.\left(gz^{f:g-c:e+1}\times\frac{1}{dz}\delta.(ez^{c:e-a:b+1}\times\frac{1}{ndz}\delta.(bz^{a:b-m:n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)\right)$$

il termine generale della serie

$$\frac{(a+b)(c+e)(f+g)}{m+n}+\frac{(a+2b)(c+2e)(f+2g)}{m+2n}$$
$$\ldots\ldots\ldots+\frac{(a+bx)(c+ex)(f+gx)}{m+nx}$$

e così successivamente.

PROBLEMA XII.

Sommare la Serie (μ) *del II Teorema.*

Risoluzione.

Si ponga il termine generale (M) sotto la forma differenziale (N)

$$\frac{b}{ndz}\delta.\left(z^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+x-1}dz}{1-z}\right)-\frac{b}{ndz}\delta.\left(z^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+x}dz}{1-z}\right)..(N)$$

E si sostituisca nel primo membro l'unità in luogo di x. Se pertanto si sottragga la quantità che ne risulta dal secondo membro; si avrà l'espressione seguente

$$\frac{b}{ndz}\delta.\left(z^{a:b-m:n}\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\right.$$

la quale sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA

TEOREMA III.

Si ſupponga $Z = \frac{b}{dz}\delta.\left(z^{a:b-m:n}\int(z^{m:n+x-1}dz)\right)$.

La formula (*M*)

$$\frac{1}{nqs...\omega}\int z^{\Delta:\alpha-p:q-1}dz...\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-a:b}Zdz\ ....(M)$$

da $z=0$ *ſino a* $z=1$ *è il termine generale della ſerie* (*Y*)

$$\frac{a+b}{(m+n)(p+q)...(\Delta+\alpha x)}+\frac{a+2b}{(m+2n)(p+2q)...(\Delta+2\omega)}$$
$$.....+\frac{a+bx}{(m+nx)(p+qx)...(\Delta+\alpha x)}\ .....(Y)$$

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendoſi dimoſtrato nel Teorema precedente

$$\frac{b}{dz}\delta.\left(z^{a:b-m:n}\int(z^{m:n+x-1}dz)\right)=\frac{n(a+bx)}{m+nx}z^{a:b+x-1},$$

ſi moltiplichi queſto valore per $z^{p:q-a:b}dz$, e prendendo l' integrale del prodotto, ſi avrà

$$\frac{nq(a+bx)z^{p:q+x}}{(m+nx)(p+qx)}$$

moltiplicando di nuovo queſt' eſpreſſione per $z^{r:s-p:q-1}dz$, e integrando il prodotto, ſi avrà

$$\frac{nqs(a+bx)z^{r:s+x}}{(m+nx)(p+qx)(r+sx)}$$

e così ſucceſſivamente operando, ſi perverrà alla forma

$$\frac{(a+bx)nqs\ldots.\phi\omega z^{\Delta:\alpha+x}}{(m+nx)(p+qx)(r+sx)\ldots..(\Delta+\omega x)}$$

Fatta per tanto la divisione per $nqs\ldots.\phi\omega$, e sostituendo l' unità in luogo di z, si avrà il termine generale conosciuto della serie (Y). Il che dovea dimostrarsi.

PROBLEMA XIII.

Sommare le Serie (Y) del Teorema precedente

Risoluzione.

Si metta il termine generale (M) sotto la forma differenziale (N)

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\alpha-\mu:\tau-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{p:q-a:b}\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+\varkappa-1}dz}{1-z}\right)$$

$$\frac{-1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\alpha-\mu:\tau-1}dz\ldots.\text{ecc.}\int z^{p:q-a:b}\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+\varkappa}dz}{1-z}\right)$$

$\ldots\ldots\ldots(N)$

posta l' unità in luogo di x nel primo termine, si sottragga dalla quantità, che ne risulta il secondo termine dell' espressione (N); Si avrà la formula $(\mathfrak{Q})$

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\alpha-\mu:\tau-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-a:b}\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\right)$$

$\ldots\ldots\ldots(\mathfrak{Q})$

che farà la somma generale ricercata. Il che ecc.

Corollario.

In questa guisa si potranno sommare le altre Classi di Serie aventi al numeratore un numero qualunque di

fattori. Imperciocchè, determinata che sia la funzione Z per n fattori al numeratore, secondo ciò che s' è detto nel II Corollario del II Teorema, si ricaverà dal III Teorema il termine generale corrispondente, e in seguito la somma generale, senza che mi diffonda maggiormente in questo luogo.

ESEMPJ.

Per facilitare l' intelligenza del metodo addurremo quì due esempj.

I.

Sia da sommarsi la serie

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}\cdots\cdots+\frac{1}{x(3+x)}$$

Si tragga dall'espressione generale della Prop. XI. li due ultimi integrali a cagione dei due fattori al denominatore della serie proposta, cioè

$$\frac{A}{nq}\int z^{\overline{p:q-m:n-1}}dz\int z^{\overline{m:n}}dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)$$

E poichè $A=1$, $m=0$, $n=q=1$, $p=3$, l'espressione della somma diverrà

$$\int z^{\overline{2}}dz\int dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)=\frac{1}{3}\int\left((1-z^3)dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)\right)$$

Ma questa formula, fatto $z=1$ dopo l'integrazione, diventa l'espressione algebraica (Q)

$$\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(2+x)}+\frac{1}{3(3+x)}\right)\cdots\cdots(Q)$$

e però (Q) è la somma generale dimandata. Facendo per tanto $x=\infty$, sarà $\frac{11}{18}$ la somma della serie all'infinito.

II.

Sia da ſommare la ſerie

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{7.8}\ldots\ldots+\frac{1}{(-2+3x)(-1+3x)}$$

Eſſendo $A=1$, $m=-2$, $n=3$, $p=-1$, $q=3$, l'eſpreſſione generale dell'eſempio precedente diventa

$$\frac{1}{9}\int z^{-2:3}dz\int z^{-2:3}dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{(1-z^{1:3})(1-z^x)z^{-2:3}dz}{1-z}$$

di cui l'integrale dipende manifeſtamente dalle quadrature note. E volendo la ſomma della ſerie all'infinito, ſi ponga $x=\infty$; la formula precedente ſi cangia in queſta

$$\frac{1}{3}\int z^{-2:3}dz\left(\frac{1-z^{1:3}}{1-z}\right)=\int\frac{dy}{1+y+y^2}$$

facendo $z^{1:3}=y$. Per conſeguenza la ſomma della ſerie all'infinito = Arc. 40° di un cerchio avente $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ per raggio.

SCOLIO.

E' noto, che queſta ſorta di ſerie va bene ſpeſſo unita con qualche ſerie geometrica, e che non è ſempre poſſibile di eſprimere le ſomme con formule eſponenziali. Un ſolo Problema generale baſterà, come mi ſembra, per indicare la ſtrada, che convien tenere in caſo che queſte ſerie non ammettano altra ſomma, che traſcendente.

PROBLEMA XIV.

Sommare le ſerie (I)

$$\frac{K^{a+b}}{(m+n)(p+q)\ldots(\Delta+\omega)} + \frac{K^{a+2b}}{(m+2n)(p+2q)\ldots(\Delta+2\omega)} \ldots\ldots \frac{K^{a+bx}}{(m+nx)(p+qx)\ldots(\Delta+\omega x)}$$
$$\ldots\ldots (I)$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo l'eſpreſſione (*M*)

$$\frac{1}{nqs\ldots\Phi\omega}\int z^{\Delta;\omega-\mu;\rho-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{r;s-p;q-1}dz\int z^{p;q-m;n-1}dz\int z^{m;n+\kappa-1}K^{a+b\kappa}dz$$
$$\ldots\ldots (M)$$

il termine generale delle ſerie (*I*) (*Teorema I. del preſ. Cap.*), il ſi metta ſotto la forma differenziale (*N*)

$$\frac{1}{nqs\ldots\Phi\omega}\int z^{\Delta;\omega-\mu;\rho-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m;n+\kappa-1}K^{a+b\kappa}dz}{1-K^{b}z}$$
$$-\frac{1}{nqs\ldots\Phi\omega}\int z^{\Delta;\omega-\mu;\rho-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m;n+\kappa}K^{a+b(\kappa+1)}dz}{1-K^{b}z}$$
$$\ldots\ldots (N)$$

E poſta poi l'unità in luogo di κ nel primo termine, dal che riſulta la quantità

$$\frac{1}{nqs\ldots\Phi\omega}\int z^{\Delta;\omega-\mu;\rho-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m;n}K^{a+b}dz}{1-K^{b}z}$$

ſi ſottragga il ſecondo termine da queſt'eſpreſſione; ſarà la differenza (Q)

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:u-\mu:t-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{p:q-m:n-1}dz\int\frac{z^{m:n}K^{a:b}dz(1-K^{b:x}z^{x})dz}{1-K^{b}z}$$

. . . . . (Q)

La somma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO

Se la Serie aveſſe de' fattori al numeratore, ſi potrebbe nello ſteſſo modo ſommarla, ricavando i termini generali convenienti da' Teoremi, che abbiamo premeſſo; il che non ha biſogno di eſſere eſemplificato.

SCOLIO.

Ma non è poi fuor di propoſito, che ſi prendano qui per mano le ſerie Reciproche de' numeri naturali ſeparatamente, ancorchè non ſieno elle che puri caſi particolari delle ſerie generali, onde abbiamo aſſegnato la ſomma in queſto Capitolo ſotto forme traſcendenti. Ne daremo pertanto due eſpreſſioni differenti, una delle quali ci appartiene in particolare, ſiccome può vederſi nel Libro, che abbiamo mentovato nell' introduzione del Capitolo, e l' altra è del pari tratta direttamente da' principj di queſta Memoria, ma coincide, quanto al finale riſultamento, con quella che ha trovato il Sig. *Eulero* per diverſa via, e pubblicato nel VI Vol. de' primi Com. dell' Accademia di S. Pietroburgo.

PROBLEMA XV.

Sommare le ſerie Reciproche de' numeri naturali

$$1+\frac{1}{2^{n}}+\frac{1}{3^{n}}+\frac{1}{4^{n}}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{1}{x^{n}}$$

RISOLUZIONE.

Se nell' espressione (*M*) del Termine generale (*Prop. XIV.*) si faccia m, p ecc. μ, $\Delta = 0$; n, q, s ecc. ... ϕ, $\omega = 1$; $K = 1$; il termine generale di queste serie prenderà la forma seguente

$$\int dz : z \ldots . \int dz : z \int dz : z \int dz : z \int z^{x-1} dz$$

e la somma generale la seguente

$$\int dz : z \ldots . \int dz : z \int dz : z \int dz : z \int dz \left(\frac{1 - z^x}{1 - z} \right)$$

prendendo altrettanti integrali da destra a sinistra, quante sono le unità in u. Per conseguenza la somma all' infinito di tutte queste serie sarà manifestamente

$$\int dz : z \ldots . \int dz : z \int dz : z \int dz : z \int dz : (1 - z)$$

Il che ecc.

PROBLEMA XVI.

Sommare direttamente le serie Reciproche de' numeri naturali.

RISOLUZIONE.

Essendo $\int z^{x-1} dz \left(l. \frac{1}{z} \right)^{u-1} = \frac{1.2.3 \ldots . (u-1)}{x^u}$ nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione, siccome è dimostrato nel Calcolo Integrale, l' espressione

$$\frac{1}{1.2.3 \ldots . (u-1)} \int z^{x-1} dz \left(l. \frac{1}{z} \right)^{u-1} = \frac{1}{x^u}$$

sarà il termine generale di queste serie. Le si dia la forma differenziale (*N*)

$$\frac{1}{1.2.3...(u-1)}\int\frac{z^{x-1}dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}}{1-z} - \frac{1}{1.2.3...(u-1)}\int\frac{z.z^{x-1}dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}}{1-z} \ldots (N)$$

Si metta in seguito l'unità in luogo di x nel primo termine, e si sottragga il secondo dalla quantità che risulta da quella sostituzione. La differenza (Ω).

$$\frac{1}{1.2.3...(u-1)}\int dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right) \ldots (\Omega)$$

sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

Corollario.

Sarà dunque nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione.

$$1.2.3...(u-1)\int dz:z...\int dz:z\int\frac{dz}{1-z} = \int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}$$

$$1.2.3...(u-1)\int dz:z...\int dz:z\int dz:z\int\frac{dz(1-z^x)}{1-z}$$

$$= \int\left(dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)\right)$$

Scolio.

E perchè non s'abbia a ricorrere a quel mio libro per avere le somme all'infinito d'un certo numero di queste serie reciproche de' numeri naturali, non sarà inutile per le occorrenze, che qui pure si registrino, come le ho ivi accuratamente determinate.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\text{ecc.}\ldots=.\ 6931471$$

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\text{ecc.}\ldots=.\ 8224670$$

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{6^3}+\text{ecc.}\ldots=.\ 9016769$$

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\text{ecc.}\ldots=.\ 9470327$$

$$1-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}-\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{6^5}+\text{ecc.}\ldots=.\ 9722291$$

$$1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}-\frac{1}{6^6}+\text{ecc.}\ldots=.\ 9855511$$

$$1-\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}-\frac{1}{4^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{6^7}+\text{ecc.}\ldots=.\ 9926366$$

$$1-\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}-\frac{1}{6^6}+\text{ecc.}\ldots=.\ 9962322$$

$$1-\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}-\frac{1}{4^9}+\frac{1}{5^9}-\frac{1}{6^9}+\text{ecc.}\ldots=.\ 9981151$$

$$1-\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}-\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}-\frac{1}{6^{10}}+\text{ecc.}\ldots=.\ 9990368$$

$$1-\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}-\frac{1}{4^{11}}+\frac{1}{5^{11}}-\frac{1}{6^{11}}+\text{ecc.}\ldots=.\ 9995089$$

$$1-\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}-\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}-\frac{1}{6^{12}}+\text{ecc.}\ldots=.\ 9997928$$

ecc.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\text{ecc...}=\infty$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\text{ecc...}=1.\ 6449340$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\text{ecc...}=1.\ 2022358$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\text{ecc...}=1.\ 0823231$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{6^5}+\text{ecc...}=1.\ 0370444$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+\text{ecc...}=1.\ 0173431$$

$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{6^7}+\text{ecc...}=1.\ 0083927$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+\text{ecc...}=1.\ 0040766$$

$$1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{39}+\frac{1}{4^9}+\frac{1}{5^9}+\frac{1}{6^9}+\text{ecc...}=1.\ 0020292$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{6^{10}}+\text{ecc...}=1.\ 0009918$$

$$1+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{4^{11}}+\frac{1}{5^{11}}+\frac{1}{6^{11}}+\text{ecc...}=1.\ 0004859$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{6^{12}}+\text{ecc...}=1.\ 0002320$$

ecc...

CAPITOLO SESTO.

DELLE SERIE A FATTORI CRESCENTI.

LE Serie a fattori crescenti formano una Classe di progressioni sommamente estesa, ed utile bastevolmente per aver luogo in queste Ricerche a fianco delle Serie più note, e maneggiate da' Geometri. Tutto ciò, che ne sapevamo prima del Sig. *Eulero* consisteva per verità in puri casi particolari svolti cogli artifizj del calcolo. Egli è il primo, che additò la strada di assegnare a' loro termini generali espressioni trascendenti nel V. Vol. de' primi Com. di S. Pietroburgo. Non mancò in seguito di fare un tentativo intorno alle loro Somme nel VI. Vol. de' medesimi Com. mettendole sotto forme differenziali con un metodo non ignoto, se si vuole, a due grandi uomini, che il precedettero (*veggasi il Com. Epist. tra Leibnitz e Bernoulli Tom.* 1.), ma non ancora perfezionato, nè spinto tant' oltre. Ancorchè cresca il grado dell' equazione differenziale, augmentandosi il numero de' fattori ne' termini successivi, e le indeterminate non vi si lascino separare, di modo che non è opera comune l' integrazione che resta da affrontare, le ha ridotte almeno quell' uomo incomparabile a forme conosciute e familiari. Dopo di lui non è a mia cognizione, che sia stato fatto alcun passo notabile di più. Vo' credere pertanto, che non sia per dispiacere a' Geometri il vedere sottomesse coll' altre anche le Somme di queste serie alla semplicità de' nostri principj.

PROBLEMA XVII.

Trovare la ſomma generale della ſerie (*I*)
$1+1.2+1.2.3+1.2.3.4+$ ecc..... $1.2.3...x....$ (*I*)

RISOLUZIONE.

Poichè l'eſpreſſione integrale $\int dz(-l.z)^x$ è il termine generale di queſta ſerie (*V. Vol. de'vecchj Com. di S. Pietrob.*), le ſi dia la forma differenziale (*N*).

$$\int \frac{dz(-l.z)^{x+1}}{-1-l.z} - \int \frac{dz\,(-l.z)^x}{-1-l.z} \ldots\ldots (N)$$

Poſta pertanto l'unità in luogo di x nel ſecondo termine, eſſendo creſcente la ſerie, ſi ſottragga la quantità riſultante dal primo termine dell'eſpreſſione (*N*). La differenza (*Q*)

$$\int \frac{dz\,l.z\left((-l.z)^x-1\right)}{1+l.z} \ldots\ldots (Q)$$

farà la ſomma ricercata della ſerie (*I*), poſto $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

SCOLIO.

Il metodo è ſommamente ſemplice, e ſingolarmente quando ſi tratti di ſerie, nelle quali il numero de' fattori ne' termini ſucceſſivi va creſcendo ſecondo una data legge, come ſarebbe

$$1+1.2.3+1.2.3.....5+1.2.3.....7 \ldots\ldots + 1.2.3.... \overline{2x-1}$$

$$1+1.2....6+1.2....11+1.2....16.....+1.2.3....\overline{5x-4}$$

Se i fattori creſcono ſecondo il numero intiero m, il metodo del Sig. *Eulero* (*Vol. VI. de' med. Com.*) porta neceſſariamente a equazioni differenziali del grado m, come il teſtifica egli medeſimo alla pag. 87. *De quo no-*

tandum eſt, tot ſemper in æquatione reſultante ſigna integralia ſibi invicem eſſe juncta, quot ſunt factores, quibus ſequens quiſque terminus augetur. Nel noſtro metodo all'oppoſito non entrano equazioni differenziali da integrare con le indeterminate meſcolate inſieme, ma ſi perviene direttamente all'eſpreſſione della ſomma: Il che potrebbe aprire un campo a qualche utile ſpeculazione nel calcolo integrale combinando i due metodi. Eccone un eſempio.

PROBLEMA XVIII.

Sommare la ſerie (*R*)

$$1.2.3.....\overline{a+b}+1.2.3.....\overline{a+2b}.....+1.2.3....\overline{a+bx}.....(R)$$

Risoluzione.

Eſſendo $\int dz(-l.z)^x$ il termine generale della ſerie de' fattori creſcenti conſecutivi (*Prop. precedente*) è manifeſto, che mettendo $a+bx$ in luogo di x, l'eſpreſſione (*M*)

$$(M)\ .....\ \int dz\,(-l.z)^{a+bx}$$

ſarà il termine generale della ſerie (*R*). La ſi metta ſotto la forma differenziale (*N*)

$$\int \frac{dz\,(-l.z)^{a+b(x+1)}}{(-l.z)^b-1} - \int \frac{dz(-l.z)^{a+bx}}{(-l.z)^b-1}.....(N)$$

Poſto pertanto $x=1$ nel ſecondo termine di queſt'eſpreſſione, ſi ſottragga dal primo la quantità che ne riſulta, e la differenza

$$\int \frac{dz\,(-l.z)^{a+b}\left((-l.z)^{bx}-1\right)}{(-l.z)^b-1}$$

ſarà, nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione, la ſomma generale della ſerie (*R*). Il che ecc.

PROBLEMA XIX.

Sommare la ſerie (*M*)

$$K^{a+b}+1.2K^{a+2b}+1.2.3K^{a+3b}.....+1.2.3...xK^{a+bx}...(M)$$

Risoluzione.

Eſſendo $\int dz(-l.z)K^{a+bx}$ il termine generale di queſta ſerie, con un' operazione ſimile alla precedente ſi troverà, che l'eſpreſſione

$$\int \frac{dz\, l.z\, K^{a+b}\left(K^{bx}(-l.z)^{x}-1\right)}{1+K^{b}l.z}$$

nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione, è la ſomma generale della ſerie (*M*). Il che ecc.

PROBLEMA XX.

Sommare la ſerie

$$\frac{1}{K^2}-\frac{1.2}{K^3}+\frac{1.2.3}{K^4}-\text{ecc.}\ldots\pm\frac{\varepsilon}{K^{x+1}}(1.2.3\ldots.x)$$

Risoluzione.

Eſſendo dimoſtrato (*Vol. XIX. de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 74) che nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione, avendo luogo il ſegno poſitivo ſe ſia x numero pari, e il negativo ſe ſia x impari,

$$\int z^{u}dz(l.z)^{x}=\pm\frac{1}{(u+1)^{x+1}}(1.2.3.....x)$$

ſe ſi ponga $K-1$ in luogo di u, è manifeſto, che l'eſpreſſione (*M*)

$$\int z^{K-1}dz(l.z)^{x}\ .\ .\ .\ .\ .\ (M)$$

sarà il termine generale della proposta serie. Il si metta pertanto sotto la forma differenziale (*N*)

$$\int \frac{z^{K-1}dz\,(l.z)^{x}}{1-l.z} - \int \frac{z^{K-1}dz\,(l.z)^{x+1}}{1-l.z} \quad \ldots (N)$$

e si faccia $x=1$ nel primo membro. Dopo questo si sottragga il secondo dalla quantità che risulta da quella sostituzione, e la differenza

$$\int \frac{dz\left(1-(l.z)^{x}\right)z^{K-1}\,l.z}{1-l.z}$$

sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA I.

La formula integrale $\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}$, *nel caso di* $z=1$ *dopo l'integrazione, è il termine generale della serie* (*R*)

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1.2}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{1.2.3}{(m+1).....(m+4)} + \text{ecc.} \ldots\ldots (R)$$

Si vegga il V. Vol. de' vecchj Com. di S. Pietrob. pag. 41

COROLLARIO.

Si dimostrerebbe nello stesso modo, che la formula

$$\frac{1}{q^{x}}\int z^{p:q}dz\,(1-z)^{x-1}$$

è il termine generale della serie

$$\frac{1}{p+q} + \frac{1}{(p+q)(p+2q)} + \frac{1.2}{(p+q)....(p+3q)} + \text{ecc.}$$

e che

$$(K:q)^{x}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}$$

è il termine generale delle ferie

$$\frac{K}{p+q}+\frac{1.K^2}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1.2K^3}{(p+q)....(p+3q)}+\text{ecc.}$$

PROBLEMA XXI.

Trovare la Somma generale della Serie (R)

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.3}{(m+1)....(m+3)}+\text{ecc.}....(R)$$

RISOLUZIONE.

Poichè $\int z^m(1-z)^{x-1}$ è il termine generale della Serie (*Teor. preced.*), il si metta sotto la forma differenziale (N)

$$(A)\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}-(B)\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}...(N)$$

ch' è equivalente, giacchè essendo $\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}$

$=\frac{x}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$ nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, e $\frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$

$=\int z^m dz(1-z)^{x-1}$, farà $(A)-(B)$

$=\left(1-\frac{x}{m+x}\right)\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$

$=\frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}=\int z^m dz(1-z)^{x-1}$.

Si faccia per tanto $x=1$ nel primo membro (A), dal che

che si ha integrando $\frac{z^m}{m}$, e si sottragga da $\frac{z^m}{m}$ il secondo termine (B). La differenza nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, cioè

$$\frac{1}{m} - \int z^{m-1} dz(1-z)^x$$

sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

Corollario I.

Similmente ponendo il termine generale

$$\frac{1}{q^x}\int z^{p:q} dz(1-z)^{x-1}$$

sotto questa forma differenziale

$$\frac{1}{q^x}\int \frac{qz^{p:q} dz(1-z)^{x-1}}{q-1+z} - \frac{1}{q^x}\int \frac{qz^{p:q} dz(1-z)^x}{q-1+z}$$

la quale coincide con questa

$$\frac{1}{q^x}\int \frac{qz^{p:q} dz(1-z)^{x-1}}{q-1+z} - \frac{1}{q^x}\int \frac{qz^{p:q} dz(1-z)^{x-1}(1-z)}{q-1+z}$$

col metodo solito si ricaverà l' espressione seguente

$$\frac{1}{q^x}\int \frac{z^{p:q} dz\left(q^{x-1} - (1-z)^{x-1}\right)}{q-1+z}$$

la quale nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione sarà la somma generale della serie

$$\frac{1}{p+q} + \frac{1}{(p+q)(p+2q)} + \frac{1.2}{(p+q)\ldots(p+3q)} + \text{ecc.}$$

COROLLARIO II.

Nello ſteſſo modo ſi troverà eſſere

$$K{:}q^{x}\int\frac{z^{p:q}dz\left(q^{x-1}-(K-Kz)^{x-1}\right)}{q-K+Kz}$$

la ſomma generale della ſerie di cui è termine generale

$$\left(\frac{K}{q}\right)^{x}\int z^{q:q}dz(1-z)^{x-1}$$

TEOREMA II.

La forma (M')

$$\frac{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}}{(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}}-\frac{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}}{(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x}}$$

$$\ldots\ldots(M')$$

nel caſo di $z=1$ *dopo l'integrazione ſi riduce alla forma* (M)

$$\frac{\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{p}dx(1-z)^{x-1}}\ldots\ldots(M)$$

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo per le regole di riduzione del calcolo integrale nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione

$$m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}=\frac{mx}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$$

$$(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x}=\frac{(m-p-1)x}{p+x+1}\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}$$

la forma (M') ſi riduce manifeſtamente a queſta

$$\frac{\frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}}$$

Ma per le medeſime regole

$$\int z^{m}dz(1-z)^{x-1} = \frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$$

Dunque la forma (M') ſi riduce alla forma (M). Il che ecc.

PROBLEMA XXII.

Sommare la ſerie (R)

$$\frac{p+1}{m+1}+\frac{(p+1)(p+2)}{(m+1)(m+2)}+\frac{(p+1)\ldots(p+3)}{(m+1)\ldots(m+3)}+\text{ecc.}\ldots.(R)$$

RISOLUZIONE.

La formula $\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}$ è il termine generale della ſerie

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.2}{(m+1)\ldots(m+3)}+\text{ecc.}\ldots.(A)$$

per il I. *Teorema*; e per conſeguenza la formula $\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}$ è il termine generale della ſerie

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\frac{1.2}{(p+1)\ldots(p+3)}+\text{ecc.}\ldots.(B)$$

Dunque, dividendo per ordine il termine x^{mo} della ſerie (A) pel termine x^{mo} della ſerie (B), l'eſpreſſione (M)

$$\frac{\int^{m} z\, dz(1-z)^{x-1}}{\int^{p} z\, dz(1-z)^{x-1}}$$

diventa neceſſariamente il termine generale della ſerie (R). Gli ſi dia pertanto la forma differenziale equivalente (M) del II. *Teorema*; e ſoſtituendo poſcia l'unità in luogo di x nel primo termine, ſi ſottragga il ſecondo dalla quantità riſultante, e la differenza

$$\frac{p+1}{m-p-1} - \frac{m\int^{x} z^{m-1} dz(1-z)^{x}}{(m-p-1)\int^{x} z^{p} dz(1-z)^{x}}$$

farà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA III.

La forma (N)

$$\frac{(m+x+2)\int^{x+1} dz(-l.z)^{x+1}}{m\int^{m-1} z\, dz(1-z)^{x+1}} - \frac{(m+x+1)\int^{x} dz(-l.z)^{x}}{m\int^{m-1} z\, dz(-z)^{x}}$$

$\ldots\ldots\ldots(N)$

nel caſo di $z=1$ *dopo l'integrazione, ſi riduce alla forma* (M)

$$\frac{(m+x+1)\int^{x} dz(-l.z)^{x}}{\int^{m} z\, dz(1-z)^{x}} \ldots\ldots(M)$$

DIMOSTRAZIONE.

Poichè per le riduzioni del Calcolo Integrale

$$\int dz(-l.z)^{x+1} = z(-l.z)^{x+1} + \frac{}{x+1}\int dz(-l.z)^{x}$$

$$\int z^{m-1}dz(1-z)^{x+1} = \frac{z^{m}(1-z)^{x+1}}{m+x+1} + \frac{x+1}{m+x+1}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}$$

nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione, la forma (N) diventa manifestamente

$$\frac{(m+x+1)(m+x+2)\int dz(-l.z)^{x}}{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}} - \frac{(m+x+1)\int dz(-l.z)^{x}}{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}}$$

Ma $m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x} = (m+x+1)\int z^{m}dz(1-z)^{x}$,

per le stesse riduzioni. Per conseguenza la forma (N) si riduce evidentemente alla forma (M). Il che ecc.

PROBLEMA XXIII.

Sommare la Serie (R)

$$(m+1)(m+2)^{2} + (m+1)(m+2)(m+3)^{2} + (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)^{2} + \text{ecc.} \ldots . (R)$$

RISOLUZIONE.

L' espressione $\int dz(-l.z)^{x}$ è il termine generale della serie

$$1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2\ldots 4 + 1.2\ldots . 5 + \text{ecc.}\ldots . (\textit{Prop. XVII});$$

e l' espressione $\int z^m dz(1-z)^x$ è il termine generale delle serie

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1.2}{(m+1)...(m+3)} + \frac{1.2.3}{(m+1)....(m+4)} + \text{ecc. } (Teor.\ I.)$$

dunque la formula

$$\frac{\int dz(-l.z)^x}{\int z^m dz(1-z)^x}$$

è il termine generale della serie

$(m+1)(m+2)+(m+1)(m+2)(m+3)+(m+1)...(m+4)+$ ecc.

Per conseguenza la formula (M) del Teor. precedente è il termine generale della serie proposta (R). Il si metta per tanto sotto la forma differenziale (N) del medesimo Teorema, e posta l' unità in luogo di x nel secondo termine, si sottragga la quantità risultante dal primo.

La differenza

$$\frac{(m+x+2)\int dz(-l.z)^{x+1}}{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x+1}} - (m+1)(m+2)$$

Nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

SCOLIO.

Le Propos. precedenti non abbracciano tutto ciò che può ricercarsi in questa classe di serie. Per la qual cosa mi fo a risolvere le seguenti generalissime. I Teoremi, coll' ajuto de' quali ho superato la difficoltà di risolverle, meritano, a quello che mi pare, l' attenzione de' Geometri.

TEOREMA IV.

Nel caso di $z=1$ *dopo l' integrazione la formula* (M)

$$\frac{1}{q\left(z^{p:q+1}e^{1:qz}\right)}\int\left(z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}\right)\left(p+q(x+1)-z^{-1}\right)$$

$$\ldots\ldots(M)$$

è uguale all' unità, essendo e *il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico.*

DIMOSTRAZIONE.

Si divida la formula (M) in due facendo per maggior semplicità $\Delta=\frac{1}{z^{p:q+1}e^{1:qz}}$. Ella diverrà

$$\Delta\int\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}-\Delta\int\frac{z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}}{q}$$

Ora, esprimendo $\delta.$ una differenziazione ordinaria, farà

$$\delta.\left(z^{p:q+x+1}e^{1:qz}\right)=\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}$$

$$-\frac{1}{q}z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}$$

Per conseguenza, integrando, sara

$$\frac{1}{q}\int z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}=-z^{p:q+x+1}e^{1:qz}$$

$$+\frac{p+q(x+1)}{q}\int z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}$$

$$e\ \Delta\Big(\int\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}$$
$$-\int\frac{z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}}{q}\Big)=$$
$$\frac{\Delta}{q}\int\Big(z^{p:q+x}dz\,.\,e^{1:qz}\Big)\big(p+q(x+1)-z^{-1}\big)$$
$$=\Delta z^{p:q+x+1}e^{1:qz}=z^{x}=1,$$

sostituendo l' unità il luogo di z. Il che ecc.

Corollario.

Nello stesso modo si proverà, che

$$\frac{1}{q\big(z^{p:q}e^{-z:q}\big)}\int z^{p:q+x}e^{-z:q}dz\big((p+qx)z^{-1}-1\big)=z^{x}=1$$

nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione.

TEOREMA V.

Nel caso di $z=1$ *dopo l' integrazione*

$$\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int\overline{\big(p+qx.z^{-1}-(m+nx+n)\big)}z^{p:q+x}dz(q-nz)^{m:n-p:q}=1$$

Dimostrazione

Si supponga per semplicità $\mu=\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}$, $\Delta=m:n-p:q$, e si divida la formula in due, come segue

$$(A)\ (p+qx)\,\mu\int z^{p:q+x-1}\overset{\Delta}{dz}(q-nz)$$
$$-(B)\ (m+nx+n)\,\mu\int z^{p:q+x}\overset{\Delta}{dz}(q-nz)$$

Ora,

Ora, essendo per le riduzioni del calcolo integrale,

$$\int z^{p:q+x}dz\,(q-nz)^{\Delta} = -\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{(p:q+x+\Delta+1)n}$$

$$+\frac{p+qx}{(p:q+x+\Delta+1)n}\int z^{p:q+x-1}dz\,(q-nz)^{\Delta}$$

$$= -\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{m+nx+n} + \frac{p+qx}{m+nx+n}\int z^{p:q+x-1}dz(q-nz)^{\Delta}$$

farà

$$\int z^{p:q+x-1}dz(q-nz)^{\Delta} = \frac{m+nx+n}{p+qx}\int z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta}$$

$$+\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{p+qx}$$

e però $(A)-(B)=z^{x}=1$, sostituendo l'unità in luogo di z. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Essendo dimostrato (*Vol. V. de' primi Com. di S. Pietrob.*), che la forma

$$\frac{q^{x+1}\int dz\,(-l.z)^{x}}{\left(p+q(x+1)\right)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}} = K$$

è il termine generale della serie (2)

$p+q+(p+2q)+(p+q)\ldots(p+3q)$ ecc..... $(p+q)\ldots(p+qx)\ldots$ (2)

nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione, ed essendo dimostrato prefentemente, che nel medesimo caso la forma (M) del IV *Teorema* è uguale all'unità, egli è manifesto, che

$$K = \frac{1}{q\left(z^{p:q+1}-e^{1:qz}\right)}\int z^{p:q+x}Ke^{1:qz}dz\left(p+q(x+1)-z^{-1}\right)$$

. . . . . (P)

mentre per una parte K non è variabile, per quello che rappresenta il valore di

$$\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}$$

dopo l'integrazione, e la fostituzione dell'unità in luogo di z; e per l'altra la formula (M) nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione non è che l'unità, come il fi è dimostrato; e però la forma (P) non esprime, che il termine generale della ferie $(\mathfrak{Q})$ trasformato.

Corollario II.

Similmente, essendo la formula

$$\frac{(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}} = K'$$

il termine generale della ferie reciproca

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1}{(p+q)\ldots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

combinando questa forma con quella del *Coroll.* dopo il IV. *Teorema*, farà per la stessa ragione

$$K'=\frac{1}{q\left(z^{p:q}e^{-z:q}\right)}\int z^{p:q+x}K'e^{-z:q}dz\left((p+qx)z^{-1}-1\right)^{x}\ldots(\mathfrak{Q}')$$

Corollario III.

E per fine, essendo l'espressione

$$\frac{n(p+qx+q)\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}}{q(m+nx+n)\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}} = K''$$

il termine generale della ferie

$\frac{m+n}{p+q} + \frac{(m+n)(m+2n)}{(p+q)(p+2q)} - \frac{(m+n)\ldots(m+3n)}{(p+q)\ldots(p+3q)}$ ecc.

combinando quella forma con quella del V. *Teorema*, farà

$$K' = \frac{1}{z^{p:q}\left(q-nz\right)^{\Delta+1}} \int \left((p+qx)z^{-1} - (m+nx+n)\right) z^{p:q+x} K' dz\,(q-nz)^{\Delta} \ldots (R)$$

PROBLEMA XXIV.

Sommare la ſerie

$p + q + (p+q)(p+2q) + (p+q)\ldots(p+3q) + \text{ecc.}$

RISOLUZIONE.

Eſſendo, per le regole di riduzione del calcolo integrale, nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione

$$q \int_{z}^{x+1} dz(-l.z)^{x} = xq \int_{z}^{x+1} dz(-l.z)^{x-1}$$

$$(p+q(x+1)) \int_{z}^{p:q} dz(1+z)^{x} = qx \int_{z}^{p:q} (dz(1-z)^{x-1}$$

il termine generale (*P*) (*Coroll.* I.) prende la ſeguente forma

$$\frac{1}{q\left(z^{p:q+1}\, c^{1:qz}\right)} \int \left\{ z^{p:q}\, c^{1:qz}\, dz \left(\frac{}{p+q.x+1}\, z^{x} \frac{q^{x+1} \int dz(-l.z)^{x}}{\left(p+q(x+1)\right) \int z^{p:q} dz(1-z)^{x}} \right.\right.$$

$$\left.\left. -(p+qx)\, z^{x-1} \frac{q \int_{z}^{x} dz(-l.z)^{x-1}}{(p+qx) \int_{z}^{p:q} dz(1-z)^{x-1}} \right) \right\}$$

Il ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale (*N*)

$$(A) \Delta \int z^{p:q}\, c^{1:qz}\, dz \left(\frac{p+q.x+1}{q}\, z^{x} \frac{q^{x+1} \int dz(-l.z)^{x}}{\left(p+q(x+1)\right) \int z^{p:q} dz(1-z)^{x}} - \frac{p+q}{q} \right)$$

$$(B) - \Delta \int z^{p:q}\, c^{1:qz}\, dz \left(\frac{p+qx}{q}\, z^{x-1} \cdot \frac{q \int dz(-l.z)^{x-1}}{(p+qx) \int z^{p:q} dz(1-z)^{x-1}} - \frac{p+q}{q} \right)$$

. . . . . (*N*)

ma, posta l' unità in luogo di x nel secondo membro (B), secondo i nostri principj, tutto svanisce. Dunque il primo termine

$$(A)\ldots\frac{1}{z^{p:q+1}e^{1:qz}}\int z^{p:q}e^{1:qz}dz\Big(\frac{\overline{p+q.x+1}}{q}z^{x}\cdot$$

$$\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q.\overline{x+1})\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}\cdot\frac{p+q}{q}\Big)$$

sostituito il valore di Δ, sarà necessariamente la somma generale ricercata, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA XXV.

Sommare la serie Reciproca

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1}{(p+q)\ldots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

Attese le riduzioni mentovate nella Prop. preced. si trova facilmente, che il termine generale ($\mathfrak{Q}'$) (*Coroll. II Teor. V*) di questa serie prende la seguente forma, posto $\frac{1}{q\left(z^{p:q}e^{-z:q}\right)}=\Delta'$,

$$\Delta'\int\Big\{z^{p:q}e^{-z:q}dz\Big(\frac{(p+qx)z^{x-1}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}$$

$$-\frac{\overline{p+q.x+1}.z^{x}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}\Big)\Big\}$$

Le fi dia dunque la feguente forma differenziale,

$$(A)..\Delta^{1}\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x}.\frac{(p+q.\overline{x+1})\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}\right)$$

$$(B)..-\Delta^{1}\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x-1}.\frac{(p+qx)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}\right)$$

Ma, come nella Prop. preced., fe fi faccia $x=1$ nel fecondo termine (B), l' efpreffione fvanifce. Dunque il primo

$$(A)\frac{1}{q\left(z^{p:q}e^{-z:q}\right)}\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x}.\frac{p+q.\overline{x+1}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}\right)$$

farà la fomma generale dimandata nel cafo di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO.

La fomma pertanto della ferie all' infinito farà

$$\frac{1}{q\left(z^{p:q}e^{-z:q}\right)}\int z^{p:q}e^{-z:q}dz$$

effendo infinitamente piccolo il termine

$$\frac{(p+q.\overline{x+1}\int z^{p:q}dz(1-z)^{z}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}$$

nel cafo di $x=\infty$, e fvanendo nel medefimo tempo il fattore z^{∞} a cagione di z minore dell' unità prima dell' integrazione.

PROBLEMA XXVI.

Sommare la ſerie

$$\frac{m+n}{p+q}+\frac{(m+n)(m+2n)}{(p+q)(p+2q)}+\frac{(m+n)\ldots(m+3n)}{(p+q)\ldots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

Poichè per le regole di riduzione del calcolo integrale nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int z^{m:n}dz(p-qz)^{x-1}=\frac{m+nx+n}{nqx}\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}$$

$$\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x-1}=\frac{p+qx+q}{nqx}\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}$$

farà

$$\frac{n\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x-1}}{q\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x-1}}=\frac{n(p+qx+q)\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}}{q(m+nx+n)\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}}$$

Per conſeguenza il termine generale (*R*) (*Coroll. III Teor. V*) di queſta ſerie prende la ſeguente forma, poſto $\Delta=\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$,

$$\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q+x}dz(q-nz)^{\Delta}\left(m+nx\,.\,z^{-1}K'\right.$$

$$\left.-(m+nx+n)K''\right)$$

eſſendo K'' ciò che diventa K' (*Coroll. III*) mettendovi $x-1$ in luogo di x.

Il ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale, che ſegue

$$(A)..\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q}dz(q-nz)^{\Delta}\left(m+n-(m+nx+n)z^{x}K\right)$$

$$(B)...\frac{-1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q}dz(q-nz)^{\Delta}\left(m+n-(m+nx)z^{x-1}K\right)$$

e poichè, facendo $x=1$ nel fecondo membro (B), l'eſpreſſione ſvaniſce, egli è evidente, che il primo termine (A), foſtituiti i valori di K e Δ

$$(A)...\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int\left\{z^{p:q}dz(q-nz)^{m:n-p:q}\right.$$
$$\left.\left(m+n-(p+qx+q)z^{x}.\frac{n\int z^{p:q}dz(q-nz)^{x}}{q\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}}\right)\right\}$$

farà la ſomma generale ricercata nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

Corollario.

In conſeguenza, eſſendo la ſerie decreſcente, farà, per quello che s'è detto nel Coroll. della Prop. precedente, la ſomma all'infinito eſpreſſa in queſto modo

$$\frac{m+n}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int z^{p:q}dz(q-nz)^{m:n-p:q}$$

Scolio.

Sarebbe qui a propoſito l'applicare generalmente il metodo anche quando il numero de' fattori va creſcendo di un numero m maggiore dell'unità, come ſe n'è fatto menzione qui innanzi, e ſe n'è pure dato un eſempio (*Prop. XVIII*); ma penſo, che torni meglio ripigliare queſto ſoggetto in altra occaſione, ove farò vedere, che s'eſtende il metodo anche ai caſi ne' quali il numero m non è coſtante; il che non potrebbe farſi con alcun metodo conoſciuto; tanto più, che in

sì fatta ricerca s' offrono da considerare moltissimi importanti Teoremi di calcolo integrale, che non sono poi di questo luogo.

CAPITOLO SETTIMO.

DELLE SERIE LOGARITMICHE.

IL legame, che ha il calcolo integrale con le serie logaritmiche, e l'uso, che se ne può fare in moltissime occasioni, m'ha determinato a formarne una nuova Classe, e non senza frutto. Imperciocchè, mentre non avevamo altre forme per esprimere i termini generali delle serie a fattori crescenti, delle quali abbiamo trattato nel Capitolo precedente, fuorchè quelle che il Sig. *Eulero* ha pubblicato nel *V. Vol. de' Vecchj Com. di S. Pietrob.*, avremo quì un nuovo modo di esprimerli, che ho ricavato dalla considerazione delle serie logaritmiche, e insieme alcuni Teoremi non inutili al progresso dell' Analisi.

PROBLEMA XXVII.

Trovare la somma generale della serie

$l.2 + l.3 + l.4 + l.5 + \text{ecc.} \ldots\ldots l.\overline{x+1}$

RISOLUZIONE.

Essendo dimostrato nel *Vol. XIX de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 70, che

$$\int \frac{z^x dz}{l.z} = l.\overline{x+1} + \int \frac{dz}{l.z}$$

nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione, egli è manifesto che questa espressione rappresenta il termine generale della

della ferie. Si metta pertanto la formula $\int \frac{z^x dz}{l.\ z}$ sotto forma differenziale, come segue

$$(A)\int \frac{z^x dz}{(1-z)\,l.z} - (B)\int \frac{z^{x+1}dz}{(1-z)\,l.z}$$

e avendo sostituito l'unità in luogo di x nel termine (A), si sottragga dalla quantità che ne risulta $\int \frac{z dz}{(1-z)l.z}$ il secondo termine (B). Si avrà l'espressione

$$\int \frac{z dz\,(1-z^x)}{(1-z)\,l.z}$$

Ma il termine generale della serie è

$$\int \frac{z^x dz}{l.z} - \int \frac{dz}{l.z} \ldots\ldots (M)$$

Dunque la somma generale completa della serie sarà necessariamente

$$\int \frac{z dz\ (1-z^x)}{(1-z)\,l.z} - x\int \frac{dz}{l.z} = \int \frac{dz}{(1-z)l.z}\big(z(1-z^x)-x(1-z)\big)$$

nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

Corollario I.

Mettendo $p+qx-1$ in luogo di x nell'espressione (M), è manifesto che la formula

$$\int \frac{z^{p+qx-1}dz}{l.z} - \int \frac{dz}{l.z} = l.\ \overline{p+qx}$$

nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione, sarà il termine generale della serie

$$l.\ (p+q) + l.\ (p+2q) + l.\ (p+3q) + \text{ecc.}$$

Operando pertanto come s'è fatto nella Proposizione precedente, si troverà, che l'espressione

$$\int \frac{dz}{(1-z^q)\,l.z}\big(z^{p+q-1}(1-z^{qx}) - x(1-z^q)\big)$$

sarà la somma generale delle serie.

COROLLARIO II.

E poichè

$l.2+l.3+l.4+\text{ecc.}\ldots.l.(x+1)=l.\left(2.3.4\ldots(x+1)\right)$

$l.(p+q)+l.(p+2q)+l.(p+3q)+\text{ecc.}\ldots.l.(p+qx)$

$=l.\left((p+q.(p+2q)\ldots.(p+qx)\right)$

Se sia e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico, farà

$$\int\frac{dz}{(1-z)lz}\left(z\left(1-z^{x}\right)-x(1-z)\right)$$

$$(A)\ldots e \qquad =2.3.4\ldots.\overline{x+1}$$

$$\int\frac{dz}{(1-z^{q})lz}\left(z^{p+qx-1}\left(1-z^{qx}\right)-x\left(1-z^{q}\right)\right)$$

$$(B)\ldots e \qquad =(p+q)(p+2q)\ldots(p+qx)$$

e però (A), (B) faranno i termini generali delle serie

$2+2.3+2.3.4.+2.3.4.5.+\text{ecc.}$

$p+q+(p+q)(p+2q)+(p+q)(p+2q)(p+3q)+\text{ecc.}$

COROLLARIO III.

Paragonandoli dunque con quei del Sig. *Eulero* usati nel Cap. precedente (*Prop. XVII e Coroll. I del Teor. V*) avremo i seguenti Teoremi

$$e\int\frac{dz}{(1-z)lz}\left(z\left(1-z^{x}\right)-x(1-z)\right)=\int dz(-lz)^{x+1}$$

$$e\int\frac{dz}{(1-z^{q})lz}\left(z^{p+qx-1}\left(1-z^{qx}\right)-x\left(1-z^{q}\right)\right)=-\frac{q^{x+1}\int dz(-lz)^{x}}{(p+qx+q)\int z^{p+q}dz(1-z)^{x}}$$

nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione.

PROBLEMA XXVIII.

Sommare la ſerie

$$l.\frac{m+n}{p+q}+l.\frac{m+2n}{p+2q}+l.\frac{m+3n}{p+3q}+\text{ecc.}\ldots.l.\frac{m+nx}{p+qx}$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$(\mathfrak{Q})\ldots.\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{p+qx-1}-1\right)=l.(p+qx)$$

$$(\mathfrak{Q}')\ldots.\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{m+nx-1}-1\right)=l.(m+nx)$$

pel primo Coroll. della Prop. precedente, farà evidentemente

$$\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{m+nx-1}-z^{p+qx-1}\right)=l.\frac{m+nx}{p+qx}=(\mathfrak{Q}')-(\mathfrak{Q})$$

Ma per lo ſteſſo Coroll. la ſomma generale della ſerie $(\mathfrak{Q})$ è

$$\int\frac{dz}{(1-z^q)l.z}\left(z^{p+q-1}\left(1-z^{qx}\right)-x\left(1-z^q\right)\right)\ldots.(R)$$

e la ſomma generale delle ſerie $(\mathfrak{Q}')$

$$\int\frac{dz}{(1-z^n)l.z}\left(z^{m+n-1}\left(1-z^{nx}\right)-x\left(1-z^n\right)\right)\ldots.(R')$$

Dunque $(R')-(R)$

$$=\int\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{m+n-1}\left(1-z^{nx}\right)}{1-z^n}-\frac{z^{p+q-1}\left(1-z^{qx}\right)}{1-z^q}\right)$$

farà la ſomma generale ricercata, nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che &cc.

COROLLARIO IV.

Sarà pertanto

$$e^{(R')-(R)} = \frac{m+n}{p+q} \cdot \frac{m+2n}{p+2q} \cdot \frac{m+3n}{p+3q} \cdots\cdots \frac{m+nx}{p+qx}$$

E comparando questo nuovo termine generale della serie

$$\frac{m+n}{p+q} + \frac{(m+n)(m+2n)}{(p+q)(p+2q)} + \frac{(m+n)\ldots(m+3n)}{(p+q)\ldots(p+3q)} + \text{ecc.}$$

con quello del Sig. *Eulero* usato nel *Cap. proced. Coroll. III del Teor. V* si avrà questo Teorema

$$e^{(R')-(R)} = \frac{n(p+qx+q)\int_{z}^{p:q} dz(n-nz)}{q(m+nx+n)\int_{z}^{m:n} dz(q-qz)}$$

nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione.

PROBLEMA XXIX.

Sommare la serie

$$l.\frac{(a+b)(c+e)}{(m+n)(p+q)} + l.\frac{(a+2b)(c+2e)}{(m+2n)(p+2q)} \cdots + l.\frac{(a+bx)(c+ex)}{(m+nx)(p+qx)}$$

RISOLUZIONE.

Essendo, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione,

$$(A)\ldots \int \frac{dz}{l.z}\left(z^{a+bx-1} - z^{m+nx-1}\right) = l.\frac{a+bx}{m+nx}$$

$$(B)\ldots \int \frac{dz}{l.z}\left(z^{c+ex-1} - z^{p+qx-1}\right) = l.\frac{c+ex}{p+qx}$$ (*Prop. precedente*)

Sarà $(A)+(B)=l.\frac{a+bx}{m+nx}+l.\frac{c+ex}{p+qx}=l.\frac{(a+bx)(c+ex)}{(m+nx)(p+qx)}$ il termine generale della propoſta ſerie.

Ma la ſomma generale della ſerie, di cui (A) è il termine generale, è di queſta forma

$$(P)...\int\left\{\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{a+b-1}\left(1-z^{bx}\right)}{1-z^{b}}-\frac{z^{m+n-1}\left(1-z^{nx}\right)}{1-z^{n}}\right)\right\}$$

e la ſomma generale della ſerie, che ha (B) per termine generale, è eſpreſſa così

$$(P')...\int\left\{\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{c+e-1}\left(1-z^{ex}\right)}{1-z^{e}}-\frac{z^{p+q-1}\left(1-z^{qx}\right)}{1-z^{q}}\right)\right\}$$

(*Prop. preced.*)

Per conſeguenza $(P)+(P')$ ſarà manifeſtamente la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO V.

Nello ſteſſo modo ſi troverebbe, che $(P)-(P')$ è la ſomma generale della ſerie

$$l.\frac{(a+b)(p+q)}{(c+e)(m+n)}+l.\frac{(a+2b)(p+2q)}{(c+2e)(m+2n)}+\text{ecc.}$$

COROLLARIO VI.

Così procedendo non ſarebbe difficile coſa il ritrovare le ſomme di queſte ſerie logaritmiche, qualunque ſi foſſe il numero de' fattori.

COROLLARIO VII.

E poichè, paſſando dai logaritmi ai numeri, ſi ha

$$e^{(P)+(P')} = \frac{(a+b)\ (c+e)}{(m+n)(p+q)} \cdot \frac{(a+2b)\ (c+2e)}{(m+2n)(p+2q)} \cdots \frac{(a+bx)\ (c+ex)}{(m+nx)(p+qx)}$$

farà $e^{(P)+(P')}$ il termine generale della ſerie

$$\frac{(a+b)(c+e)}{(m+n)(p+q)} + \frac{(a+b)\ (c+e)}{(m+n)(p+q)} \cdot \frac{(a+2b)\ (c+2e)}{(m+2n)(p+2q)} + \text{ecc.} \ldots\ldots (R)$$

Ma, ſecondo il Signor *Eulero*,

$$\frac{b(m+nx+n)\int z^{m:n}\,dz\,(b-bz)^{x}}{n(a+bx+b)\int z^{a:b}\,dz\,(n-nz)^{x}} = \mathfrak{Q}$$

è il termine generale della ſerie

$$\frac{a+b}{m+n} + \frac{(a+b)\,(a+2b)}{(m+n)\,(m+2n)} + \text{ecc., e}$$

$$\frac{e\,(p+qx+q)\int z^{p:q}\,dz\,(e-ez)^{x}}{q(c+ex+e)\int z^{c:e}\,dz\,(q-qz)^{x}} = \mathfrak{Q}'$$

è il termine generale della ſerie

$$\frac{c+e}{p+q} + \frac{(c+e)(c+2e)}{(p+q)(p+2q)} + \text{ecc.}$$

E però $\mathfrak{Q}\ \mathfrak{Q}'$ è il termine generale della ſerie (R). In conſeguenza ſi avrà queſto bel Teorema

$$e^{(P)+(P')} = \mathfrak{Q}\ \mathfrak{Q}'$$

nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione. E facendo $c=a$, $e=b$, $p=m$, $q=n$, farà

$$e^{2(P)} = \mathfrak{Q}^2$$
$$e^{3(P)} = \mathfrak{Q}^3$$
. . . . . .
$$e^{\Delta(P)} = \mathfrak{Q}^{\Delta}$$

PROBLEMA XXX.

Sommare le ſerie del Signor Eulero (Vol. XIX. de' nuovi Com. di S. Pietrob.)

$$l.2 + (l.3 - 2\,l.2) + (l.4 - 3\,l.3 + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}\,l.2)$$
$$+ (l.5 - 4\,l.4 + \frac{3\cdot 4\,l.3}{1\cdot 2} - \frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\,l.2) + \text{ecc.} \ldots . \quad (I)$$

RISOLUZIONE.

Avendo dimoſtrato queſto Geometra, che nel caſo di $z = 1$ dopo l'integrazione

$$\int \frac{(z-1)^x dz}{l.z} = l.(x+1) - \frac{x}{1}\,l.x + \frac{x.(x-1)}{1\cdot 2}\,l.(x-1)$$
$$- \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,l.(x-2)$$
$$+ \text{ecc.}$$

è manifeſto, che queſta formula è il termine generale della ſerie (I). La ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale

$$(A)\ \int\left(\frac{(z-1)^x dz}{(2-z)\,l.z}\right) - (B)\int\left(\frac{(z-1)^{x+1} dz}{(2-z)\,l.z}\right)$$

e avendo poſto l'unità in luogo di x nel termine (A), dalla quantità riſultante ſi ſottragga il ſecondo termine (B); l'eſpreſſione

$$\int \frac{(z-1)dz}{(2-z)l.z}\left(1-(z-1)^x\right)$$

farà, nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione, la somma generale della serie (I). Il che ecc.

PROBLEMA XXXI.

Sommare la serie

$l.\text{sen.}\,\Delta + l.\text{sen.}\,2\Delta + l.\text{sen.}\,3\Delta \ldots\ldots + l.\text{sen.}\,x\Delta$

RISOLUZIONE.

Essendo dimostrato nel medesimo luogo (*pag.* 86), che nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione

$$\int \frac{z^{n-\pi-1}+z^{\pi+u-1}}{1-z^{2n}} \cdot \frac{dz}{l.z} = l.\text{sen.}\frac{\pi(n-u)}{2n}$$

mentre sia π la circonferenza d'un cerchio, di cui l'unità è diametro; si faccia $\frac{\pi}{2n}=\Delta$, $u=\frac{\pi}{2\Delta}-x$; farà nel medesimo caso

$$\int \frac{z^{-1}+z^{\pi:\Delta-x-1}}{1-z^{\pi:\Delta}} \cdot \frac{dz}{l.z} = l.\text{sen.}\,x\Delta$$

il termine generale della proposta serie.

Il si metta pertanto sotto forma differenziale così

$$\int \frac{z^{x-1}dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z} - \int \frac{z^{x}dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$
$$+ \int \frac{z^{\pi:\Delta-x-1}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z} - \int \frac{z^{\pi:\Delta-x-2}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

e si ponga l'unità in luogo di x nel primo e terzo termine. Si avrà

$$(A)\int \frac{dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}, \quad (B)\int \frac{z^{\pi:\Delta-2}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

Si sottragga

Si ſottragga da (A) il ſecondo termine, e da (B) il quarto.

Si otterrà così l'eſpreſſione

$$\int \frac{(1-z^x)dz}{(1-z)(1-z^{n:\Delta})l.z} + \int \frac{z^{n:\Delta-2}(1-z^{-x})dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{n:\Delta})l.z}$$

La quale ſi riduce alla ſeguente forma agevolmente

$$(M) \ldots\ldots\ldots \int \frac{(1+z^{n:\Delta-x-1})(1-z^x)dz}{(1-z)(1-z^{n:\Delta})l.z}$$

e ſarà ella la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA XXXII.

Sommare la ſerie

$$l.\,\text{cof.}\,\Delta + l.\,\text{cof.}\,2\Delta + l.\,\text{cof.}\,3\Delta \ldots\ldots + l.\,\text{cof.}\,x\Delta$$

RISOLUZIONE.

Se nell'eſpreſſione $\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1-z^{2n}}\right)$

ſi faccia $\frac{\pi}{2\Delta} = n, u = x$, eſſendo $\text{ſen.}\,\frac{\pi(n-u)}{2n} = \text{cof.}\,\frac{\pi u}{2n}$,

ſarà $\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{n:2\Delta-x-1}+z^{n:2\Delta+x-1}}{1-z^{n:\Delta}}\right) = l.\,\text{cof.}\,x\Delta$

il termine generale della ſerie propoſta.

Gli ſi dia pertanto la forma differenziale ſeguente

$$(1)\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{n:2\Delta-x-1}}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{n:\Delta})}\right) - \int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{n:2\Delta-x-2}}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{n:\Delta})}\right)(2)$$

$$(3)+\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{n:2\Delta+x-1}}{(1-z)(1-z^{n:\Delta})}\right) - \int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{n:2\Delta+x}}{(1-z)(1-z^{n:\Delta})}\right)(4)$$

Si ſoſtituiſca poi l'unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e dalle quantità riſultanti ſi ſottraggano riſpettivamente i termini (2), (4). Sarà

$$\int \frac{z^{n:2\Delta-2}(1-z^{-x})dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{n:\Delta})l.z} + \int \frac{z^{n:2\Delta}(1-z^x)dz}{(1-z)(1-z^{n:\Delta})l.z}$$

$$= \int \frac{z^{\pi:2\Delta} dz}{l.z} \left(\frac{(1+z^{-x-1})(1-z^{x})}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})} \right) \ldots\ldots (N)$$

La somma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO VIII.

Conſegue evidentemente dalle due Propoſizioni precedenti la verità di due importanti Teoremi; cioè, paſſando dai logaritmi ai numeri, farà generalmente

$$e^{(M)} = \text{ſen.}\,\Delta\,\text{ſen.}\,2\Delta\,\text{ſen.}\,3\Delta \ldots\ldots \text{ſen.}\,x\Delta$$

$$e^{(N)} = \text{cof.}\,\Delta\,\text{cof.}\,2\Delta\,\text{cof.}\,3\Delta \ldots\ldots \text{cof.}\,x\Delta$$

TEOREMA.

Sia (N′) *quello che diventa l'eſpreſſione* (N) *della Propoſizione precedente, mettendovi* $\frac{1}{2^x}$ *in luogo di* x: *dico, che quando* $x = \infty$, π *eſſendo la circonferenza d'un cerchio che ha l'unità per diametro, ſarà* $\pi = 2e^{-(N')}$

DIMOSTRAZIONE.

Facendo $\frac{\pi}{2} = K$, K è la quarta parte della circonferenza d'un cerchio, che ha l'unità per raggio. Ma ſi dimoſtra facilmente, eſſere

$$\frac{1}{\text{cof.}\frac{K}{2}} = 2\,\text{ſen.}\,\frac{K}{2}$$

$$\frac{1}{\text{cof.}\frac{K}{2}\,\text{cof.}\frac{K}{4}} = 4\,\text{ſen.}\,\frac{K}{4}$$

. . . . . .

$$\frac{1}{\text{cof.}\frac{K}{2}\text{cof.}\frac{K}{4}\ldots\ldots\text{cof.}\frac{K}{2^n}} = 2^n \text{ fen.}\frac{K}{2^n}.$$

Essendosi dunque dimostrato (*Corell. VIII.*), che

$$e^{-(N)} = \frac{1}{\text{cof. } K \text{ cof. } 2K \text{ cof. } 3K \text{ ecc.} \ldots\ldots \text{cof. } xK}$$

farà, mettendo $\frac{1}{2^x}$ in luogo di x,

$$e^{-(N)} = \frac{1}{\text{cof.}\frac{K}{2}\text{cof.}\frac{K}{4}\text{cof.}\frac{K}{16}\text{ecc.}} = 2^x \text{ fen.}\frac{K}{2^x}$$

Ma nel caso di $x = \infty$, 2^x fen. $\frac{K}{2^x} = K$. Dunque nel caso di $z = 1$ dopo l'integrazione, e di $x = \infty$ sarà

$$2e^{-(N)} = 2e^{-\int \frac{(1+z^{1:2^x})(1-z^{1:2^x})dz}{z^{1:2^x}(1-z)(1-z^2)lz}} = 2K = \pi.$$

ch'è un'espressione del cerchio totalmente nuova. Il che ecc.

PROBLEMA XXXIII.

Sommare la serie

$l.\text{tang. } a + l.\text{tang. } 2a + l.\text{tang. } 3a \ldots\ldots l.\text{tang. } xa$

Risoluzione.

Poichè nel caso di $z = 1$ dopo l'integrazione

$$\int \frac{z^{n+x-1} - z^{n-x-1}}{1+z^{2n}} \cdot \frac{dz}{lz} = l.\text{tang.}\frac{\pi(n+x)}{4n}$$

siccome è dimostrato nel *XIX Vol. de' nuovi Com. di S.*

Pietrob., si faccia $\frac{\pi}{4n}=a$, e si metta $x-\frac{\pi}{4a}$ in luogo di x; l' espressione

$$\int \frac{z^{x-1}-z^{\pi:2a-x-1}}{1+z^{\pi:2a}}\cdot\frac{dz}{l.z}$$

sarà il termine generale della serie. Gli si dia perciò la forma differenziale, che segue

$$(1)\int\frac{z^{x-1}dz}{(1-z)\left(1+z^{\pi:2a}\right)l.z}-(2)\int\frac{z^{x}dz}{(1-z)\left(1+z^{\pi:2a}\right)l.z}$$

$$(3)-\int\frac{\left(z^{\pi:2a-x-1}\right)dz}{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1+z^{\pi:2a}\right)l.z}+(4)\int\frac{\left(z^{\pi:2a-x-2}\right)dz}{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1+z^{\pi:2a}\right)l.z}$$

Posta quindi l' unità in luogo di x ne' due termini (1), (3), si sottraggano dalle quantità risultanti i termini (2), (4). Sarà

$$\int\frac{\left(1-z^{x}\right)dz}{(1-z)\left(1+z^{\pi:2a}\right)l.z}-\int\frac{z^{\pi:2a-2}\left(1-z^{-x}\right)dz}{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1+z^{\pi:2a}\right)l.z}$$

$$=\int\frac{\left(1-z^{\pi:2a-x-1}\right)dz\left(1-z^{x}\right)}{(1-z)\left(1+z^{\pi:2a}\right)l.z}\quad\ldots\ldots\quad(P)$$

la somma generale della serie proposta nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO IX.

Ed essendo $\frac{1}{\text{cot. }xa}=\text{tang. }xa$, e $l.\text{ tang. }xa=-l.\text{ cot. }xa$, la somma generale della serie

$l.$ cot. $a + l.$ cot. $2a + l.$ cot. $3a \ldots\ldots l.$ cot. xa farà evidentemente

$$\int \frac{\left(z^{\pi:2a-x-1}-1\right)\left(1-z^{x}\right)dz}{(1-z)\left(1+z^{\pi:2a}\right)lz} \ldots\ldots (\mathfrak{Q})$$

COROLLARIO X.

Avremo dunque, in aggiunta agli altri, anche i due Teoremi, che seguono

(P)

e $=$ tang. a tang. $2a$ tang. $3a \ldots.$ tag. xa

$(\mathfrak{Q})$

e cot. a cot. $2a$ cot. $3a \ldots.$ cot. xa

facendo passaggio dai logaritmi ai numeri.

CAPITOLO OTTAVO

DELLE SERIE A PRODOTTI INFINITI.

NOn è ignota la teoria de' prodotti infiniti dopo ciò che ne hanno sapientemente scritto *Wallis*, *Euler*, *de la Grange*, ed altri Geometri. Ma, avendolo trovato utile in alcune occasioni, credo, che importi il metterli per la prima volta in serie, e il formarne un ordine apposito. Ogni termine è realmente finito, ma apparisce sotto una forma infinita, essendo composto d' un numero infinito di fattori, che formano un prodotto continuo.

TEOREMA I.

Nel caso di $z = 1$ *dopo l' integrazione*

$$(A)\int z^{a-1}\,dz\left(1-z^{b}\right)^{(m+p):p}$$
$$=(B)\,\frac{1}{b}\int z^{a:b-1}\,dz(1-z)^{(m+p):p}$$

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia $a-1=n$, $\frac{m+p}{p}=r$, e si sviluppi l'espressione integrale (A). Si avrà pertanto

$$(1-z^{b})^{r}=1-\frac{rz^{b}}{1}+\frac{r\,(r-1)z^{2b}}{1.2}-\frac{r\,(r-1)\,(r-2)}{1.2.3}z^{3b}+\text{ecc.}$$

e però

$$\int z^{n}dz(1-z^{b})^{r}=\frac{z^{n}}{n+1}-\frac{rz^{n+b+1}}{1(n+b+1)}$$
$$+\frac{r.(r-1)z^{n+2b+1}}{1.2(n+2b+1)}-\text{ecc.}$$

Ma poichè, facendo $z=0$, tutto svanisce, si faccia $z=1$, e si avrà

$$\frac{1}{a}-\frac{r}{1(a+b)}+\frac{r\,(-1)}{1.2(a+2b)}-\frac{r\,(r-1)\,(r-2)}{1.2.3(a+3b)}+\text{ecc}\ldots\ldots(M)$$

Similmente sviluppando la formula (B), farà

$$(1-z)^{r}=1-\frac{rz}{1}+\frac{r\,(r-1)}{1.2}z^{2}-\frac{r\,(r-1)\,(r-2)}{1.2.3}z^{3}+\text{ecc.}$$

$$\int z^{a:b-1}dz(1-z)^{r}=\frac{bz^{a:b}}{a}-\frac{brz^{a:b+1}}{1(a+b)}$$
$$+\frac{br\,(r-1)\,z^{a:b+2}}{1.2(a+2b)}-\text{ecc.}$$

e infine, posto $z=1$,

$$\frac{1}{b}\int z^{a:b-1}\,dz(1-z)^{r}=\frac{1}{a}-\frac{r}{1(a+b)}+\frac{r\,(r-1)}{1.2(a+2b)}$$

$$- \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3.(a+3b)} + \text{ecc.}$$

ch' è appunto la ferie (M). Dunque ecc.
Il che ecc.

COROLLARIO I.

E poichè fi dimoſtrerebbe nello ſteſſo modo, che

$$\int z^{f-1} dz \left(1-z^{g}\right)^{(m+p):p} = \frac{1}{g} \int z^{f:g-1} dz (1-z)^{(m+p):p}$$

ſi conchiuda, che nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione,

$$\frac{\int z^{a-1} dz \left(1-z^{b}\right)^{(m+p):p}}{\int z^{f-1} dz \left(1-z^{g}\right)^{(m+p):p}} = \frac{g \int z^{a:b-1} dz (1-z)^{(m+p):p}}{b \int z^{f:g-1} dz (1-z)^{(m+p):p}}$$

TEOREMA II.

Nel caſo di $z = 1$ *dopo l' integrazione*

$$\int z^{a-1} dz \left(1-z^{b}\right)^{(m-p):p} = \frac{p}{am} \cdot \frac{2(ap+bm)}{(a+b)(m+p)} \cdot \frac{3\left(ap+b(m+p)\right)}{(a+2b)(m+2p)} \cdot \frac{4\left(ap+b(m+2p)\right)}{(a+3b)(m+3p)} \text{ ecc.}$$

all' infinito . . . . . (P)

Se ne vegga la dimoſtrazione nel *I Vol. del Calc. Integrale* del Sig. *Eulero pag.* 264.

TEOREMA III.

Nel caſo di $z = 1$ *dopo l' integrazione*

$$\frac{\int z^{a-1} dz \left(1-z^{p}\right)^{(m-p):p}}{\int z^{f-1} dz \left(1-z^{p}\right)^{(q-p):p}}$$

$$= \frac{fq(a+m)}{am(f+q)} \cdot \frac{(p+f)(q+p)(a+m+p)}{(a+p)(m+p)(f+q+p)} \cdot \frac{(p+2f)(q+2p)(a+m+2p)}{(a+2p)(m+2p)(f+q+2p)} \cdot \frac{(p+3f)(q+3p)(a+m+3p)}{(a+3p)(m+3p)(f+q+3p)} \text{ ecc.....} (\mathfrak{Q}) \text{ (} \textit{ibidem pag. 269}\text{)}$$

PROBLEMA XXXIV.

Trovare la ſomma generale della ſerie (B)

$$\frac{p}{a} \cdot \frac{2(ap+b)}{(a+b)(1+p)} \cdot \frac{3\left(ap+b(p+1)\right)}{(a+2b)(1+2p)} \cdot \frac{4\left(ap+b(2p+1)\right)}{(a+3b)(1+3p)} \text{ ecc.}$$
$$+ \frac{p}{2a} \cdot \frac{2(ap+2b)}{(a+b)(2+p)} \cdot \frac{3\left(ap+b(p+2)\right)}{(a+2b)(2+2p)} \cdot \frac{4\left(ap+b(2p+2)\right)}{(a+3b)(2+3p)} \text{ ecc.}$$
$$+ \frac{p}{3a} \cdot \frac{2(ap+3b)}{(a+b)(3+p)} \cdot \frac{3\left(ap+b(p+3)\right)}{(a+2b)(3+2p)} \cdot \frac{4\left(ap+b(2p+3)\right)}{(a+3b)(3+3p)} \text{ ecc.}$$
$$+ \text{ ecc.} \dots\dots\dots (B)$$

RISOLUZIONE.

Se ſi metta x, eſponente ordinario de' termini, in luogo di m nell'equazione (*P*) *del II Teorema*, è manifeſto, che ſoſtituendo nel prodotto infinito i numeri naturali ſucceſſivamente in luogo di x, ne riſulta la ſerie (*B*), di cui la formula

$$\int z^{a-1} dz (1-z^b)^{\overline{x-p:p}}$$

ſarà neceſſariamente il termine generale. Poſto ciò, ſi metta queſta formula ſotto la forma differenziale

$$\int \frac{z^{a-1} dz (1-z^b)^{\overline{x-p:p}}}{1-(1-z^b)^{1:p}} - \int \frac{z^{a-1} dz (1-z^b)^{\overline{x-p+1:p}}}{1-(1-z^b)^{1:p}}$$

e, poſta poi l'unità in luogo di x nel primo termine, ſe ſi ſottragga il ſecondo termine dalla quantità riſultante, l'eſpreſſione, che ſegue

$$\int \frac{z^{a-1}\,dz(1-z^{b})^{(1-p):p}\left(1-(1-z^{b})^{x:p}\right)}{1-(1-z^{b})^{1:p}}$$

farà la fomma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA XXXV.

Sommare la ferie (*M*)

$$\frac{p}{m}\cdot\frac{2(p+bm)}{(1+b)(m+p)}\cdot\frac{3\left(p+b(m+p)\right)}{(1+2b)(m+2p)}\cdot\frac{4\left(p+b(m+2p)\right)}{(1+3b)(m+3p)}\text{ ecc.}$$
$$+\frac{p}{2m}\cdot\frac{2(2p+bm)}{(2+b)(m+p)}\cdot\frac{3\left(2p+b(m+p)\right)}{(2+2b)(m+2p)}\cdot\frac{4\left(2p+b(m+2p)\right)}{(2+3b)(m+3p)}\text{ ecc.}$$
$$+\frac{p}{3m}\cdot\frac{2(3p+bm)}{(3+b)(m+p)}\cdot\frac{3\left(3p+b(m+p)\right)}{(3+2b)(m+2p)}\cdot\frac{4\left(3p+b(m+2p)\right)}{(3+3b)(m+3p)}\text{ ecc.}$$
. . . . . (*M*)

RISOLUZIONE.

Si ponga x in luogo di a nell'equazione (*P*) del *II. Teorema*. E' manifeſto, che l'eſpreſſione

$$\int z^{x-1}dz(1-z^{b})^{(m-p):p}$$

farà il termine generale della ſerie (*M*). Il ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale

$$\int \frac{z^{x-1}dz(1-z^{b})^{(m-p):p}}{1-z} - \int \frac{z^{x}dz(1-z^{b})^{(m-p):p}}{1-z}$$

e, procedendo come nella Propoſizione antecedente, ſi avrà l'eſpreſſione

$$\int \frac{dz(1-z^{x})(1-z^{b})^{(m-p):p}}{1-z}$$

La quale, nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione, farà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

COROLLARIO II.

Con queſto metodo ſi potranno convertire in ſerie i prodotti infiniti degli Eſempj I, II, III, IV del calcolo integrale ſopraccitato *Vol. I. pag.* 265, ed altri ſenza numero, ſubordinandoli a queſta claſſe, e determinando col noſtro metodo le ſomme a parte a parte.

PROBLEMA XXXVI.

Sommare la ſerie (I)

$$\frac{p}{(f+g)(p+q+r)}\cdot\frac{2\big(p(f+g)+b(p+q+r)\big)}{(f+g+b)(2p+q+r)}\cdot\frac{3\big(p(f+g)+b(2p+q+r)\big)}{(f+g+2b)(3p+q+r)}\text{ ecc.}$$
$$+\frac{p}{(f+2g)(p+q+2r)}\cdot\frac{2\big(p(f+2g)+b(p+q+2r)\big)}{(f+2g+b)(2p+q+2r)}\cdot\frac{3\big(p(f+2g)+b(2p+q+2r)\big)}{(f+2g+2b)(3p+q+2r)}\text{ ecc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots(I)$$

RISOLUZIONE.

Si metta $f+gx$ in luogo di a nell'equazione (P) del II Teorema, $p+q+rx$ in luogo di m. Il prodotto infinito, ſoſtituendo ſucceſſivamente i numeri naturali in luogo di x, darà la ſerie (I), e l'eſpreſſione

$$\int z^{f+gx-1}dz\big(1-z^b\big)^{(q+rx):p}$$

ſarà il ſuo termine generale. Gli ſi dia pertanto la forma differenziale

$$\int\frac{z^{f+gx-1}dz\big(1-z^b\big)^{(q+rx):p}}{1-z^g\big(1-z^b\big)^{r:p}}-\int\frac{z^{(f+g(x+1)-1}dz\big(1-z^b\big)^{\left(q+r(x+1)\right):p}}{1-z^g\big(1-z^b\big)^{r:p}}$$

e ſoſtituendo l'unità in luogo di x nel primo termine,

ſi ſottragga il ſecondo dalla quantità, che ne riſulta; ſarà la formula

$$\int \frac{z^{f+g-1}dz(1-z^b)^{(q+r):p}\left(1-z^{gx}(1-z^b)^{rx:p}\right)}{1-z^g(1-z^b)^{r:p}}$$

la ſomma generale della ſerie (*I*) nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

TEOREMA IV.

Nel caſo di $z=1$ *dopo l'integrazione*

$$\int z^{\mu-1}dz(1-z)^{\omega-1} = \int z^{\omega-1}dz(1-z)^{\mu-1}$$

DIMOSTRAZIONE.

E' dimoſtrato dal Sig. *Eulero*, che in queſto caſo

$$\int z^{m-1}dz(1-z^n)^{(K-n):n} = \int z^{k-1}dz(1-z^n)^{(m-n):n}$$

(*ved. il calc. integr. T. 5 pag. 262*). Si faccia $K:n=\mu$, $m:n=\omega$. Sarà ſteſſamente

$$\int z^{m-1}dz\left(1-z^n\right)^{\mu-1} = \int z^{K-1}dz\left(1-z^n\right)^{\omega-1}$$

Ma

$$\int z^{m-1}dz\left(1-z^n\right)^{\mu-1} = \frac{1}{n}\int z^{m:n-1}dz\left(1-z\right)^{\mu-1}$$

$$\int z^{K-1}dz\left(1-z^n\right)^{\omega-1} = \frac{1}{n}\int z^{K:n-1}dz\left(1-z\right)^{\omega-1}$$

per ciò che abbiamo dimoſtrato nel I Teorema. Rimettendo dunque i valori $K:n$, $m:n$, ſarà evidentemente nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione

$$\int z^{\mu-1}dz\left(1-z\right)^{\omega-1} = \int z^{\omega-1}dz\left(1-z\right)^{\mu-1}$$

Il che ecc.

PROBLEMA XXXVII.

Sommare la ferie (*M*)

$$\frac{f(a+p)}{a(f+p)}\cdot\frac{(p+f)(a+2p)}{(a+p)(f+2p)}\cdot\frac{(p+2f)(a+3p)}{(a+2p)(f+3p)}\cdot \text{ ecc.}$$
$$+\frac{f(a+2p)}{a(f+2p)}\cdot\frac{(p+f)(a+3p)}{(a+p)(f+3p)}\cdot\frac{(p+2f)(a+3p)}{(a+2p)(f+4p)}\text{ ecc.}$$
$$+ \text{ ecc. . . . . (}M\text{)}$$

RISOLUZIONE.

Si ponga px in luogo di m, e di q nell' equazione (2) del III Teorema; il prodotto infinito con la foſtituzione ſucceſſiva de' numeri naturali in luogo di x darà la ſerie (*M*), di cui ſarà per conſeguenza termine generale la formula (*S*)

$$\frac{\int z^{a-1}dz\left(1-z^{p}\right)^{x-1}}{\int z^{f-1}dz\left(1-z^{p}\right)^{x-1}} \text{ . . . . . (}S\text{)}$$

Ma l' eſpreſſione (*S*) pel *I Coroll. del Teor. I* ſi cangia nell' eſpreſſione (*T*)

$$\frac{\int z^{a:p-1}dz\left(1-z\right)^{x-1}}{\int z^{f:p-1}dz\left(1-z\right)^{x-1}} \text{ . . . . . (}T\text{)}$$

Si metta per tanto (*T*) ſotto la forma differenziale

$$\frac{(a-p)\int z^{a:p-2}dz(1-z)^{x-1}}{(a-f-p)\int z^{f:p-1}dz(1-z)^{x-1}} \qquad \frac{(a-p)\int z^{a:p-2}dz(1-z)^{x}}{(a-f-p)\int z^{f:p-1}dz(1-z)^{x}}$$

(*veggaſi il II Teorema del Cap. VI*), e fatte le ſteſſe operazioni della Prop. XXII, ſarà

$$\frac{\int z^{a:p-2}\,dz(1-z)^{x}}{\int z^{f:p-2}\,dz(1-z)^{x}}$$

la ſomma generale della ſerie (M). Il che ecc.

COROLLARIO III.

Nello ſteſſo modo ſi troverebbe la ſomma della ſerie di cui

$$(M)\ldots\frac{\int z^{x-1}\,dz(1-z)^{m-1}}{\int z^{x-1}\,dz(1-z)^{q-1}}=\frac{q(m+x)1+x)(1+q)(m+x+1)}{m(q+x)(1+x)(1+m)(q+x+1)}\cdot$$

$$\frac{(1+2x)(2+q)(m+x+2)}{(2+x)(2+m)(q+x+2)}\cdot\frac{(1+3x)(3+q)(m+x+3)}{(3+x)(3+m)(q+x+3)}\text{ ecc.}$$

è il termine generale. Imperciocchè, eſſendoſi dimoſtrato, che nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione, l'eſpreſſione $(M)=\dfrac{\int z^{m-1}\,dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{q-1}\,dz(1-z)^{x-1}}$ (*IV Teor.*), la ſomma della ſerie ſi riduce agevolmente a quella della Prop. antecedente.

SCOLIO.

Queſta Claſſe di ſerie è ſuſcettibile di grandiſſima ampliazione. E molto vi avrebbe da oſſervare ravvicinandola a quella de' fattori creſcenti. Non vo' per altro occuparmivi preſentemente di più, e mi ſo a prendere per mano un altr' ordine di ſerie anologhe, le quali hanno per termini ſerie infinite, di valore per altro finito, al par de' prodotti infiniti, ma traſcendente.

CAPITOLO NONO

DELLE SERIE A TERMINI TRASCENDENTI.

PROBLEMA XXXVIII.

Sommare la ſerie (*A*)

$$1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}-\frac{1}{4^x}+\text{ecc.}$$
$$+\,1-\frac{2}{2^x}+\frac{2^2}{3^x}-\frac{2^3}{4^x}+\text{ecc.}$$
$$+\,1-\frac{3}{2^x}+\frac{3^2}{3^x}-\frac{3^3}{4^x}+\text{ecc.}$$
$$+\,\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots(A)$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo dimoſtrato (*Calc. Integr. di Eulero T. I pag.* 144.) che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int z^{xz}dz=1-\frac{x}{2^x}+\frac{x^2}{3^3}-\frac{x^3}{4^4}+\text{ecc.}$$

è manifeſto, che l' integrale ſviluppato ſomminiſtra la ſerie (*A*) con la ſoſtituzione ſucceſſiva de' numeri naturali in luogo di x, oppur anche la ſerie (*A'*)

$$\int z^z dz+\int z^{2z}dz+\int z^{3z}dz+\text{ecc.}\ldots\ldots(A')$$

che ha $\int z^{xz}dz$ per termine generale.

Poſto ciò, ſi metta queſto termine generale ſotto la forma differenziale

$$\int\frac{z^{xz}dz}{1-z^z}-\int\frac{z^{x(x+1)}dz}{1-z^z}$$

e ſi ſoſtituiſca l'unità in luogo di x nel primo termi-

ne. Si prenda la differenza tra il fecondo termine, e la quantità $\int \frac{z^n dz}{1-z^n}$ che ne rifulta; farà ella

$$\int \frac{z^n dz(1-z^{nx})}{1-z^n}$$

ed efprimerà nel cafo di $z=1$ dopo l' integrazione, la fomma generale della ferie (A), e generalmente la fomma generale della ferie (A'). Il che ecc.

PROBLEMA XXXIX.

Sommare la ferie (B)

$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{(m+2)^2} - \frac{1}{(m+3)^3} - \frac{1}{(m+4)^4} + \text{ecc.}$$
$$+ \frac{1}{m+1} - \frac{2}{(m+2)^2} - \frac{2^2}{(m+3)^3} - \frac{2^3}{(m+4)^4} + \text{ecc.}$$
$$+ \frac{1}{m+1} - \frac{3}{(m+2)^2} - \frac{3^2}{(m+3)^3} - \frac{3^3}{(m+4)^4} + \text{ecc.}$$
$$+ \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots (B)$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo dimoſtrato nel medeſimo luogo, che nel cafo di $z=1$ dopo l' integrazione,

$$\int z^{nx} z^m dz = \frac{1}{m+1} - \frac{x}{(m+2)^2} + \frac{x^2}{(m+3)^3} - \frac{x^3}{(m+4)^4} + \text{ecc.}$$

purchè non fia m quantità negativa, farà queſt' eſpreſſione il termine generale della ferie (B), oppure della ferie (B')

$$\int z^{z+m} dz + \int z^{2z+m} dz + \int z^{3z+m} dz + \text{ecc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots (B')$$

Si dia pertanto alla formula integrale la forma differenziale

$$\int \frac{z^{\pi x} z^m dz}{1-z^x} - \int \frac{z^{x(x+1)} z^m dz}{1-z^x}$$

Con un' operazione ſimile all' antecedente ſi ricaverà l' eſpreſſione

$$\int \frac{z^x z^m dz (1-z^{\pi x})}{1-z^x}$$

che farà la ſomma generale della ſerie (*B*) nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione, e generalmente della ſerie (*B'*). Il che ecc.

PROBLEMA XL.

Sommare la ſerie (A)

$$\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(3p-1)^2} + \frac{1}{(3p+1)^2} + \frac{1}{(5p-1)^2} + \frac{1}{(5p+1)^2} + \text{ ecc.}$$
$$+ \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{(3p-2)^2} + \frac{1}{(3p+2)^2} + \frac{1}{(5q-2)^2}$$
$$+ \text{ ecc. . . . . } (A)$$

RISOLUSIONE.

E' dimoſtrato nel *XIX Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob.*, che nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$\int \frac{z^{p-x} + z^{p+x}}{z^{2p} - 1} \cdot \frac{dz l.z}{z} = \frac{\pi^2}{4p^2 \text{ cof. } \pi x : 2p} =$$
$$\frac{1}{(p-x)^2} + \frac{1}{(p+x)^2} + \frac{1}{(3p-x)^2} + \frac{1}{(3p+x)^2} + \text{ ecc.}$$

eſſendo π la circonferenza di un cerchio che ha l' unità per diametro. Per conſeguenza ciaſcheduna di queſte eſpreſſioni è il termine generale della ſerie (*A*), e parimenti delle ſerie (*A'*), (*A''*), facendo $\pi : 2p = \Delta$

$$\int \frac{z^{p-1}+z^{p+1}}{z^{2p}-1} \cdot \frac{dz.l.z}{z} + \int \frac{z^{p-3}+z^{p+3}}{z^{2p}-1} \cdot \frac{dz.l.z}{z}$$

$$+ \text{ ecc. . . . . } (A')$$

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\text{cof. }\Delta} + \frac{1}{\text{cof. }4\Delta} + \frac{1}{\text{cof. }9\Delta} + \text{ecc.}\right) \text{ . . . . . } (A)$$

Posto ciò si metta l' espressione integrale sotto la forma differenziale, che segue

$$(1)\int \frac{z^{p-x-1}dz.l.z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)} - (2)\int \frac{z^{p-x-3}dz.l.z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)}$$

$$(3)\int \frac{z^{p+x-1}dz.l.z}{(1-z)(z^{2p}-1)} - (4)\int \frac{z^{p+x}dz.l.z}{(1-z)(z^{2p}-1)}$$

Si sostituisca poi l' unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e si sottraggano rispettivamente dalle quantità risultanti li termini (2), (4). Sarà l' espressione

$$\int \frac{z^{p-2}(1-z^{-x})dz.l.z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)} + \int \frac{z^{p}(1-z^{x})dz.l.z}{(1-z)(z^{2p}-1)} =$$

$$\int z^p dz\, l.z\left(\frac{(1-z^{-x-1})(1-z^{x})}{(1-z)(z^{2p}-1)}\right)$$

la somma generale ricercata delle serie (A), (A'') nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, e generalmente della serie (A'). Il che ecc.

PROBLEMA XLI.

Sommare la serie (A)

$$1 + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3p-1} - \text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2p-2}+\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p-2}-\text{ecc.}$$
$$+\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}-\text{ecc.} \quad \ldots\ldots\ldots (A)$$

RISOLUZIONE.

Essendo nel medesimo Volume dimostrato, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{(z^{x-1}+z^{p-x-1})dz}{1+z^p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}-\frac{1}{p+x}-\frac{1}{2p-x}+\frac{1}{2p+x}+\text{ecc.}$$

quest' espressione farà il termine generale della serie (A). Si metta pertanto la formula integrale sotto la forma differenziale, che segue

$$\int\frac{(z^{x-1}-z^{p-x})dz}{(1-z)(1+z^p)}-\int\frac{(z^x-z^{p-x-1})dz}{(1-z)(1+z^p)}$$

e, sostituita l' unità in luogo di x nel primo membro, si sottragga il secondo dalla quantità, che ne risulta; farà l' espressione

$$\int\frac{(1+z^{p-x-1})(1-z^x)dz}{(1-z)(1+z^p)}$$

la somma Generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA XLII.

Sommare la serie

$$1-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2p-1}+\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{3p-1}+\frac{1}{3p+1}-\text{ecc.}$$
$$+\frac{1}{2}-\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2p-2}+\frac{1}{2p+2}-\frac{1}{3p-2}+\frac{1}{3p+2}-\text{ecc.}$$
$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{p-3}+\frac{1}{p+3}-\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

E' dimoſtrato nel medeſimo Volume, che nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$\int \frac{(z^{x-1}-z^{p-x-1})dz}{1-z^p} = \frac{1}{x} - \frac{1}{p-x} + \frac{1}{p+x} - \frac{1}{2p-x} + \frac{1}{2p+x} - \text{ecc.}$$

Dunque, eſſendo queſt' eſpreſſione integrale in tal caſo il termine generale della ſerie propoſta, la ſi metta ſotto la forma differenziale

$$\int \frac{(z^{x-1}-z^{p-x})dz}{(1-z)(1-z^p)} - \int \frac{(z^{x}-z^{p-x-1})dz}{(1-z)(1-z^p)}$$

e operando come nella Prop. antecedente, ſi troverà, che l' eſpreſſione

$$\int \frac{(1-z^{p-x-1})(1-z^{x})dz}{(1-z)(1-z^p)}$$

ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

CAPITOLO DECIMO.

DELLE SERIE DIRETTE E RECIPROCHE DE' SENI, CO-SENI, TANGENTI, E CO-TANGENTI.

LE ſerie dirette, che hanno per termini potenze ſimili di ſeni, e coſeni d' archi che formano tra di sè una progreſſione Aritmetica, ſono ſtate più d'una volta preſe per mano da' Geometri (*Vegg. il Signor* Euler *nell' Introd. all' anal. degl' Inf.*, *il Sig.* Boſſut *nelle Mem. della Soc. Reale per l'anno* 1769, *e li Signori* Bernoulli *e* Lexel *nel XVIII. Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob.*). Ma non ſi ſono ancora laſciate ridurre le potenze ſimili delle tangenti, e delle co-tangenti; e

molto meno poi tutta la classe reciproca di quelle e di queste. Avendo pertanto allo stesso metodo soggettate le une e le altre, e le loro reciproche, mi lusingo di far cosa grata a' Geometri accoppiando agli altri anche questo importante ramo della teoria delle serie.

TEOREMI.

Se a rappresenti un Arco di cerchio che ha l' unità per raggio, dico, che

I. $2 \text{ Cos. } xa \text{ sen. } xa = \text{sen. } 2xa$

II. $\text{Sen. } (x+1)a + \text{sen. } (x-1)a = 2 \text{ cos. } a \text{ sen. } xa$

III. $\text{Sen. } (x+1)a - \text{sen. } (x-1)a = 2 \text{ cos. } xa \text{ sen. } a$

IV. $\text{Sen. } (2x+1)a + \text{sen. } a = 2 \text{ cos. } xa \text{ sen. } (x+1)a$

V. $\text{Sen. } (2x-1)a + \text{sen. } a = 2 \text{ cos. } (x-1)a \text{ sen. } xa$

VI. $e^{nx} = (\text{cos. } a + \sqrt{-1} \text{ sen. } a)^x$, se sia e la base de' logaritmi Iperbolici, $n = a\sqrt{-1}$.

VII. $e^{-nx} = (\text{cos. } a - \sqrt{-1} \text{ sen. } a)^x$

Tutti questi Teoremi si dimostrano agevolmente con le regole cognite del calcolo de' seni e co-seni.

PROBLEMA XLIII.

Trovare la forma differenziale dell' espressione sen. xa.

RISOLUZIONE.

Essendo $2 \text{ cos. } xa \text{ sen. } xa = \text{sen. } 2xa$ (*Teor. I.*); si moltiplichi quest' equazione per sen. a; farà

$$2 \text{ sen. } xa \text{ cos. } xa \text{ sen. } a = \text{sen. } a \text{ sen. } 2xa;$$

ma pel III. Teorema

$$2 \text{ cos. } xa \text{ sen. } a = \text{sen. } (x+1)a - \text{sen. } (x-1)a.$$

Per conseguenza, mettendo $a:2$ in luogo di a, si avrà

$$\frac{\text{sen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\,\text{sen.}\frac{xa}{2}}{\text{sen. } a:2} - \frac{\text{sen.}\left(\frac{x-1}{2}\right)a\,\text{sen.}\frac{xa}{2}}{\text{sen. } 2:a} = \text{sen. } xa$$

Il che ecc.

Altrimenti.

Eſſendo sen. $(x+1)a$+sen. $(x-1)a = 2$ cos. a sen. xa, pel II. Teorema, ſi aggiunga da ambe le parti 2 sen. xa + sen. a; ſi avrà

sen.a+2sen.xa-sen.$(x+1)a$-sen.$(x-1)a$=2sen.$xa(1-\text{cos.}a)$+sen.a

Per conſeguenza

$$\frac{\text{sen.}a+\text{sen.}xa-\text{sen.}(x+1)a}{2-2\,\text{cos.}a} - \frac{\text{sen.}a+\text{sen.}(x-1)a-\text{sen.}xa}{2-2\,\text{cos.}a} = \text{sen.}xa.$$

Il che ecc.

PROBLEMA XLIV.

Trovare la forma differenziale dell'eſpreſſione cos. xa

RISOLUZIONE.

Poichè pel III. Teorema

2 cos. xa sen. a = sen. $(x+1)a$ — sen. $(x-1)a$

ſi metta $2x$ in luogo di x, e ſi aggiunga da ambe le parti sen. a. Si avrà

sen.a+2cos.$2xa$sen.a=sen.$(2x+1)a$–sen.$(2x-1)a$+sen.a;

Ma

sen. $(2x+1)a$+ sen. a=2cos. xa sen. $(x-1)a$ (*IV Teorema*)

sen. $(2x-1)a$ + sen. a = 2cos.$(x-1)a$ sen.xa (*V Teorema*)

Dunque, ponendo $a:2$ in luogo di a, farà

$$\frac{\text{cos.}\frac{xa}{2}\,\text{sen.}\left(\frac{1+x}{2}\right)a}{\text{sen. } a:2} - \frac{\text{cos.}\left(\frac{x-1}{2}\right)a\,\text{sen.}\frac{xa}{2}}{\text{sen. } a:2} = \text{cos. } xa$$

Il che ecc.

PROBLEMA XLV.

Sommare la ſerie (A)
ſen. a + ſen. $2a$ + ſen. $3a$ + ecc. ..... ſen. xa .... (A)

RISOLUZIONE.

Eſſendo ſen. xa il termine generale della ſerie (A), il ſi metta ſotto la forma differenziale trovata poco ſa (*Prop. XLIII.*)

$$\frac{\text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\ \text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\ a:2} \quad \frac{\text{ſen.}\left(\frac{x-1}{2}\right)a\ \text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\ a:2}$$

Si ſoſtituiſca l'unità in luogo di x nel ſecondo termine. Ma l'eſpreſſione ſvaniſce a cagione di $0a = 0$. Non reſtando dunque che il primo termine

$$\frac{\text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\ \text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\ a:2}$$

ſarà egli neceſſariamente la ſomma generale della ſerie (A). Il che ecc.

PROBLEMA XLVI.

Sommare la ſerie (B),
1 + cof. a + cof. $2a$ + cof. $3a$ + ecc. ..... cof. xa .... (B)

RISOLUZIONE.

Si metta il termine generale xa della ſerie ſotto la forma differenziale trovata nella Prop. XLIV.

$$\frac{\text{cof.}\frac{xa}{2}\ \text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a}{\text{ſen.}\ a:2} \quad \frac{\text{cof.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\ \text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\ a:2}$$

e si faccia $x = o$ nel secondo termine, perchè il primo termine della serie è l'unità, e non potrebbe egli risultare da cos. xa, se non si cominciasse la sostituzione de' numeri naturali in luogo di x da $x = o$. Restando pertanto il solo primo termine di questa espressione

$$\frac{\text{cos.}\ \frac{xa}{2}\ \text{sen.}\ \left(\frac{x+1}{2}\right)a}{\text{sen.}\ a : 2}$$

sarà egli la somma generale della serie (*B*). Il che ecc.

Corollario I.

Nello stesso modo si troverebbe

$$\frac{\text{cos.}\left(\frac{1+x}{2}\right)a\ \text{sen.}\ \frac{xa}{2}}{\text{sen.}\ a : 2}$$

per la somma generale della serie

cos. a + cos. $2a$ + cos. $3a$ ecc.

Corollario II.

Queste due Proposizioni sono veramente fondamentali in questa teoria, siccome quelle alle quali si riducono le somme d'altre serie di seni, e coseni più composte. Di fatto

I.

Se si abbia la serie

(*A*)...cos.a cos.b + cos.$2a$ cos.$2b$ + cos.$3a$ cos.$3b$...+ cos.xa cos.xb,

poichè cos. xa cos. $xb = \frac{\text{cos.}\ x\,(a-b) + \text{cos.}\ x\,(a+b)}{2}$

per la teoria de' seni, e coseni, ella si trasformerà nelle due seguenti

$$\frac{\text{cof.}\,(a-b)+\text{cof.}\,2\,(a-b)+\text{cof.}\,3\,(a-b)\ldots+\text{cof.}\,x(a-b)}{2}$$

$$+\frac{\text{cof.}\,(a+)+\text{cof.}\,2(a+b)+\text{cof.}\,3\,(a+b)\ldots\text{cof.}\,x\,(a+b)}{2}$$

ognuna delle quali è fommabile pel Corollario I. della Propoſizione antecedente.

II.

Similmente trattandoſi di fommare la ſerie ſen. a ſen. b + ſen. $2a$ ſen. $2b$ + ecc. . . . . ſen. xa ſen. xb, poichè ella è reducibile alle due

$$\frac{\text{cof.}\,(a-b)+\text{cof.}\,2(a-b)+\text{ecc.}}{2}$$

$$-\frac{\text{cof.}\,(a+b)+\text{cof.}\,2(a+b)+\text{ecc.}}{2}$$

potrà nello ſteſſo modo fommarſi agevolmente.

III.

Parimenti eſſendo propoſta la ſerie

(*B*) . . . ſen. a cof. b + ſen. $2a$ cof. $2b$ + ecc. . . . ſen. xa cof. xb

ſi potrà ſenza difficoltà determinarne la ſomma. Imperciocchè, eſſendo

$$\text{ſen.}\,xa\,\text{cof.}\,xb=\frac{\text{ſen.}\,x\,(a+b)+\text{ſen.}\,x\,(a-b)}{2}$$

La ſerie (*B*) ſi trasforma nelle due

ſen. $(a+b)$ + ſen. $2(a+b)$ + ecc. . . . . ſen. $x(a+b)$

+ ſen. $(a-b)$ + ſen. $2(a-b)$ + ecc. . . . . ſen. $x(a-b)$

ciaſcheduna delle quali è ſommabile per la Prop. XLV.

IV.

Di più cogli ſteſſi fondamenti ſi poſſono ſommare le ſerie

le ſerie di ſeni, e coſeni d' archi procedenti ſecondo qualſivoglia progreſſione aritmetica $p+qx$, come ſono le ſerie (C), (D)

(C)... ſen. $(p+q)\,a$ + ſen. $(p+2q)\,a$ + ecc..... ſen. $(p+qx)\,a$

(D)... coſ. $(p+q)\,a$ + coſ. $(p+2q)\,a$ + ecc..... coſ. $(p+qx)\,a$

Imperciocchè, eſſendo

ſen. $(p+qx)\,a$ = ſen. pa coſ. xqa + coſ. pa ſen. xqa

Se ſi ſvolgano in ſerie i due Termini generali, ſi trasformerà la ſerie (C) nelle due

ſen. pa (coſ. qa + coſ. $2qa$ + coſ. $3qa$ ..... coſ. xqa)

+ coſ. pa (ſen. qa + ſen. $2qa$ + ſen. $3qa$ .... ſen. xqa)

le quali ſi poſſono ſommare per le Prop. precedenti. Lo ſteſſo accaderà della ſerie (D), la quale potrà agevolmente ridurſi a ſerie ſommabili per le medeſime propoſizioni.

SCOLIO.

Non ſarebbe difficile coſa il ſommare con lo ſteſſo metodo le ſerie

ſen.^{m} a + ſen.^{m} $2a$ + ſen.^{m} $3a$ ..... ſen.^{m} xa

coſ.^{m} a + coſ.^{m} $2a$ + coſ.^{m} $3a$ ..... coſ.^{m} xa

mettendo ſucceſſivamente i numeri naturali in luogo di m, come appunto hanno fatto gli autori ſopraccitati. Ma avendo oſſervato che non traeva alcun vantaggio da' caſi particolari, onde poggiare alla ſoluzione generale, l' ho cercata direttamente.

Una felice ſoſtituzione non ha reſo inutili i miei ſforzi, e in tal guiſa abbiamo per un' altra via la ſoluzione generale del Problema.

PROBLEMA XLVII.

Sommare generalmente la ſerie (I)

ſen.^{m} a + ſen.^{m} $2a$ + ſen.^{m} $3a$ + ecc..... ſen.^{m} xa .... (I)

RISOLUZIONE.

Poichè

$$\text{fen.}^m xa = \left(\frac{(\text{cof.}\, a + \sqrt{(-1)}\,\text{fen.}\, a)^x - (\text{cof.}\, a - \sqrt{(-1)}\text{fen.}\, a)^x}{2\sqrt{(-1)}} \right)^m$$

ed è $e^{xa\sqrt{(-1)}} = e^{nx} = (\text{cof.}\, a + \sqrt{(-1)}\text{fen.}\, a)^x$ (*VI Teorema*)

$e^{-xa\sqrt{(-1)}} = e^{-nx} = (\text{cof.}\, a - \sqrt{(-1)}\text{fen.}\, a)^x$ (*VII Teorema*)

il termine generale $\text{fen.}^m xa$ prende manifeſtamente la ſeguente forma

$$(e^{nx} - e^{-nx})^m : (2\sqrt{(-1)})^m \ldots\ldots (M)$$

Si alzi quèſto binomio alla potenza m. Il termine generale della ſerie (I) diverrà l' eſpreſſione

$$\frac{1}{(2\sqrt{(-1)})^m} \left(e^{mnx} - \frac{m}{1} e^{(m-2)nx} + \frac{m(m-1)}{1.2} e^{(m-4)nx} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} e^{(m-6)nx} + \text{ecc.} \right)$$

compoſta di $m+1$ termini generali ſempliciſſimi. Se dunque $S.A$ rappreſenti la ſomma generale di una ſerie, di cui A è il termine generale ſi troverà, ricorrendo alla Prop. IV del III Cap.,

$$S. e^{mnx} = \frac{e^{mn}}{e^{mn} - 1} \left(e^{mnx} - 1 \right)$$

$$S. \frac{m}{1} e^{(m-2)nx} = \frac{me^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n} - 1} \left(e^{(m-2)nx} - 1 \right)$$

$$S. \frac{m(m-1)}{1.2} e^{(m-4)nx} = \frac{m(m-1)e^{(m-4)n}}{1.2\left(e^{(m-4)n} - 1\right)} \left(e^{(m-4)nx} - 1 \right)$$

ecc. e però generalmente, unendo inſieme tutte queſte ſomme particolari, ſarà l' eſpreſſione ſeguente

$$\frac{1}{(2\sqrt{(-1)})^m}\left(\frac{e^{mn}}{e^{mn}-1}(e^{mnx}-1)-\frac{me^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n}-1}(e^{(m-2)nx}-1)\right.$$
$$+\frac{m(m-1)\,e^{(m-4)n}}{1.2\left(e^{(m-4)n}-1\right)}\left(e^{(m-4)nx}-1\right)$$
$$\left.-\frac{m(m-1)\,(m-2)\,e^{(m-6)n}}{1.2.3\,(e^{(m-6)n}-1)}\left(e^{(m-6)nx}-1\right)+\text{ecc.}\right)$$

la fomma generale della ferie (*I*). Il che ecc.

Corollario.

Effendo manifeſta la legge di queſta formula generale, non reſta, che foſtituire i valori convenienti ne' casi particolari, ſenza che il ſi faccia qui togliendo all' eſpreſſione la fomma ſemplicità, ond' è dotata.

PROBLEMA XLVIII.

Sommare la ferie (*I*)

$$\text{cof.}^m a+\text{cof.}^m 2a+\text{cof.}^m 3a+\text{ecc.}\ldots\ldots\text{cof.}^m xa\ldots\ldots(I)$$

Risoluzione.

Effendo

$$\text{cof.}^m xa=\frac{1}{2^m}\left((\text{cof.}a+\sqrt{(-1)}\text{ſen.}a)^x+(\text{cof.}a-\sqrt{(-1)}\text{ſen.}a)^x\right)^m,$$

il termine generale della ferie (*I*) prende la ſeguente forma

$$\left(e^{nx}+e^{-nx}\right)^m : 2^m$$

per le foſtituzioni uſate nella Prop. antecedente.

Dunque, alzata queſt' eſpreſſione alla poteſtà m, e preſe inſieme le ſomme de' termini generali riſultanti da queſt' evoluzione, ſi perverrà, come precedentemente, alla formula che ſegue

$$\frac{1}{2^m}\Big(\frac{e^{mn}}{e^{mn}-1}\Big(e^{mnx}-1\Big)+\frac{me^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n}-1}\Big(e^{(m-2)nx}-1\Big)$$
$$+\frac{m(m-1)e^{(m-4)n}}{1.2\Big(e^{(m-4)n}-1\Big)}\Big(e^{(m-4)nx}-1\Big)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)e^{(m-6)n}}{1.2.3\Big(e^{(m-6)n}-1\Big)}\Big(e^{(m-6)nx}-1\Big)+\text{ecc.}\ldots\Big)$$

la quale ſarà la ſomma generale della ſerie (I). Il che ecc.

COROLLARIO II.

Ma havvi ancora una generalità più grande, che può darſi a queſte ſoluzioni, proponendoſi di ſommare le ſerie

(A)..ſen.$^m(p+q)a$+ſen.$^m(p+2q)a$+ſen.$^m(p+3q)a$+ecc..ſen.$^m(p+qx)a$

(B)..coſ.$^m(p+q)a$+coſ.$^m(p+2q)a$+coſ.$^m(p+3q)a$+ecc..coſ.$^m(p+qx)a$

Imperciocchè col mezzo delle ſoſtituzioni praticate nelle due Prop. antecedenti i termini generali di queſte due ſerie prendono le ſeguenti forme

$$\Big(e^{n(p+qx)}-e^{-n(p+q)}\Big)^m:\Big(2\sqrt{(-1)}\Big)^m$$
$$\Big(e^{n(p+qx)}-e^{-n(p+qx)}\Big)^m:2^m$$

e però ſvolgendole, e ſommando le ſerie parziali, come s' è fatto precedentemente, ſi può agevolmente definire cogli aggregati di queſte ſomme particolari le ſomme generali delle propoſte ſerie (A), (B).

PROBLEMA XLIX.

Sommare la ferie (*A*)
tang. a + tang. $2a$ + tang. $3a$ + ecc.... tang. xa .... (*A*)

RISOLUZIONE.

E' dimoſtrato nel *XIX. Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 5. che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int \frac{z^{p-x}-z^{p+x}}{1-z^{2p}} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{\pi}{2p} \text{ tang. } \frac{\pi x}{2p}$$

eſſendo π la circonferenza di un cerchio che ha l' unità per diametro. Si faccia pertanto Arc. $a=\frac{\pi}{2p}$.

Sarà

$$\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a-x-1}-z^{\pi:2a+x-1}}{1-z^{\pi:a}} \cdot dz = \text{tang. } xa \ldots . (N)$$

il termine generale della ferie (*A*). Si metta ora l' eſpreſſione integrale (*N*) ſotto la forma differenziale, che ſegue

$$(1)\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a-x-1}\,dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:a})} - (2)\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a-x-2}\,dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:a})}$$

$$(3)-\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a+x-1}\,dz}{(1-z)(1-z^{\pi:a})} + (4)\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a+x}\,dz}{(1-z)(1-z^{\pi:a})}$$

e ſi ſoſtituiſca l' unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e dalle quantità riſultanti ſi ſottraggano riſpettivamente i termini (2), (4). Si avranno le due formule

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-2}dz\left(1-z^{-\infty}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}dz\left(1-z^{\infty}\right)}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

la quali si riducono facilmente alla seguente

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}dz\left(1-z^{\infty}\right)\left(z^{-\infty-1}-1\right)}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

che farà la somma generale della serie (A) nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA L.

Sommare la serie (M)

$$\cot.a+\cot.2a+\cot.3a+\text{ecc.}\ldots\ldots\cot.xa\ldots\ldots(M)$$

RISOLUZIONE.

Essendo dimostrato nel luogo citato qui innanzi, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\infty-1}-z^{\pi:a-\infty-1}}{1-z^{\pi:a}}.dz=\cot.xa$$

farà quest' espressione integrale il termine generale della serie (M). La si metta dunque sotto la seguente forma differenziale

$$(1)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{\infty-1}dz}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}-(2)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{\infty}dz}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

$$-(3)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:a-\infty-1}dz}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}+(4)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:a-\infty-2}dz}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

e. fatte le operazioni della Prop. antecedente, fi avrà l' efpreffione ridotta di queſta forma

$$\frac{1}{a}\int \frac{\left(1-z^{\pi:a-x-1}\right)\left(1-z^{x}\right)dz}{\left(1-z\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

che farà la fomma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA LI.

Sommare la ſerie (*A*)

tang.$(p+q)a$+tang.$(p+2q)a$+tang.$(p+3q)a$.....tang.$(p+qx)a$ . . . . . (*A*)

Risoluzione.

Si ponga $p+qx$ in luogo di x nell' efpreffione integrale (*N*) della Prop. XLIX. Diverrà ella

$$\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a-p-qx}-z^{\pi:2a+p+qx}}{1-z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\text{tang.}\,(p+qx)a$$

nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione; e però farà queſto il termine generale della ſerie (*A*).

Il ſi metta ſotto la forma differenziale

$$(1)\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a-p-qx}}{\left(1-z^{-q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}-(2)\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a-p-qx-q}}{\left(1-z^{-q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$-(3)\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a+p+qx}}{\left(1-z^{q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}+(4)\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a+p+qx+q}}{\left(1-z^{q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come nelle Prop. antecedenti, ſi avrà l'efpreffione ridotta

$$\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a}\left(1-z^{qx}\right)\left(z^{-p-qx}-z^{p+q}\right)}{\left(1-z^{q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

che nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione farà la somma generale della proposta serie (A). Il che ecc.

COROLLARIO III.

Nello stesso modo si sommerà la serie
cot. $(p+q)a$ + cot. $(p+2q)a$ + cot. $(p+3q)a$ + ecc..... cot. $(p+qx)a$

PROBLEMA LII.

Sommare la serie reciproca de' seni

$$\frac{1}{\text{sen.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{sen.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{sen.}(p+3q)a}\ldots..+\frac{1}{\text{sen.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Egli è dimostrato nel medesimo Volume, che nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione

$$\int \frac{z^{m}+z^{n-m}}{1+z^{n}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\text{sen.}\frac{m\pi}{n}}$$

Si faccia pertanto $\frac{\pi}{n}=a$, $m=p+qx$; l'espressione

$$\frac{1}{a}\int \frac{z^{p+qx}+z^{\pi:a-p-qx}}{1+z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{sen.}(p+qx)a}$$

farà il termine generale della serie. Gli si dia perciò la seguente forma differenziale

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}-z^{\pi:a-p-qx+q}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx+q}-z^{\pi:a-p-qx}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e posta l' unità in luogo di x nel primo membro, si sottragga il secondo dalla quantità che risulta da quella sostituzione. Sarà la formula

$$\frac{1}{a}\int\frac{\left(1-z^{qx}\right)\left(z^{p+q}+z^{\pi:a-p-qx}\right)}{\left(1-z^{q}\right)\left(1+z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

la somma generale ricercata, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA LIII.

Sommare la serie reciproca de' Co-Seni

$$\frac{1}{\text{cos.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{cos.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{cos.}(p+3q)a}\ldots\ldots\frac{1}{\text{cos.}(p+qx)a}$$

Risoluzione.

Se nell' espressione

$$\int\frac{z^{x}+z^{n-x}}{1+z^{n}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\,\text{sen.}\,\frac{\pi x}{n}}$$

da cui abbiamo tratto poco fa il termine generale della serie reciproca de' seni, si faccia $n=2p$, e si metta $p-x$ in luogo di x, si ha

$$\int\frac{z^{p-x}+z^{p+x}}{1+z^{2p}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{2p\,\text{sen.}\,\frac{\pi(p-x)}{2p}};$$

Ma $\dfrac{\pi}{2p\,\text{sen.}\,\frac{\pi(p-x)}{2p}}=\dfrac{\pi}{2p\,\text{cos.}\,\frac{\pi x}{2p}}$. Dunque facendo $\frac{\pi}{2p}=a$ e ponendo $p+qx$ in luogo di x, si avrà

$$\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a-p-qx}+z^{\pi:2a+p+qx}}{1+z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{cof.}\,(p+qx)a}$$

pel termine generale della propoſta ſerie.

Il ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale

$$\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a+p+qx}-z^{\pi:2a-p-qx+q}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a+p+qx+q}-z^{\pi:2a-p-q}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come s' è fatto nella Prop. antecedente, ſi troverà l' eſpreſſione

$$\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a}\left(1-z^{qx}\right)\left(z^{-p-qx}+z^{p+q}\right)}{\left(1-z^q\right)\left(1+z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

che ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA LIV.

Sommare la ſerie reciproca delle Tangenti

$$\frac{1}{\text{tang.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{tang.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{tang.}(p+3q)a}\ldots\frac{1}{\text{tang.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo nel medeſimo luogo dimoſtrato, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int \frac{z^{x}-z^{n-x}}{1-z^{n}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\,\text{tang.}\,\frac{\pi x}{n}}$$

ſe ſi ponga a in luogo di $\frac{\pi}{n}$, $p+qx$ in luogo di x, ſi avrà il termine generale della ſerie ſotto queſta forma

$$\frac{1}{a}\int \frac{z^{p+qx}-z^{\pi:a-p-qx}}{1-z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{tang.}\,(p+qx)a}$$

Gli si dia la forma differenziale seguente

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}+z^{\pi:a-p-qx+q}}{(1-z^q)(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx+q}+z^{\pi:a-p-qx}}{(1-z^q)(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come nelle *Prop.* precedenti, si perverrà all' espressione

$$\frac{1}{a}\int\frac{(1-z^{qx})(z^{p+q}-z^{\pi:a-p-qx})}{(1-z^q)(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

che, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, farà la somma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA LV.

Sommare la serie reciproca delle Cotangenti

$$\frac{1}{\text{cot.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{cot.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{cot.}(p+3q)a}\ldots\ldots\frac{1}{\text{cot.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Essendo $\dfrac{\pi}{2p\,\text{cot.}\dfrac{\pi x}{2p}}=\dfrac{\pi\,\text{tang.}\dfrac{\pi x}{2p}}{2p}$, è manifesto, che

farà $\dfrac{1}{\text{cot.}(p+qx)a}=\text{tang.}(p+qx)a$. Si ripigli pertanto la formula integrale della *Prop.* LI, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione esprime la somma generale della serie, che ha per termine tang. $(p+qx)a$, cioè

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}-z^{p+q})}{(1-z^q)(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

Sarà ella la somma generale ricercata. Il che ecc.

SCOLIO.

Se i limiti di una Memoria il comportaſſero, non ſarebbe difficile coſa l' inoltrare queſta Teoria, e ſommare le ſerie de' prodotti, potenze, ed altre affezioni delle tangenti, e cotangenti d' archi procedenti ſecondo qualſivoglia aritmetica progreſſione. Ma ciò per ora baſti intorno alle ſerie in generale, non eſſendo impoſſibile, che cada in animo ad alcuno di ſtendere e compilare ſulle tracce di queſta Memoria non meno, che col fondamento de' Saggi moltiplici, che ſi trovano ſparſi nell' opere de' più illuſtri Geometri, un Trattato generale ſu queſt' ardua e importantiſſima Scienza delle Serie.

RICERCHE

Intorno al Calcolo Integrale dell' equazioni differenziali finite.

Del Sig. Anton-Mario Lorgna Direttore delle Scuole Militari di Verona.

Se una quantità variabile riceva una qualche variazione effettiva, è certo, che qualfivoglia funzione di quella variabile varia anch' essa nello stesso tempo. E siccome sottraendo dalla quantità variata la quantità primitiva, si ottiene l' incremento stesso o il decremento indotto nella quantità variabile; così dalla forma variata, qualunque ella siasi, sottraendo la funzione primitiva, si conseguisce la quantità della variazione incontrata dalla funzione variata. Le quantità pertanto, che risultano da queste sottrazioni, diconsi in generale differenze, e queste infinitamente piccole, se infinitamente piccolo è l' incremento o il decremento indotto nella variabile; e differenze finite, se di valore finito sia la variazione apportata alla variabile. Quindi i due rami elementari, uno di calcolo differenziale, onde trovare le differenze infinitesime, e le finite di qualfivoglia funzione d' una proposta variabile; e l'altro di calcolo integrale, ove si tratta dalle differenze infinitesime, e finite di rimontare alla funzione stessa, di cui elle sono le differenze. Ma come può avervi relazione tra due o più variabili espressa per equazioni, così può avervi del pari relazione tra le differenze di due o più variabili, ed equazioni differenziali esprimenti la ragione tra di sè delle varia-

zioni così infinitesime come finite, indotte nelle funzioni per l' incremento o decremento ricevuto dalle variabili, delle quali sono elle funzioni. Quindi di nuovo i due altri rami di calcolo differenziale per le variazioni infinitesime e finite dell' equazioni finite; e di calcolo integrale, onde trovare con la relazione data di queste variazioni la relazione finita tra le variabili. Ancorchè nel Libro del Sig. *Moivre*, che ha per titolo (*Miscellan. Analytica de Ser.*), e più particolarmente nel Trattato delle Serie del Sig. *Stirling*, si trovino maneggiate equazioni a differenze finite, ben considerandone la natura, elle si riducono piuttosto a differenziali ed integrali di semplici funzioni, di quello che al calcolo delle equazioni propriamente a due o più variabili, ch' è materia totalmente nuova. Lo stesso può dirsi del calcolo intorno alle differenze finite, che ci ha dato l' immortale Sig. *Eulero* nelle sue eccellenti Instituzioni, il quale tutto si aggira sulle funzioni d' una variabile. L' epoca vera di questo nuovo calcolo integrale dell' equazioni differenziali a differenze finite, e a più variabili è recentissima, dopo che il sommo Geometra Sig. de la *Grange* pubblicò nel primo volume degli Atti della Società Reale di Torino un metodo nel 1759. di trattare la Teoria delle Serie ricorrenti dipendentemente dall' integrazione d' una sorta di queste equazioni a due variabili. Presero in seguito diversi illustri Geometri a coltivarlo ed estenderlo con dottissime ricerche, tra' quali si distinsero i Signori de la *Place*, de *Condorcet*, *Monge*, e di nuovo il Sig. de la *Grange* (*si veggano* il T. IV. delle Mem. della *Soc. R.* di Torino, li T. VI. VII. e IX. delle *Mem.* presentate alla *Soc. R.* di Parigi, le Mem. della med. *Soc. R.* per gli anni 1769, 1770, 1771, e quelle della *R. Soc.* di Berlino per l' anno 1774). Non è a mia cognizione che dopo questi celebri uomini abbia fatto alcun altro progressi importanti in questa materia. Al più il

Sig. Ab. *Paoli* di queſta *Società* in un eccellente Opuſcolo pubblicato in Livorno nel 1780. alla progreſſione aritmetica x, $x+a$, $x+2a$, ecc. degl' incrementi ha ſoſtituito la geometrica ax, a^2x, a^3x, ecc.

Ma in un Paeſe di nuova ſcoperta è naturale coſa, che ci ſi offeriſcano agli occhi oggetti ſempre nuovi. Nel fare pertanto qualche ſtudio ſu queſto calcolo parvemi che il ſi poteſſe ampiare e promovere, battendo nuove vie nel maneggiarlo, e adoperando altri metodi dagli uſati ſinora, coll' adattarlo non ſolamente alle differenze finite coſtanti, ma alle variabili eziandio. Non vi era poi fatto alcun paſſo intorno alle equazioni differenziali a coefficienti variabili; reſtavano da trattarviſi parecchi articoli così ſu le funzioni arbitrarie, come ſu' maſſimi e minimi, e molti altri da ſvolgere, onde ravvicinarlo più e più al calcolo integrale comune, e alla Teoria delle equazioni a differenze parziali. Deſidero, che le indagini che ho fatto ſu tutti queſti argomenti meritar poſſano l' attenzione de' Geometri. Le ripartirò in più Memorie ſeguendo l' ordine ſteſſo con cui mi vi ſono ſucceſſivamente applicato.

MEMORIA I.

CAPITOLO PRIMO

DELLA DIFFERENZIAZIONE DELLE FUNZIONI ED INTEGRAZIONE DE' DIFFERENZIALI SEMPLICI.

Definizioni.

§. I. Ritenendo i consueti segni (*Instituz. di Calc. Diff. del Sig. Eulero*) s' intenda generalmente per y' quello che diventa y, funzione qualunque della variabile x, se si ponga $x+X$ in luogo di x, essendo X qualsivoglia grandezza finita, sia ella costante o una funzione di x qualunque. Similmente s' intenda per y'' ciò che diventa y', se in luogo di x si ponga in y' di nuovo $x+X$, e così successivamente.

§. II. Stessamente conservando il segno caratteristico Δ per le differenze finite, sia generalmente

$$y'-y=\Delta y$$
$$y''-y'=\Delta y'$$
$$y'''-y''=\Delta y''$$
$$\text{- - - - - - - - -}$$
$$y^{n+1}-y^n=\Delta y^n$$

Corollari.

§. III. Prendendo dunque successivamente le differenze de' membri di queste equazioni, si avranno le differenze seconde, le terze ecc. come segue

$\Delta y - \Delta y = \Delta^2 y$

- - - - - - - - - - - - -

$\Delta y^{n+1} - \Delta y^n = \Delta^2 y^n$

$\Delta^2 y' - \Delta^2 y = \Delta^3 y$

- - - - - - - - - - - - -

$\Delta^2 y^{n+1} - \Delta^2 y^n = \Delta^3 y^n$

e così all' infinito

§. IV. E se in queste equazioni si sostituiscano i valori successivamente di Δy, $\Delta y'$ ecc. tratti dal §. II. si avrà

$\Delta y = y' - y$

$\Delta^2 y = y'' - 2y' + y$

$\Delta^3 y = y''' - 3y'' + 3y' - y$

ecc., e così all' infinito

§. V. Non dipenderà pertanto, come prima, la natura delle quantità variate y', y'' ecc. dalla sola natura della funzione y, ma e da questa, e da quella insieme della grandezza X, che costituisce l' incremento o il decremento ricevuto dalla variabile.

DEFINIZIONE.

§. VI. Si chiami $x + X$ il modulo generale delle differenze finite.

SCOLIO.

§. VII. Poichè y' è ciò che diviene la funzione y ponendovi il modulo $x + X$ in luogo di x, e y'' ciò che diviene y' ponendo $x + X$ in luogo di x, e così successivamente (§. 1.), se nel modulo $x + X$ si metta lo stesso modulo $x + X$ in luogo di x, sì che risulti $x + X + X'$, essendo X' ciò che diviene X mettendovi il modulo $x + X$ in luogo di x; e poi di nuovo si ponga nel secondo termine $x + X + X'$ il modulo $x + X$ in luogo di x, sì che risulti $x + X + X' + X''$, essen-

do X'' ciò che diventa X' sostituendovi il modulo in luogo di x, e così successivamente, sì che ne provenga la serie

$$x+X;\ x+X+X';\ x+X+X'+X'';\ x+X+X'+X''+X'''; \text{ ecc.}$$

egli è manifesto, che risulta la stessa funzione y'', così se in luogo di x si ponga il modulo $x+X$ nella funzione y', come se per x si sostituisca nella funzione y il secondo termine di questa serie $x+X+X'$. Similmente risulta la funzione y''' tanto ponendo in y'' il modulo in luogo di x, quanto sostituendo per x nella funzione y il terzo termine di questa serie, e così sempre. In conseguenza questa serie, e quella delle funzioni si corrispondono in questo modo

$$y \quad \begin{cases} x+X;\ x+X+X';\ x+X+X'+X'';\ \text{ecc.} \\ y';\ y'';\ y''';\ \text{ecc.} \end{cases}$$

che se X sia la costante a, la serie diventa

$$x+a;\ x+a+a;\ x+a+a+a;\ \text{ecc.}$$

che è il caso notissimo della variazione costante, a cui si sono comunemente limitati finora.

PROPOSIZIONE I.

§. VIII. *Essendo* y *una funzione qualsivoglia della variabile* x, *se* x *riceva un incremento o decremento finito* X, *la funzione* y *prende questa forma, in cui* dx *è costante*,

$$y \pm \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2ddy}{1.2dx^2} \pm \frac{X^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \text{ ecc. all' infinito}$$

Veggasi, per la dimostrazione, il Sig. *Taylor* (*Meth. increm. inv.*) che fu il primo a produrre quest' importantissima espressione, ed il Sig. *Eulero* nelle sue Instituzioni di Calcolo Diff. pag. 333. e seg., e pag. 353.

SCOLIO.

§. IX. L'espressione del valore di y, in cui sia stato posto $x \pm X$ in luogo di X, abbraccia, coll' ambiguità de' segni, così la variazione per incremento, come per decremento. Per facilità di calcolo si prenderà sempre la serie col segno permanente positivo, essendo facile di alternare i segni al caso che la variazione si faccia per decremento.

COROLLARIO.

§. X. Poichè dunque y' è ciò che divien y ponendovi in luogo di x la quantità $x + X + X'$; e similmente y'' ciò che diviene la stessa funzione y sostituendovi per x la quantità $x + X + X' + X''$, e così successivamente (§. VII.); è facile da vedere, che torna lo stesso, come se successivamente ricevesse la variabile x nella funzione y la variazione X, $X + X'$, $X + X' + X''$, ecc.

Sarà pertanto (§. VIII.)

$$y' = y + \frac{x dy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2 dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + (X + X') \frac{dy}{dx} + (X + X')^2 \frac{ddy}{1.2 dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y''' = y + (X + X' + X'') \frac{dy}{dx} + (X + X' + X'')^2 \frac{ddy}{1.2 dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y^{n+1} = y + (X + X' \ldots . X^n) \frac{dy}{dx} + (X + X' \ldots . X^n)^2 \frac{ddy}{1.2 dx^2} + (X + X' \ldots . X^n)^3 \frac{d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \text{ecc.}$$

PROPOSIZIONE II.

§. XI. *Data una funzione qualunque* y *della variabile* x *trovare le differenze finite di* y *di tutti gli ordini, posta per modulo generale delle differenze l' espressione* $x+X$.

RISOLUZIONE.

Essendo $y'-y=\Delta y$ (§. IV), sostituendo in quest' equazione il valore di y' (§. X), farà la differenza prima

$$\Delta y=X\frac{dy}{dx}+X'\frac{ddy}{1.2dx^2}+X''\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}+\text{ecc.}$$

Di nuovo essendo $y''-2y'+y=\Delta^2 y$, sostituendo i valori di y', y'', e facendo $X=(m')$, $X+X'=(m'')$, si avrà

$$\Delta^2 y=\big((m')-2(m')\big)\frac{dy}{dx}+\big((m'')^2-2(m')^2\big)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+\big((m'')^3-2(m')^3\big)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}+\text{ecc.}$$

E parimenti sostituendo nell' equazione $y'''-3y''+3y'-y=\Delta^3 y$ i valori di y', y'' ecc., e ponendo $X+X'+X''=(m''')$, si otterrà la differenza terza della funzione y di questa forma.

$$\Delta^3 y=\big((m''')-3(m'')+3(m')\big)\frac{dy}{dx}+\big((m''')^2-3(m'')^2+3(m')^2\big)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+\big((m''')^3-3(m'')^3+3(m')^3\big)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}+\text{ecc.}$$

Similmente, essendo $\Delta^4 y=y''''-4y'''+6y''-4y'+y$, sostituendo i valori corrispondenti, e ponendo $(m''')=X+X'+X''+X'''$, farà

$$\Delta^4 y = \left((m'''') - 4(m''') + 6(m'') - 4(m')\right)\frac{dy}{dx} + \left((m'''')^2 - 4(m''')^2 + 6(m'')^2 - 4(m')^2\right)\frac{ddy}{1.2dx^2} + \left((m'''')^3 - 4(m''')^3 + 6(m'')^3 - 4(m')^3\right)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Per determinare dunque la forma corrispondente alla differenza $n.^{mz}$ di y non è difficile lo scoprire, che tutto dipende dal determinare il coefficiente di $\frac{dy}{dx}$, mentre prendendo a parte a parte le seconde potenze, poi le terze, quarte ecc. d' ogni termine (m^n), (m^{n-1}), (m^{n-2}) ecc. di questo coefficiente, si ottengono successivamente i coefficienti di $\frac{ddy}{1.2dx^2}$, $\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$ ecc.

Ora il coefficiente di $\frac{dy}{dx}$ è manifestamente uguale alla potenza $n.^{ma}$ di $m-1$, da cui sia sempre tolto l' ultimo termine, ch' è l' unità, cioè di questa forma

$$(m^n) - \frac{n}{1}(m^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2}) - \frac{n..(n-2)}{1.2.3}(m^{n-3}) + \text{ecc.} \pm 1$$

essendo l' unità positiva o negativa secondo che n farà dispari o pari. In conseguenza farà generalmente la differenza $n.^{mz}$ di qualunque funzione y della variabile x della forma seguente.

$$\Delta^n y = \left((m^n) - \frac{n}{1}(m^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2}) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(m^{n-3}) + \text{ecc.} \pm 1 \right)\frac{dy}{dx} + \left((m^n)^2 - \frac{n}{1}(m^{n-1})^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2})^2 \right.$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(m^{n-3}\right)^2+\text{ecc.}\pm 1\Big)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+\Big(\left(m^n\right)^3-\frac{n}{1}\left(m^{n-1}\right)^3+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(m^{n-2}\right)^3$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(m^{n-3}\right)^3+\text{ecc.}\pm 1\Big)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}+\text{ecc.}$$

essendo $\left(m^n\right)=X+X'+X''....X^{n-1}$, e $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$ ecc. quantità cognite e necessariamente finite. Il che ecc.

SCOLIO.

§. XII. Ancorchè l'uso di questa formula per ritrovare le differenze finite d' ogni grado di qualsivoglia funzione di x col modulo $x+X$ non possa avere alcuna difficoltà, ne faremo qualche applicazione a' casi particolari per rischiaramento.

I. ESEMPIO.

Sia proposto di trovare la differenza seconda di x^2, essendo il modulo $x+ax^2$. Sarà pertanto $X=ax^2$, $y=x^2$, $dy=2xdx$, $ddy=2dx^2$, e d^3y con tutti gli altri differenziali successivi $=0$. E perciò si avrà dalla formula

$\Delta^2x^2=\left((m'')-2(m')\right)2x+\left((m'')^2-2(m')^2\right)$

Ma $(m')=X=ax^2$, $(m'')=X+X'=ax^2+a(x+ax^2)^2$;

Dunque $2x(m'')=4ax^3+4a^2x^4+2a^3x^5$; $4x(m')=4ax^3$,

$(m'')^2=(2ax^2+2a^2x^3+a^3x^4)^2$, $2(m')^2=2a^2x^4$, e però

$\Delta^2x^2=a^6x^8+4a^5x^7+8a^4x^6+10a^3x^5+6a^2x^4$.

II. ESEMPIO.

Si cerchi la differenza terza di x col modulo $x+l.x$. Eſſendo $X=l.x$, $n=3$, $y=x$, $dy=dx$, e ddy, d^3y ecc. $=0$, farà
$\Delta^3x=(m'')-3(m')+3(m')$. Ma $(m')=X=l.x$, $(m)=X+X'=l.x+l.(x+l.x)$, $(m'')=X+X'+X$ $=l.x+l.(x+l.x)+l.\big(x+l.x+l.(x+l.x)\big)$. Dunque
$\Delta^3x=l.x+l.(x+l.x)+l.\big(x+l.x+l.(x+l.x)\big)-3l.x-$ $3l.(x+l.x)+3l.x=l.x-2l.(x+l.x)+l.\big(x+l.x+l.(x+l.x)\big)$

III. ESEMPIO.

Sia da determinarſi la differenza prima di $bx+cx^2$ eſſendo $x-ax+bx^2$ il modulo delle differenze. Sarà pertanto $X=bx^2-ax$, $n=1$, $y=bx+cx^2$, $dy=bdx$ $+2cxdx$, $ddy=2cdx^2$, d^3y, d^4y ecc. $=0$. E però
$\Delta y=\Delta(bx+cx^2)=(m')(b+2cx)+(m')^2c$
Ma $(m')=X=bx^2-ax$. Dunque $\Delta y=(b^2+a^2c-2ac)x^2$ $+(2bc-2abc)x^3-abx+b^2cx^4$.

COROLLARIO.

§. XIII. Dalla forma univerſale delle differenze finite d' una qualunque funzione di x, che abbiamo determinato, ſi può facilmente ricavare quella, che conviene alla differenza d' ogni ordine coll' incremento coſtante, cioè col modulo comune $x+a$. Egli è di molta utilità l' avere una ſola forma generale, che eſprima le differenze $n.^{me}$ di qualſivoglia funzione in queſto caſo particolare, ch' è il più comune, e più in uſo preſſo i Geometri; tanto più, che non appariſce agevolmente, come ſi poſſa dedurre un' eſpreſſione generale dalle forme particolari date a queſte differenze a parte a parte dal Sig. *Eulero* alla pag. 343. delle ſue Inſtituzioni.

Baſta pertanto riflettere, che nel caſo dell' incremento coſtante a, ſi ha

$$X = a = (m')$$
$$X + X' = a + a = 2a = (m'')$$
$$X + X' + X'' = a + a + a = 3a = (m''')$$
$$\text{- - - - - - - - - - - - - - - - -}$$
$$X + X' \ldots . X^{n-1} = na = (m^n)$$

e però ſoſtituendo queſti multipli di a nella formula univerſale, ſi avrà generalmente per gl' incrementi coſtanti.

$$\Delta^n y = \left(na - \frac{n(n-1)a}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)a}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+\left(n^2a^2 - \frac{n(n-1)^2a^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2a^2}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+\left(n^3a^3 - \frac{n(n-1)^2a^3}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3a^3}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$
$$+ \text{ecc.}$$

forma, in cui la legge è viſibile. In fatti ſia $n = 1$.

$$\Delta y = \frac{ady}{dx} + \frac{a^2ddy}{2dx^2} + \frac{a^3d^3y}{6dx^3} + \text{ecc.}$$

poſto $n = 2$

$$\Delta^2 y = \frac{a^2ddy}{dx^2} + \frac{3a^3d^3y}{3dx^3} + \frac{7a^4d^4y}{3.4dx^4} + \text{ecc.}$$

e così ſucceſſivamente come porta la Tavola del Sig. *Eulero*.

SCOLIO.

§. XIV. Veduto abbaſtanza della differenziazione delle funzioni finite, ci faremo a verſare ſopra l' integrazione delle funzioni differenziali. Siccome una funzione può eſſere conſiderata integrale d' una funzione ignota, la quale ſi determina colla differenziazione di quella ſteſſa

ſteſſa quantità, che ſi ſuppone eſſere il ſuo Integrale; così ogni funzione può eſſere propoſta come differenziale d' una funzione incognita, la quale non può definirſi, che trovando l' Integrale della funzione propoſta. Ma quanto è agevole e ſoggetto a Canoni generali, come s'è veduto, il primo Calcolo, altrettanto quello dell' integrazione delle funzioni è difficile ſommamente, e forſe non fatto per ſottomettersi a regole univerſali. Appena può egli dirſi tocco da' Geometri, ſe qualche caſo ſi eccettui ſvolto ingegnoſamente dal Sig. *Eulero* nel I. Cap. di ſue Inſtituzioni. E tanto più fa meraviglia, che non ſe ne ſieno occupati prima d' ogn' altra coſa, che il Calcolo Integrale dell' Equazioni differenziali tutto ripoſa ſugl' Integrali delle funzioni differenziali, e non può un' equazione avere un Integrale finito, e ſviluppato, ſe non s' abbia quello delle funzioni, all' integrazione delle quali egli ſi riduce neceſſariamente. Ma penſando, che a poco avrebbero ſervito le mie ricerche, ſe mi foſſi intrattenuto ſu de' cui particolari, mi poſi a tentare qualche coſa di generale, per quanto il permette l' arduità dell' aſſunto. E come è noto, che la parte più luminoſa, e più uſuale, cioè quella, in cui gl' incrementi o decrementi ſeguono la progreſſione de' numeri naturali 1, 2, 3, 4, ecc., ha relazione colle ſomme generali di ſerie aventi per termine generale le funzioni ſteſſe, di cui ſi cerca l' integrale; mi ſono dato anche a coltivare di propoſito la Teoria delle ſerie con un metodo, che ha il vantaggio di legarſi ſpontaneamente col Calcolo integrale delle funzioni differenziali finite, ond' è poi nata la Memoria precedente, di cui vedremo qui un' immediata applicazione.

DEFINIZIONE.

§. XV. La Caratteristica $\int$ denoti l'integrale d'una funzione qualunque, che n'è affetta, come nel Calcolo integrale a differenze infinitesime, a distinzione della Caratteristica S, che deve indicare la somma generale d'una serie, che abbia per termine generale la funzione affetta. In tal guisa sarà $\int M$ l'integrale della funzione M della variabile x, considerata come un differenziale finito, ed SM sarà la somma generale di una serie, che ha per termine generale la funzione M, e per indice la stessa variabile x.

PROPOSIZIONE III.

§. XVI. *Proposta qualsivoglia funzione differenziale* M *di* x *e costanti col modulo* x+X *delle differenze finite, trovare l'equazione, a cui si riduce generalmente l'integrazione della funzione* M.

RISOLUZIONE.

Sia y l'integrale ricercato. Dovrà essere $y = \int M +$ cost.; e differenziando $\Delta y = y' - y = M$. Ma abbiamo veduto essere

$$y' = y + \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{X^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Si avrà dunque l'equazione generale

$$(A) \ldots\ldots M = \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{X^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

E però se si trovi un solo valore t per y soddisfacente all'equazione (A), sarà $t +$ cost. l'integrale completo della funzione M. Il che ecc.

PROPOSIZIONE IV.

§. XVII. *Trovare tutte le funzioni* M, *che ammettono integrale completo algebraico razionale ed intiero, con qualfivoglia modulo* $x+X$.

RISOLUZIONE.

Sia primieramente $y=\int M=K+bx$. Sostituendo questo valore nell' equazione (A) della Proposizione precedente, sarà $M=bX$, e però qualunque funzione di x algebraica o trascendente, ch' esser possa l' incremento X, sarà $\int M=b\int X=K+bx$, e K sarà la costante arbitraria.

Sia in secondo luogo $y=\int M=K+bx+cx^2$. Sarà

$$M=(b+2cx)X+cX^2$$

e qualunque funzione di x sia X, sarà $K+bx+cx^2$ l' integrale completo di $(b+2cx)X+cX^2$. Dunque generalmente essendo

$$M=(b+2cx+3ex^2+4fx^3+\text{ecc}.....)X$$
$$+(1.2c+2.3ex+3.4fx^2+4.5gx^3+\text{ecc}.....)\frac{X^2}{1.2}$$
$$+(1.2.3e+2.3.4fx+3.4.5gx^2+\text{ecc}.....)\frac{X^3}{1.2.3}$$
$$+\text{ecc.}$$

qualunque funzione di x sia X, sarà

$$\int M=K+bx+cx^2+ex^3+fx^4+gx^5+\text{ecc.}$$

Il che ecc.

COROLLARIO.

§. XVIII. Si deduce quindi agevolmente, che può essere M qualunque funzione di x a piacere, purchè

ſia X un determinato incremento, o una funzione determinata dipendente dal valore di M.

PROPOSIZIONE V.

§. XIX. *Di nuovo propoſta qualſivoglia funzione differenziale* y *di* x *e coſtanti, col modulo* $x+X$ *delle differenze finite, trovare in funzioni di* y *ed* x *il ſuo integrale completo*

RISOLUZIONE.

Sieno generalmente $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$ ecc. $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$, ecc. le forme che prendono le funzioni y, M ponendovi ſucceſſivamente $x-X$ in luogo di X, come ſono le y', y'', y''' ecc. M', M'' ecc. le forme, che prendono y, M, ponendovi ſucceſſivamente $x+X$ in luogo di x (§. II); e ſia $M=\int y$. Sarà $\Delta M=y$. Ma $\Delta M=M'-M$ (§. II); dunque $y=M'-M$, e ponendo ſucceſſivamente ne' termini di queſt' equazione $x-X$ in luogo di X, farà

$$\begin{aligned} y_{,} &= M - M_{,} \\ y_{,,} &= M_{,} - M_{,,} \\ y_{,,,} &= M_{,,} - M_{,,,} \\ y_{,,,,} &= M_{,,,} - M_{,,,,} \\ &\text{ecc.} \end{aligned}$$

In conſeguenza, prendendo le ſomme all' infinito, ſarà

$$(\mathcal{B}) \ldots\ M=\int y=K+y_{,}+y_{,,}+y_{,,,}+y_{,,,,}+\text{ecc.}$$

eſſendo K la coſtante arbitraria. Ma ponendo negative le variazioni nel §. X. ſi ha

$$y_{,}=y-\frac{Xdy}{dx}+\frac{X^2ddy}{1.2dx^2}-\frac{X^3d^3y}{1.2.3dx^3}+\text{ecc.}$$

$$y_{,,}=y-(X+X')\frac{dy}{dx}+(X+X')^2\frac{ddy}{1.2dx^2}-\text{ecc.}$$

ecc

sostituendo pertanto questi valori nell' equazione (B), si avrà

$$(C)..\int y = K + Sy - \left(X + (X+Y) + (X+Y+Z) + \text{ecc.}..\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+\left(X^2 + (X+Y)^2 + (X+Y+Z)^2 + \text{ecc.}...\right)\frac{ddy}{1.2.dx^2}$$
$$-\left(X^3 + (X+Y)^3 + (X+Y+Z)^3 + \text{ecc.}...\right)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$
$$+\text{ecc.}$$

che è un' altra forma generale, che può avere l' integrale della funzione data y col modulo $x + X$, come s' era proposto di ritrovare.

PROPOSIZIONE VI.

§. XX. *Ritrovare l' integrale completo di qualsivoglia funzione differenziale* y *col modulo* x + 1 *delle differenze finite*.

RISOLUZIONE.

Essendo $X = 1$, e però $X + X' = 1 + 1 = 2$, $X + X + X' = 3$ ecc.
si sostituiscano questi valori nell' equazione (C) della Proposizione precedente. Sarà

$$\int y = K + Sy - (1 + 2 + 3 + 4 + \text{ecc.}...)\frac{dy}{dx}$$
$$+(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \text{ecc.}...)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$-(1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \text{ecc.}...)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$
$$+\text{ecc.}$$

e però col prendere i termini generali delle serie

Co-

meriche, dando loro per indice o esponente, che voglia dirsi, la variabile x, si avrà

$$(D)\ldots \int y = K + Sy - \frac{x dy}{dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2 dx^2} + \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \text{ecc.}$$

integrale completo della funzione differenziale y. Il che ecc.

COROLLARIO.

§. XXI. E poichè $y = K + \frac{x dy}{dx} - \frac{x^2 ddy}{1.2 dx^2} + \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3}$ — ecc. (*Eulero Inst. pag.* 359), se si sostituisca questo valore nell' equazione (D) in luogo della serie infinita, sarà manifestamente

$$\int y = K + Sy - y$$

ch' è l' equazione nota di relazione tra l' integrale $\int y$ della funzione differenziale y, e la somma d' una serie Sy avente la stessa funzione y per termine generale.

SCOLIO.

§. XXII. Questo è il luogo di combinare la Teoria nostra delle serie coll' integrazione delle funzioni differenziali. Riflettendo al modo, che abbiamo adoperato per trovare i termini generali delle serie, si vede, che li abbiamo sempre ricavati dalla differenza di due funzioni di x colle stesse condizioni, con cui si trae la differenza finita, giacchè essendo M il termine generale, si sono sempre determinate due forme y, y' dalla differenza delle quali risulta la forma M, e però deve essere necessariamente $y = \int M$. Ci faremo pertanto a mettere qui alcune di queste integrazioni in via di Corollarj, perchè le si abbiano sotto forme generali, senz' altra fatica, che quella di adattarle a' casi particolari, e servano di norma per le altre.

COROLLARI.

I.° E cominciando dalle funzioni Algebraiche razionali, ed intiere di x, se sia
$M = A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2) + (D + 4Dx + 6Dx^2 + 4Dx^3) \ldots\ldots + \mathfrak{Q}(x+1)^n - \mathfrak{Q}x^n$
sarà
$\int M = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots \mathfrak{Q}x^n +$ cost. arb.
(*Mem. preced. intorno alle serie Cap.* 1. *Probl.* 1.)
Esemp. Sia $M = f^2x + 3gx^2$. Identificando i termini omologhi si avrà $A + B + C = 0$, $2B + 3C = f^2$, $3C = 3g$, e però $A = \frac{g - f^2}{2}$, $B = \frac{f^2 - 3g}{2}$, $C = g$. In conseguenza $\int (f^2x + 3gx^2) = \left(\frac{g - f^2}{2}\right)x + \frac{(f^2 - 3g)x^2}{2} + gx^3$.

II.° Se sia $M = (\pm A \mp AK^b)\, K^{a+bx}$,
sarà $\int M = \pm AK^{a+b(x+1)} +$ cost. arb.
(*Cap.* 11. *Probl. IV*)

III.° Se sia generalmente
$M = \pm K^{a+bx}\left(A' - A'K^b + Ax - AK^b(x+1) + Bx^2 - BK^b(x+1) \ldots\ldots \mathfrak{Q}x^n - \mathfrak{Q}K^b(x+1)^n\right)$
sarà
$\int M = \pm\left(A' + A(x+1) + B(x+1)^2 \ldots\ldots \mathfrak{Q}(x+1)^n\right) K^{a+b(x+1)} +$ cost. arb.
(*Cap.* II. *Probl. V.*

IV.° Se sia $M = \frac{A}{(m+nx)(p+qx)\ldots\ldots(\Delta+\alpha x)}$
cioè una frazione di cui il numeratore è una quantità costante, e il denominatore il prodotto d' un numero qualunque di fattori semplici, sarà

$$\int M = \frac{A}{npq\ldots tw} \int z^{\Delta\alpha-\mu\beta-1} dz \ldots \int z^{\gamma\varepsilon-\rho\zeta-1} dz \int z^{\eta\vartheta-\sigma\iota-1} dz \int \frac{z^{\varkappa\lambda-\tau\upsilon-1} dz}{1-z}$$

$+$ cost. arb.

nella qual' espressione il secondo membro non è un integrale a differenze finite, ma sì bene un integrale a differenze infinitesime. in cui dopo l' integrazione completa debbe esser fatto $z = 1$.

Veggansi per la dimostrazione il Probl. X, Teor. I., Probl. XI. del Cap. V. Nello stesso modo si troverebbero gl' integrali della funzione M, se ella fosse una frazione con de' fattori semplici così al numeratore come al denominatore, dietro a quanto s' è dimostrato nel medesimo Capitolo delle Serie. Ma non di questa sola natura di funzioni considerate come differenziali finiti si può avere l' integrale completo. Tutte quelle che nella nostra teoria delle serie fanno uffizio di termini generali essendo state, in forza del metodo ivi adoperato, risolute in una forma equivalente di due membri colla legge delle differenze finite, ammettono immediatamente integrazione, come chiaramente si può comprenderlo dai casi svolti in questi Corollarj, ch' io tralascio di moltiplicare senza necessità, estendendosi la cosa su tutte le parti del Trattato sopraddetto.

SCOLIO.

§. XXIII. Che se la serie, di cui è termine generale la funzione y, onde si cerca l' integrale, fosse ribelle a tutti i metodi, sicchè la formula

$$\int y = K + Sy - y$$

del §. XXI. non fosse di alcun suffragio, atteso l' inesplicabilità della forma Sy, non manca, come in tanti altri ardui casi delle Scienze Matematiche, il ricorso ad una serie, ch' esprima la funzione Sy con un' infinità

nità di termini. In fatti essendo (*Eulero Inst. pag.* 438.)

$$Sy=(x+1)y-a-\frac{dy}{dx}Sx+\frac{ddy}{1.2dx^2}Sx^2-\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}Sx^3+\text{ecc.}$$

dove a è la quantità, che risulta ponendo $x=0$ nel termine generale y, e Sx, Sx^2 ecc. sono le somme delle successive potenze intere di x, funzioni ricavabili agevolmente dalla teoria delle serie, farà generalmente

$$\int y=K+xy-a-\frac{dy}{dx}Sx+\frac{ddy}{1.2dx^2}Sx^2-\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}Sx^3+\text{ecc.}$$

PROPOSIZIONE VII.

§. XXIV. *Ritrovare l' integrale completo di qualunque funzione logaritmica di* x *col modulo generale delle differenze* $x+X$.

RISOLUZIONE.

Sia $y=l.P$, essendo P qualsivoglia funzione di x. Sarà

$y'-y=\Delta y=\Delta l.P$ $\qquad$ $y-y_{,}=\Delta y_{,}=\Delta l.P_{,}$

$y''-y'=\Delta y'=\Delta l.P'$ $\qquad$ $y_{,}-y_{,,}=\Delta y_{,,}=\Delta l.P_{,,}$

$y'''-y''=\Delta y''=\Delta l.P''$ $\qquad$ $y_{,,}-y_{,,,}=\Delta y_{,,}=\Delta l.Py_{,,}$

ecc. $\qquad$ ecc.

Dunque prendendo le somme all' infinito, si avrà

$y=-\Delta l.P-\Delta l.P'-\Delta l.P''-\text{ecc.}=\Delta l.P_{,}+\Delta l.P_{,,}+\Delta l.P_{,,,}+\text{ecc.}$

e integrando coll' aggiunta della costante K, farà

$$\int y=K-l.P-l.P-l.P-\text{ecc.}=K+l.P_{,}+l.P_{,,}+l.P_{,,,}+\text{ecc.}$$

Ma la somma de' logaritmi di molte quantità è uguale al logaritmo del prodotto continuo di quelle quantità. Dunque

$$\int y=K-l.P.P.P.P'.P''\text{ ecc.}=K+l.P_{,}.P_{,,}.P_{,,,}\text{ ecc.}$$

Se pertanto $\pi'(P)$ fia la caratteriſtica del prodotto continuo de' valori ſucceſſivi di P per incremento, $\pi_{,}(P)$ la caratteriſtica del prodotto continuo de' medeſimi valori per decremento, farà l' integrale completo di qualunque quantità logaritmica

$$\int l.P = K - l.\pi'(P) = K + l.\pi_{,}(P)$$

il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XXV. E perchè $y = -l.\pi'(P) = l.\pi_{,}(P)$, farà $e^{y} = e^{-l.\pi'(P)} = \frac{1}{e^{l.\pi'(P)}} = e^{l.\pi_{,}(P)}$, eſſendo e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico. Ma $e^{l.\pi'(P)} = \pi'(P)$, $e^{l.\pi_{,}(P)} = \pi_{,}(P)$. Dunque $\pi'(P) = \frac{1}{\pi_{,}(P)}$

COROLLARIO II.

§. XXVI. In conſegueuza ſe ſi metta $\frac{1}{P}$ in luogo di P, ſarà

$\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right)} = P$. Imperciocchè eſſendo

$\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{1}{P_{,} P_{,,} P_{,,,}}$ ecc., ſe vi ſi metta $x + X$ in luogo di x, ſarà $\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{1}{P P_{,} P_{,,}}$ ecc.

Dunque $\frac{\pi_{,}(\frac{1}{P})}{\pi_{,}(\frac{1}{P'})} = P$; e ſoſtituendo $\frac{1}{\pi'(\frac{1}{P})}$ in luogo di $\pi_{,}(P)$, ſarà ſimilmente $\frac{\pi'(\frac{1}{P'})}{\pi'(\frac{1}{P})} = P$.

COROLLARIO III.

§. XXVII. Dunque

$$\frac{\pi_{,}(\frac{1}{P})}{\pi_{,}(\frac{1}{P'})} \times \frac{\pi_{,}(\frac{1}{Q})}{\pi_{,}(\frac{1}{Q'})} = PQ$$

$$\frac{\pi_{,}(\frac{1}{P})}{\pi_{,}(\frac{1}{P'})} \times \frac{\pi_{,}(\frac{1}{Q})}{\pi_{,}(\frac{1}{Q'})} \times \frac{\pi_{,}(\frac{1}{R})}{\pi(\frac{1}{R})} = PQR$$

e così ſucceſſivamente

CAPITOLO SECONDO

DELL' INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI FINITE A DUE VARIABILI.

PROPOSIZIONE VIII.

§. XXVIII. *Propoſta l' equazione differenziale* (M) *a differenze finite*

(M).... $Ay + By' + Cy'' + Dy''' +$ ecc..... $+ Ny^n = 0$ *di qualsivoglia grado* n, *qualunque caso sieno i coefficienti* A, B, C ecc. *costanti o funzioni di* x, *determinare per qualsivoglia modulo* $x + X$ *un' equazione generale in* y, X *e coefficienti dati, nella quale trovando* n *valori differenti per* y *soddisfacenti particolarmente all' equazione, si abbia l' integrale completo dell' equazione* (M).

RISOLUZIONE.

Sieno X', X'' ecc. li termini consecutivi ad X ponendo successivamente $x + X$ in luogo di x, e sia $(m') = X$, $(m'') = X + X'$ ecc.
$(m^n) = X + X' + X'' ..... + X^{n-1}$.

Sarà (§. x.)

$$y = y$$

$$y' = y + (m')\frac{dy}{dx} + (m')^2\frac{ddy}{1.2dx^2} + (m')^3\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + (m'')\frac{dy}{dx} + (m'')^2\frac{ddy}{1.2dx^2} + (m'')^3\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

- - - -

$$+\frac{d^n y}{1.2...n dx^n}\left(B(m')^n+C(m'')^n+D(m''')^n+\text{ecc.}\right)...(H)$$

nella quale equazione (m'), (m'') ecc. fono quantità coftanti, o funzioni di x dipendenti dall' incremento X aſſunto. Se dunque ti abbia n valori differenti per y colle riſpettive coſtanti arbitrarie, che ſoddisfacciano a queſt' equazione, eſſendo l' equazione (M) lineare, la ſomma di queſti valori dovrà ſoddisfare all' equazione (M). E perchè queſta ſomma contiene n coſtanti arbitrarie, farà ella neceſſariamente l' integrale completo dell' equazione (M). Il che ecc.

PROPOSIZIONE IX.

§. XXIX. *Propoſta l' equazione differenziale* (M)

$(M)\ldots. Ay+By'+Cy''+\text{ecc.}\ldots.+Ny^n=0$

in cui A, B, C ecc. *ſono quantità coſtanti, e* $x+px$ *il modulo delle differenze, ritrovare il ſuo integrale completo, qualunque ſia il grado dell' equazione, e* p *qualunque coſtante.*

RISOLUZIONE.

Eſſendo $X=px$, farà $X'=(p+p^2)x$, $X''=(p+2p^2+p^3)x$, $X'''=(p+3p^2+3p^3+p^4)x$ ecc. Dunque $X+X'=(m')=(2p+p^2)x$, $X+X'+X''=(m'')=(3p+3p^2+p^3)x$, $X+X'+X''+X'''=(m''')=(4p+6p^2+4p^3+p^4)x$, cioè generalmente $X+X'+X''...+X^{n-1}=(m^n)=\left((p+1)^n-1\right)x$, ſiccome è manifeſto. Soſtituendo queſti valori per (m), (m'') ecc. nell' equazione (H) (§. XXVIII) ella ſi ridurrà a queſta forma.

$$0=y\left(A+B+C+D+\text{ecc.}\right)$$
$$+\frac{dy}{dx}\left(Bpx+C\left((p+1)^2-1\right)x+D\left((p+1)^3-1\right)x+\text{ecc.}\right)$$

$$+\frac{ddy}{1.2dx^2}\Big(Bp^2x^2+C\big((p+1)^2-1\big)^2x^2+D\big((p+1)^3-1\big)^2x^2+\text{ecc.}\Big)$$

$$+\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}\Big(Bp^3x^3+C\big((p+1)^2-1\big)^3x^3+D\big((p+1)^3-1\big)^3x^3+\text{ecc.}\Big)$$

$$+\frac{d^ny}{1.2..ndx^n}\Big(Bp^nx^n+C\big((p+1)^2-1\big)^nx^n+D\big((p+1)^3-1\big)^nx^n+\text{ecc.}\Big)$$

Si finga $y=Kx^z$, essendo K, a costanti indeterminate.

Sarà $dy=aKx^{a-1}dx$, $ddy=a(a-1)Kx^{a-2}dx^2$ .... $d^ny=a(a-1)...(a-n+1)Kx^{a-n}dx^n$. E però sostituendo questi valori, e dividendo l'equazione per Kx^a, si avrà

$$(N)...\ o=A+B+C+\text{ecc.}+a\Big(Bp+C\big((p+1)^2-1\big)+D\big((p+1)^3-1\big)+\text{ecc.}\Big)$$

$$+\frac{a(a-1)}{1.2}\Big(Bp^2+C\big((p+1)^2-1\big)^2+D\big((p+1)^3-1\big)^2+\text{ecc.}\Big).....$$

$$+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\Big(Bp^3+C\big((p+1)^2-1\big)^3+D\big((p+1)^3-\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

$$+\text{ecc.}$$

cioè l'equazione ordinata (N)

$$(N)...o=A+B+C+D+\text{ecc.}+B\Big(ap+\frac{a(a-1)}{1.2}p^2+\frac{a(a-1)(aa-2)}{1.2.3}p^3+\text{ecc.}\Big)$$

$$+C\Big(a\big((p+1)^2-1\big)+\frac{a(a-1)}{1.2}\big((p+1)^2-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^2-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

$$+D\Big(a\big((p+1)^3-1\big)+\frac{a(a-1)}{1.2}\big((p+1)^3-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^3-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

$$+N\Big(a\big((p+1)^n-1\big)+\frac{a(a-1)}{1.2}\big((p+1)^n-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^n-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

Ora essendo $(1+Z)^a=1+aZ+\frac{a(a-1)}{1.2}Z^2$

$+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}Z^3+$ ecc. se alle ferie si sostituiscano i va-

lori finiti corrifpondenti, fi avrà

$$o = A + B + C + D + \text{ecc.} B\big((p+1)^{\alpha} - 1\big) + C\big((p+1)^{2\alpha} - 1\big) + D\big((p+1)^{3\alpha} - 1\big) + \text{ecc.}$$

cioè

$$o = A + B(p+1)^{\alpha} + C(p+1)^{2\alpha} + D(p+1)^{3\alpha} + \text{ecc.}$$

e poſto $(p+1)^{\alpha} = z$, riſulterà l' equazione determinata (N)

$$(N) \ldots\ o = A + Bz + Cz^2 + Dx^3 + Ez^4 + \ldots\ Nz^n$$

la quale fomminiſtra n valori differenti per $a = \frac{l.z}{l.(p+1)}$, ſecondo il grado n dell' equazione da integrare. Se ſieno pertanto c, c', c'' ecc. queſti valori, prendendo per l' arbitraria K un numero n di valori diverſi K, K', K'' ecc. poichè l' equazione (M) è lineare, farà il ſuo integrale completo

$$y = Kx^{c} + K'x^{c'} + K''x^{c''} + K'''x^{c'''} + \text{ecc.}$$

Il che ecc.

LEMMA.

§. XXX. Eſſendo e il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità, le ſeguenti equazioni debbono aver luogo, qualunque coſa ſia m

$$e^{m} - 1 = m + \frac{m^2}{1.2} + \frac{m^3}{1.2.3} + \frac{m^4}{1.2.3.4} + \text{ecc.}$$

$$e^{2m} - 1 = 2m + \frac{4m^2}{1.2} + \frac{8m^3}{1.2.3} + \frac{16m^4}{1.2.3.4} + \text{ecc.}$$

ecc. . . . . .

$$e^{nm} - 1 = nm + \frac{n^2m^2}{1.2} + \frac{n^3m^3}{1.2.3} + \frac{n^4m^4}{1.2.3.4} + \text{ecc.}$$

Veggaſene la dimoſtrazione nell' Introduz. all' An. degl' Infin. del Sig. *Eulero*.

PROPOSIZIONE X.

§. XXXI. *Trovare l'integrale completo dell'equazione differenziale* (A) *di qualsivoglia grado n*

$(A) \ldots . Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \text{ecc.} \ldots\ldots + My^n = 0$

in cui A, B, C ecc. *sono quantità costanti, e il modulo delle differenze è* $x + a$.

RISOLUZIONE.

Essendo in questo caso (§. x.)

$$y' = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2d^2y}{1.2dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + \frac{2ady}{dx} + \frac{4a^2d^2y}{1.2dx^2} + \text{ecc.}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$y^n = y + \frac{nady}{dx} + \frac{n^2a^2d^2y}{1.2.dx^2} + \text{ecc.}$$

si sostituiscano questi valori per y, y'' ecc. nell'equazione (A). Si avrà dopo la conveniente ordinazione de' termini l'equazione (B)

$$(B) \ldots . 0 = (A + B + C + D + \text{ecc.})\, y$$
$$+ (aB + 2aC + 3aD + 4aE + \text{ecc.}) \frac{dy}{dx}$$
$$+ (a^2B + 4a^2C + 9a^2D + 16a^2E + \text{ecc.}) \frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+ (a^3B + 8a^3C + 27a^3D + 64a^3E + \text{ecc.}) \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$

- -

$$+ (a^nB + 2^na^nC + 3^na^nD + 4^na^nE + \text{ecc.}) \frac{d^ny}{1.2\ldots ndx^n}$$

E posto $y = Ke^{bx}$, essendo K, b costanti indeterminate,

te, ed e il numero, che ha l'unità per logaritmo iperbolico, si avrà, sostituendo i valori di y, dy, ecc. e togliendo il fattor comune Ke^{bx}, l'equazione (C)

$$(C) \ldots\ldots o = A + B + C + D + \text{ecc.}$$
$$+ B\left(ab + \frac{a^2b^2}{1.2} + \frac{a^3b^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{a^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$
$$+ C\left(2ab + \frac{4a^2b^2}{1.2} + \frac{8a^3b^3}{1.2.3} \cdots + \frac{2^na^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$
$$- -$$
$$+ M\left(nab + \frac{n^2a^2b^2}{1.2} + \frac{n^3a^3b^3}{1.2.3.} \cdots + \frac{n^na^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$

cioè pel Lemma (§. xxx.) l'equazione (D)

$$(D) \ldots A + Be^{ab} + Ce^{2ab} + De^{3ab} + Ee^{4ab} + \text{ecc.} \ldots + Me^{nab} = o$$

oppure, posto $e^{ab} = z$, l'equazione (E)

$$(E) \ldots A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ecc.} \ldots + Mz^n = o$$

Quest'equazione essendo del grado n, è manifesto, ch'ella somministrerà n valori differenti di z, che chiameremo p, p', p'' ecc., e in conseguenza n valori di b, i quali saranno $\frac{l.p}{a}$, $\frac{l.p'}{a}$, $\frac{l.p''}{a}$, ecc. E come il coefficiente K non entra in quest'equazione, così resta egli intieramente arbitrario, sì che prendendo per K un numero n di coefficienti diversi K, K', K'', ecc. come nella Prop. IX., si avrà n valori diversi di y, cioè

$Ke^{\frac{x}{a}l.p}$, $K'e^{\frac{x}{a}l.p'}$ ecc. Essendo pertanto l'equazione (A) lineare, la somma di questi valori dovrà soddisfare all'equazione, di modo che l'equazione $y = Ke^{\frac{x}{a}l.p}$ $+ K'e^{\frac{x}{a}l.p'}$ $+ K''e^{\frac{x}{a}l.p''}$ $+$ ecc. oppure

$y = K(p)^{x:a} + K'(p')^{x:a} + K''(p'')^{x:a} +$ ecc., contenendo n costanti arbitrarie K, K' ecc., sarà l'integrale completo dell' equazione (A) del grado n. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XI.

§. XXXII. *Proposta l' equazione differenziale finita* (A) . . . . $My + Ny' = o$
essendo M, N *funzioni di* x *qualunque, e generalmente il modulo delle differenze* $x + X$, *ritrovare l' integrale completo dell' equazione* (A).

RISOLUZIONE.

Si finga essere $y = Ke^{A(x)}$, essendo K un' indeterminata costante, $A(x)$ funzione indeterminata di x, e il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità. Sarà $y' = Ke^{A(x+X)}$. Ma $A(x+X) - A(x) = \Delta A(x)$ (§. II.). Dunque $y' = Ke^{A(x)+\Delta A(x)}$. Si sostituiscano questi valori nell' equazione (A), e si avrà $MKe^{A(x)} + NKe^{A(x)+\Delta A(x)} = o$, ove fatta la divisione si ottiene $M + Ne^{\Delta A(x)} = o$, in cui non entrando l' indeterminata K resta ella intieramente arbitraria. Dunque $e^{\Delta A(x)} = 1 - \frac{M+N}{N}$, e $\Delta A(x) = l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)$.

Integrando pertanto, sarà $A(x) = \int l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)$.

E però $y = Ke^{\int l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)}$.

Ma $\int l.\left(1-\frac{M+N}{N}\right)=l.\pi_{,}\left(1-\frac{M+N}{N}\right)$ (§. XXXIV).

Dunque

$y=K\,\pi_{,}\left(1-\frac{M+N}{N}\right)$ farà l'integrale completo dell' equazione (A). Il che ecc.

PROPOSIZIONE XII.

§. XXXIII. *Propoſta l' equazione differenziale precedente*

(A) . . . . $My+Ny'=o$

trovare i differenti moduli $x+X$, *a' quali corriſponde per* y *una funzione algebraica di* x *razionale ed intera.*

RISOLUZIONE.

Poichè ſi è dimoſtrato eſſere per qualſivoglia incremento X (§. VIII.)

$$y'=y+\frac{Xdy}{dx}+\frac{X^{2}ddy}{1.2.dx^{2}}+\text{ecc.}$$

ſoſtituendo queſto valore nell' equazione propoſta (A). farà

$$(A)\ldots o=(M+N)y+N\left(\frac{xdy}{dx}+\frac{X^{2}ddy}{1.2.dx^{2}}+\text{ecc.}\right)$$

Ora, qualunque funzione algebraica razionale ed intera poſſa eſſere l'integrale dell' equazione (A), è certo che ſoſtituita per y, e ſuoi differenziali nell' equazione (A'), ſe ſia n l'eſponente della maſſima poteſtà di x farà $d^{n+1}y$ con tutti i differenziali ſucceſſivi $=o$. L' equazione dunque (A') in x ed X diverrà finita, e conſiderando X come un' incognita, aſcenderà ella al grado λ^{n}, sì che ſi avrà per X un numero n di valori $=X.(X)_{,}.(X)_{,,}$ ecc. in x e coſtanti che ſoddisfaranno

all' equazione, e però un numero n di moduli $x+X$, $x+(X)$, $x+((X))$ ecc. a' quali corrisponderà una stessa funzione per y algebraica razionale ed intera del grado n.

Posto ciò, se si faccia per ordine

$ddy = 0$, si ha $y = a + bx$

$d^3y = 0 \ldots . y = a + bx + cx^2$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$d^{n+1}y = 0 \ldots . y = a + bx + cx^2 + \text{ecc.} \ldots mx^n$

Sostituendo pertanto questi valori di y successivamente nell' equazione (A'), prende ella queste forme

$(1) \ldots 0 = (M+N)(a+bx) + bNX$

$(2) \ldots 0 = (M+N)(a+bx+cx^2) + (b+2cx)NX + cNX^2$

- -

$(m) \ldots 0 = (M+N)(a+bx+cx^2 \ldots . mx^n) + NX(b+2cx + 3dx^2 + 4ex^3 \ldots . nmx^{n-1}) + NX^2(2c + 2.3dx + 3.4ex^2 \ldots . n(n-1)mx^{n-2}) + \text{ecc.}$

le quali somministrano evidentemente i diversi valori di X ai quali corrisponde per y una stessa funzione algebraica di x razionale ed intiera della forma

$a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$ ecc.

In fatti se si ponga nel modulo il valore di X tratto dall' equazione (1.) farà $y = a + bx$. Similmente avendo X due valori X, (X) nell' equazione (2) è chiaro che per entrambi i moduli $x+X$, $x+(X)$ risulta $y = a + bx + cx^2$. E così successivamente traendo dall' equazione generale (M) un' equazione in X del grado n, da tutti li n valori di X risulterà un numero n di moduli, ai quali corrisponderà per y la stessa funzione algebraica razionale ed intiera $a + bx + cx^2 + ex^3 \ldots + mx^n$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XXXIV. Non potrà pertanto essere y funzione algebraica razionale ed intera di x, coll'incremento X

costante, se sieno M N quantità costanti. E potrà esserlo solamente, in supposizione di M N costanti, sempre che sia variabile l' incremento.

COROLLARIO II.

§. XXXV. Ma qualunque cosa sieno M N, se sia $x\sqrt[n]{\left(-\frac{M}{N}\right)}$ il modulo delle differenze, sarà $y = Kx^n$ l' integrale completo dell' equazione $My + Ny' = o$, essendo K una costante arbitraria, com' è facile cosa l' accertarsene col calcolo.

PROPOSIZIONE XIII.

§. XXXVI. *Proposta l' equazione differenziale* (A) $(A) \ldots\ldots o = My + Ny' + Py'' + Qy''' + \text{ecc.}$ *del grado* n, *essendo* M, N, P, Q ecc. *costanti o variabili, come si vuole, trovare le equazioni degl' incrementi, ai quali corrisponde per* y *una data funzione di* x *algebraica razionale ed intiera.*

RISOLUZIONE.

Assunta generalmente per y l'equazione (B)
$(B) \ldots\ldots y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \text{ecc.} \ldots\ldots + mx^n$
il metta in ogni termine successivamente per x il modulo $x + X$, indi $x + X + X'$, $x + X + X' + X''$ ecc. fino ad $x + X + X \ldots\ldots + X^{n-1}$ corrispondentemente al grado n dell' equazione (A). Si avrà
$o = (a + bx + cx^2 + \text{ecc.} \ldots\ldots + mx^n)M$
$+(a+b(x+X)+c(x+X)^2+e(x+X)^3+\text{ecc.}\ldots\ldots+m(x+X)^n)N$
$+(a+b(x+X+X')+c(x+X+X')^2+e(x+X+X')^3+\text{ecc.}\ldots$
$+m(x+X+X')^n)P + \text{ecc.}$
equazione generale, che abbraccia tutte le equazioni

degl' incrementi ricercate. Imperciocchè, se sia l'equazione (A) del secondo grado, sarà $\mathfrak{Q}$ con tutti gli altri coefficienti $=o$. In conseguenza l'equazione degl' incrementi, a' quali corrisponde per y la funzione semplice $a+bx$, sarà (C)

$(C)....o=(M+N+P)a+(M+N+P)bx+(N+P)bX+PbX'$

Similmente l'equazione degl' incrementi, a' quali corrisponde per y la funzione biforme $a+bx+cx^2$, sarà (D)

$(D)..o=(M+N+P)a+(M+N+P)bx+(M+N+P)cx^2$
$+(Nb+2Ncx+Pb+2Pcx)X+(Nc+Pc)X^2$
$+(Pb+2Pcx)X'+PcX'^2+2PcXX'$

e così successivamente per tutte le altre. Nello stesso modo si determineranno le Equazioni successive degl' incrementi per un' equazione (A) del terzo grado, del quarto ecc. a' quali corrisponde per y una funzione di x razionale ed intiera semplice, biforme, triforme ecc., come dovea trovarsi.

COROLLARIO.

§. XXXVII. Si scorge quindi I. che le equazioni degl' incrementi sono anch'esse differenziali finite, ma di grado $n-1$, cioè prossimo inferiore al grado dell' equazione (A). II. che non può mai avere y valore algebraico razionale ed intiero con incremento costante, se tutti li coefficienti M, N, P. ecc. sieno quantità costanti; ed essendo essi quantità costanti, l'incremento dovrà necessariamente essere variabile.

SCOLIO.

§. XXXVIII. L' introduzione de' moduli variabili $x+X$, e l' uso fatto delle espressioni differenziali

$$y+A\frac{dy}{dx}+B\frac{ddy}{dx^2}+C\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ecc.}$$

procedenti all'infinito, ci portano naturalmente a ſcoprire una connessione non attesa, che può avere un'infinità di queste espressioni coll'equazioni differenziali a differenze finite, essendo anche A, B ecc. coefficienti variabili. Non senza ragione parlando il Sig. *Eulero*, nel II. Vol. del suo Calcolo Integrale pag. 459, dell'equazione differenziale

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \text{ecc. all'infinito,}$$

e di un comodo modo di esprimere il suo Integrale, asserisce, ch'ella è cosa, *altioris indaginis, neque adhuc ad hunc scopum Analyseos fines satis videntur promoti*. Riflettendo pertanto alla riduzione fattasi in questa Memoria dell'integrazione così di funzioni semplici, come di equazioni a differenze finite, all'integrazione di simili espressioni scorrenti all'infinito, e alla variabilità, onde possono essere affetti i coefficienti de' termini, che le compongono, attesa la variabilità de' moduli delle differenze, non è difficile, che meritar possa l'attenzione de' Geometri un sì fatto legame, per cui l'integrazione di un'infinità di simili equazioni d'infiniti termini dipende da quella di equazioni differenziali finite incomparabilmente più trattabili, che quelle non sono.

PROPOSIZIONE XIV.

§. XXXIX. *Proposta l'equazione differenziale*

$$(A) \ldots . My + Ny' = Q$$

a differenze finite con qualsivoglia modulo $y + X$, *essendo* M, N, Q *funzioni qualunque di* x *o costanti, come si vuole, trovare il suo integrale completo.*

RISOLUZIONE.

Si finga $y = A(x)\,B(x)$, essendo $A(x)$, $B(x)$ funzioni di x indeterminate. Sarà differenziando $\Delta y = \Delta A(x)\,B(x)$. Ma
$\Delta y = y' - y$, $\Delta A(x)\,B(x) = A(x+X)B(x+X) - A(x)B(x)$, e $A(x+X) = A(x) + \Delta A(x)$, $B(x+X) = B(x) + \Delta B(x)$ (§. 11).
Dunque $y' - y = \big(A(x) + \Delta A(x)\big)\big(B(x) + \Delta B(x)\big) - A(x)\,B(x)$, e però $y' = A(x)\Delta B(x) + B(x)\Delta A(x) + \Delta A(x)\Delta B(x)$.
Sostituendo pertanto nell' equazione (A) i valori di y, y', e posto $A(x) = R$, $B(x) = T$, si avrà
$MRT + NR\Delta T + MT\Delta R + N\Delta R\Delta T = \mathfrak{Q}$;
e poichè due sono le funzioni indeterminate, si assumano le due equazioni

(I) $MRT + NR\Delta T = 0$

(II) $NT\Delta R + N\Delta R\Delta T = \mathfrak{Q}$.

Dalla prima risulta $MT + N\Delta T = MT + NT' - NT = (M-N)T + NT' = 0$, $T = \pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)$ (§. XXXII),

$\Delta T = -\frac{MT}{N}$, e però $T + \Delta T = \pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right) - \frac{MT}{N}$.

Sostituendo questi valori nell'equazione (II) si avrà

$\Delta R = \frac{\mathfrak{Q}}{N(T+\Delta T)} = \frac{\mathfrak{Q}}{(M-N)\pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)}$, e però integrando

$R = \int\left(\mathfrak{Q} : (M-N)\pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)\right)$. Dunque

$y = RT = \pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(K + \int\left(\mathfrak{Q} : (M-N)\pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)\right)\right)$

sarà l' integrale completo dell' equazione (A) essendo K la costante arbitraria. Il che ecc.

SCOLIO

SCOLIO.

§. XL. E' facile comprendere, che non può mai averfi il valore eſplicito della funzione y, ſe non ſi aſſegni l' integrale della funzione $\frac{\mathfrak{Q}}{M-N}\pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)$ eſſendo $x+X$ il modulo della differenza finita. E perchè avremo occaſione di vedere in ſeguito, che di ſomiglianti parti integrali è compoſto l' integrale completo dell' equazioni differenziali di grado ſuperiore al primo, ſembra che non poſſa mai abbaſtanza coltivarſi il calcolo integrale delle funzioni ſemplici, ſu cui ci ſiamo trattenuti nel Cap. precedente, per quello che dall' eſtenſione di queſto, ſecondo differenti moduli, dipenderà ſempre l' eſtenſione e il progreſſo del Calcolo integrale dell' equazioni differenziali.

PROPOSIZIONE XV.

§. XLI. *Propoſta generalmente l' equazione differenziale finita* (A)

$(A)\ldots\ldots \mathfrak{Q} = Ay + By' + Cy'' + \text{ecc.}$

nella quale A, B, C *ecc. e* Q *ſono funzioni di* x, e $x+X$ *è il modulo delle differenze, definire il ſuo Integrale completo, o la ſua riduzione generale.*

RISOLUZIONE.

Si ponga I. $y' = zy + v$, eſſendo z ed v funzioni di x indeterminate.

Mettendo ſucceſſivamente $x+X$ in luogo di x, farà

II. $y'' = z'y' + v'$

III. $y''' = z''y'' + v''$

IV. $y'''' = z\,y''' + v'''$

ecc.

Si sostituisca nella II. equazione il valore di y' tratto dalla I., e si avrà l'equazione (a)

$(a)\ y'' = z'zy + z'v + v'$

e sostituendo nella III. il valore di y'' tratto dall'equazione (a), si avrà l'equazione (b)

$(b)\ y''' = z''z'zy + z'z'v + z''v' + v''$

Continuando a fare queste successive sostituzioni per determinare i valori di y'', y''' ecc. si scuopre con facilità essere generalmente

$y^n = yz.z....z^{n-1} + vz'.z''....z^{n-1} + v'z''.z'''....z^{n-1}$
$+ v''z'''.z''''....z^{n-1} + v'''z''''z'''''.....z^{n-1} +$ ecc.

Adunque mettendo i valori successivamente di y', y'' ecc. nell'equazione (A), si avrà l'equazione (B)

$(B).....\mathbb{Q} = Ay$
$+ Bzy + Bv$
$+ Cz'.zy + Cz'v + Cv'$
$+ Dz''.z'.zy + Dz''.z'v + Dz''v' + Dv''$
$+ Ez'''.z''.z'.zy + Ez'''.z''.z'v + Ez'''.z''v' + Ez'''v'' + Ev'''$
$+ Fz''''.z'''.z''.z'.zy + Fz''''.z'''.z''.zv + Fz''''.z'''.z'v'$
$+ Fz''''.z'''.v'' + Fz''''.v''' + Fv''''$ + ecc.

Essendo pertanto due le funzioni indeterminate, si ponga $= o$ la prima serie verticale de' termini, cioè l'aggregato di tutti i termini, ne' quali entra la funzione y, e l'aggregato di tutti gli altri $= \mathbb{Q}$. E però dividendo la prima equazione per y, si avrà

$(C).....o = A + Bz + Cz.z' + Dz.z'.z'' + Ez.z'.z''.z''' +$ ecc.
$(D)..... \mathbb{Q} = (B + Cz' + Dz'.z'' + Ez'.z''.z''' +$ ecc.$)v$
$+ (C + Dz'' + Ez''.z''' + Fz''.z'''.z'''' +$ ecc.$)v'$
$+ (D + Ez''' + Fz'''.z'' +$ ecc. . . . . $)v''$
$+ (E + Fz'''' +$ ecc. . . . . $)v'''$
ecc.

Posto ciò, si supponga $z = \frac{r'}{r}$, essendo r una nuova funzione di x indeterminata. L'equazione (C) prende questa forma.

$$o = A + B\frac{r'}{r} + C\frac{r'}{r}\cdot\frac{r''}{r'} + D\frac{r'}{r}\cdot\frac{r''}{r'}\cdot\frac{r'''}{r''} + \text{ecc.}$$

cioè questa

$$o = A + B\frac{r'}{r} + C\frac{r''}{r} + D\frac{r'''}{r} + E\frac{r''''}{r} + \text{ecc.}$$

la quale, fatta la moltiplicazione per r, diventa (E)

$(E)\ldots\ldots o = Ar + Br' + Cr'' + Dr''' + \text{ecc.}$

e se si faccia la stessa sostituzione nell'equazione (D), si ottiene l'equazione (F)

$$(F)\ldots\ldots \mathfrak{Q} = \left(B + C\frac{r''}{r'} + D\frac{r'''}{r'} + E\frac{r''''}{r'} + \text{ecc.}\right)v$$
$$+ \left(C + D\frac{r'''}{r''} + E\frac{r''''}{r''} + F\frac{r'''''}{r''} + \text{ecc.}\ldots\right)v'$$
$$+ \left(D + E\frac{r''''}{r'''} + F\frac{r'''''}{r'''} + \text{ecc.}\ldots\ldots\right)v''$$
$$+ \left(E + F\frac{r'''''}{r''''} + G\frac{r''''''}{r''''} + \text{ecc.}\ldots\ldots\right)v'''$$
$$+ \text{ecc.}$$

L'integrazione pertanto dell'equazione (A) dipende dall'integrazione delle equazioni (E), (F), la prima delle quali è dello stesso grado n dell'equazione (A), oppure lo stesso, che l'equazione (A) in supposizione di $\mathfrak{Q} = o$, sol che si metta r in luogo di y, e la seconda del grado $n-1$, siccome è manifesto. Se dunque I. si abbia per r un valore, che soddisfaccia all'equazione (E), e il si sostituisca in (F), co' suoi valori successivi r', r'' ecc. ponendo cioè in r successivamente $x + X$, $x + X + X$ ecc. in luogo di x, dipenderà l'integrazione dell'equazione (A) dall'integrazione dell'equazione (F) del grado prossimo inferiore $n-1$. II. Se si abbiano due valori differenti per r nell'equazione (E), e li sostituiscano successivamente in (F), risultandone due equazioni, si potrà eliminare la funzione

v^{n-1}, ſicchè l'integrazione dell'equazione (A) dipenderà da un'equazione del grado $n-2$, e così in ſeguito. Se dunque ſi abbia per r un numero n di valori differenti a, a', a'' ecc. nell'equazione (E), ſi potrà trovare l'integrale completo dell'equazione (A). Imperciocchè dalle ſoſtituzioni ſucceſſive di queſti valori nell'equazione (F) riſultando n equazioni differenti, ſi potranno eliminare ſucceſſivamente le funzioni v^{n-1}, v^{n-2} ecc. e determinare il valore finito di v. Ripigliando poi l'equazione $y' = zy + v$, e ſoſtituendovi ſucceſſivamente li n valori di $\frac{r'}{r}$ in luogo di z, e il valore di v, ſi avrà un numero n di equazioni di primo grado, le quali riſolute col metodo della Propoſizione XIV. daranno n valori differenti di y, sì che eſſendo l'equazione (A) lineare, queſti valori preſi inſieme coſtituiranno il ſuo integrale completo, contenendo di fatto n coſtanti arbitrarie. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XLII. Se ſi abbia pertanto l'integrale completo dell'equazione (A) in ſuppoſizione di $\Omega = o$, con che ſi ha pure l'integrale completo dell'equazione (E), contenendo egli un numero n di coſtanti arbitrarie, baſterà fare ſucceſſivamente tutte queſte coſtanti, meno una, eguali a zero. Si avranno per queſto mezzo n valori particolari di r, ſoddisfacenti all'equazione (E), e di più compreſi nell'integrale generale, ſicchè operando come qui ſopra, ſenza aggiugnere nuove coſtanti arbitrarie, ſi avrà l'integrale completo dell'equazione (A).

COROLLARIO II.

§. XLIII. Reſta dunque pienamente dimoſtrato, che l'equazione (A)

$(A)\ldots.\mathfrak{Q}=Ay+By'+Cy''+Dy'''+$ ecc.

farà completamente integrabile tutte le volte che ſi avranno n valori differenti di y, o l'integrale completo dell'equazione (A) in ſuppoſizione di $\mathfrak{Q}=o$.

SCOLIO.

§. XLIV. Queſto è il Teorema del Sig. de la *Grange*, ch'egli dimoſtrò prima per le equazioni a differenze infinitesime nel III. Volume degli *Atti della Società Reale di Torino*. Dimoſtrarono in ſeguito aver egli luogo anche nell' equazioni a differenze finite cogl' incrementi coſtanti il Sig. Marcheſe de *Condorcet*, e il Sig. de la *Place*, e lo dimoſtrò pure ultimamente il Sig. de la *Grange* negli *Atti della Società Reale di Berlino* per l'anno 1775. Ora il ſi è dimoſtrato di bel nuovo per altra via, e per qualſivoglia modulo $x+X$ delle differenze, e l'ho fatto pure con queſto ſteſſo metodo per le equazioni lineari a differenze infinitesime. Ancorchè l'ultimo metodo immaginato dal Sig. de la *Grange* ſia ſommamente ingegnoſo, ſembra che in ſemplicità almeno non ceda il preſente a qualunque altro nell' uno e nell'altro genere di equazioni differenziali.

PROPOSIZIONE XVI.

§. XLV. *Propoſta l'equazione differenziale finita* (A) $(A)\ldots.\mathfrak{Q}=Ay+By'+Cy'+Dy''+$ ecc.

in cui Q *è funzione di* x, A, B, C, ecc. *ſono quantità coſtanti*, $x+X$ *il modulo generale*, *ritrovare il ſuo integrale completo*.

RISOLUZIONE.

Poſto come prima I. $y'=ay+v$, eſſendo v funzione indeterminata di x, a coſtante indeterminata; farà variando

$y'' = ay' + v'$
$y''' = ay'' + v''$
ecc.

e facendo le ſucceſſive ſoſtituzioni, come nella preced. Propoſ. ſarà

$y'' = a^2y + av + v'$
$y''' = a^3y + a^2v + av' + v''$
$y'''' = a^4y + a^3v + a^2v' + av'' + v'''$
ecc.

e però ſoſtituendo queſti valori nell' equazione (A), ſi avrà l' equazione ſeguente

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q} = {} & Ay \\ & + Bay + Bv \\ & + Ca^2y + Cav + Cv' \\ & + Da^3y + Da^2v + Dav' + Dv'' \\ & \text{ecc.} \end{aligned}$$

e in ſeguito le due equazioni (B), (C)

$$(B) \ldots o = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + Ea^4 + \text{ecc.}$$
$$(C) \ldots \mathfrak{Q} = (B + Ca + Da^2 + Ea^3 + \text{ecc.})\, v + (C + Da + Ea^2 + \text{ecc.} \ldots)\, v' + (D + Ea + Fa^2 + \text{ecc.} \ldots)\, v'' \quad \text{ecc.}$$

delle quali la (C) è del grado $n - 1$, e può ridurſi alla forma

$$(D) \ldots \mathfrak{Q} = A'v + B'v' + C'v'' + D'v''' + \text{ecc.}$$

eſſendo A', B', C' ecc. funzioni coſtanti di a, B, C ecc.. E' facile I. a vederſi, come nella Prop. precedente, che riſolvendo l' equazione determinata (B) ſi conſeguiſcono n valori differenti per l' indeterminata a, la quale aſcende al grado dell' equazione propoſta (A); e però facendone ſucceſſivamente la ſoſtituzione nell' equazione (D), onde ottenere n equazioni, ſi può (§. XLI) pervenire ad un valore finito di v. Dato queſto valore, che diremo P, ſi poſſono formare coll' equazione

$$y' = ay + P$$

n equazioni differenti, ponendovi ſucceſſivamente li n

valori di a tratti dall' equazione (B), e trovando n valori differenti di y colle rispettive costanti arbitrarie, si può ottenere col loro aggregato l' integrale completo dell' equazione (A). II. Ma si può tenere ancora un' altra strada. Imperciocchè, essendo l' equazione (D) del grado $n-1$, la si tratti come l' equazione (A), facendo

$$\text{II. } v' = bv + q$$

essendo b una nuova costante indeterminata, q una nuova funzione di x. Si otterranno le due equazioni

$(B')\ldots. 0 = A' + B'b + C'b^2 + D'b^3 + \text{ecc.}$

$(D')\ldots. \Omega = A'q + B'q' + C'q'' + D'q''' + \text{ecc.}$

essendo A', B' ecc. funzioni costanti di A', B' ecc., e di b, e l' equazione (D') sarà del grado $n-2$. Di nuovo trattando l' equazione (D), come l' equazione (A), ponendo

$$\text{III. } q' = cq + r$$

essendo c indeterminata costante, r funzione di x, si avranno le due equazioni

$(B'')\ldots. 0 = A'' + B''c + C''c^2 + D''c^3 + \text{ecc.}$

$(D'')\ldots. \Omega = A'' + B''r' + C''r'' + D''r''' + \text{ecc.}$

delle quali la (D'') è del grado $n-3$, A'', B'' ecc. funzioni costanti di A'', B'' ecc. e di c; e così proseguendo si potrà pervenire ad un' equazione (D^n) del grado $n-n$. Sia per facile intelligenza (D^n) quest' equazione finale. Si avrà un valore finito per r. Dunque si otterrà il valore di q dall' equazione III. con una costante arbitraria. Ma essendo data la funzione q si avrà dall' equazione II. un valore di v con una nuova costante arbitraria, cioè l' integrale completo dell' equazione (A), avendovi n costanti arbitrarie, sol che si determinino le costanti a, b, c. Basta pertanto trovare una radice unica per a dall' equazione (B), un' altra per b dall' equazione (B'), ed una terza per c dall' equazione (B''), cioè in generale una sola radice per ciascheduna delle equazioni determinate (B), (B'), (B'')

ecc.; e si avrà per questo mezzo l'integrale completo dell' equazione (A). Tutte le volte dunque, che queste equazioni determinate possono darci una sola radice reale per ciascheduna, il metodo ci esenta dalla considerazione così delle radici eguali, come dalle immaginarie, che potrebbero aver luogo nell' equazione determinata (B), attenendosi alla sua sola risoluzione, come s' è praticato finora in casi simili. Il che ecc.

SCOLIO I.

§. XLVI. Il Metodo semplicissimo usato nelle Proposizioni XV, e XVI non è altramente ristretto al modulo comune $x+1$, siccome quello che si estende su d' ogni sorta d' incremento, anche variabile. Il caso di avere riguardo alla natura del modulo si riduce al momento di assegnare valori espliciti agl' integrali delle funzioni semplici differenziali $\int M;\pi,\left(\frac{1}{M}\right)$ ecc., cosa che segnatamente appartiene al Cap. precedente, e di cui s' è fatto parola al §. XL.

SCOLIO II.

§. XLVII. Osservo, che nella Teoria dell' equazioni lineari a differenze infinitesime espresse generalmente dall' equazione (A)

$$(A)\ldots\ldots \Omega = y + \frac{Ady}{dx} + \frac{Bddy}{dx^2} + \frac{Cd^3y}{dx^3} + \text{ecc.}$$

tutti gli Analisti si sono limitati al caso de' coefficienti A, B, C ecc. costanti; e nella supposizione che A, B ecc. sieno funzioni della variabile x, si sono contentati di enunciare, che dato l' integrale generale dell' equazione (A) in supposizione di $\Omega = 0$, o dato un numero n, o $n-1$ almeno, d' integrali particolari di quell'

quell' equazione in tale ipotesi. si conseguisce l' integrale completo dell' equazione (*A*). Ma non si è tentato ancora cosa alcuna di generale su questo proposito. Lo stesso è accaduto dell' equazione differenziale (*A'*) a differenze finite.

(*A*).... $\Omega = y + Ay' + By'' + Cy''' +$ ecc.

E' vero, come dice il Sig. de la *Grange* (*Mem. dell' Accad. Reale di Berlino* 1775), che non è possibile il farlo *a priori* con alcun metodo cognito; ma si può bene non senza frutto mettere in opera più d' un artifizio indiretto. Mi accingo qui pertanto a fare qualche primo passo, che non sarà per avventura del tutto infruttuoso, non mai con intenzione di prevenire questo Illustre Geometra, se mai continuasse nel suo proposito di farne soggetto delle sue meditazioni, ma perchè l' occasione il richiede. Facendo considerazione, che l' equazione lineare del primo grado

$$My + Ny' = 0$$

ammette generalmente una risoluzione di questa forma (§. XXXII)

$$y = K\pi_1\left(-\frac{M}{N}\right)$$

qualunque funzione di x sieno M, N; e che per essere lineare l' equazione generale può il suo integrale generale essere composto dell' aggregato di un numero n d' integrali di questa forma, essendo ella forse, se non esclusiva, almeno la forma che affettano per lo più gl' integrali di queste equazioni ne' casi d' integrabilità, che ci sono in potere, mi parve che si potesse per questo mezzo aprire un campo vastissimo all' integrazione di tutte le equazioni, che fossero differenziali esatti di qualche integrale d' una tal forma generale.

Eccone un Saggio.

PROPOSIZIONE XVII.

§. XLVIII. *Trovare tutte le equazioni differenziali a differenze finite, e a coefficienti variabili, fuscettibili d' Integrale completo d' una data forma generale.*

RISOLUZIONE.

Si assumano le equazioni differenziali (II), (III), (IV) ecc. di grado in grado, negletto il primo, compresse nell' equazione generale (*A'*)

$$(A')\ldots\ o = y + Ay' + By'' + Cy''' + Dy'''' + \text{ecc.}$$

ma sotto una forma indeterminata

$$(II)\ldots\ o = y + f(\phi,\mu)y' + f'(\phi,\mu)y''$$
$$(III)\ldots\ o = y + f(\phi,\mu,\omega)y' + f'(\phi,\mu,\omega)y'' + f''(\phi,\mu,\omega)y'''$$
$$(IV)\ldots\ o = y + f(\phi,\mu,\omega,\lambda)y' + f'(\phi,\mu,\omega,\lambda)y'' + f''(\phi,\mu,\omega,\lambda)y''' + f'''(\phi,\mu,\omega,\lambda)y'''' \text{ ecc.}$$

essendo ϕ, μ, ω, λ ecc. funzioni indeterminate di x, $f(\phi,\mu$ ecc.), $f'(\phi,\mu$ ecc.) ecc. funzioni indeterminate di ϕ, μ, ω, λ ecc.

Il numero delle funzioni ϕ, μ, ω ecc. introdotte in ogni equazione è uguale al grado dell' equazione da risolvere. Posto ciò, l' equazione (*I*) rappresenti l' integrale completo dell' equazione (*A'*)

$$(I)\ldots y = \pi_1\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + \int \pi_1\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(K' + \int \pi_1\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(K'' + \int \pi_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(K''' + \text{ecc.}\right.\right.\right.\right.$$

essendo K, K', K'' ecc. le costanti arbitrarie, di modo che richiedendosi l' integrale completo dell' equazione (*II*), sia egli

$$(II')\ldots y = \pi_1\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + K'\int \pi_1\left(\frac{1}{\mu}\right)\right),$$

l' integrale dell' equazione (*III*), sia

$$(III')\ldots y = \pi_1\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + \int \pi_1\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(K' + K''\int \pi_1\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)\right)$$

l'integrale dell'equazione (*IV*), ſia

$$(IV)\ldots y=\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi}\right)\Big(K+\int\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mu}\right)\Big(K'+\int\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\omega}\right)\left(K''+K'''\int\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda}\right)\right)\Big)\Big)$$

e così in ſeguito.

Si prendano per ordine le differenze di queſte equazioni, onde determinare le funzioni $f(\phi,\ \mu$ ecc. $)$, $f'(\phi,\mu$ ecc.$)$ ecc. nelle equazioni aſſunte (*II*), (*III*) ecc., e però cominciando dall' equazione (*II*), la ſi divida per $\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi}\right)$, ſicchè ſia

$\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi}\right)}=K+K'\int\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mu}\right)$. Sarà differenziando

$\frac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi'}\right)}-\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi}\right)}=K'\,\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mu}\right)$, e però

$\frac{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi}\right)y'}{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi'}\right)}-y=K'\,\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mu}\right)$. Ma $\frac{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi'}\right)}=\Phi$ (§. xxv.). Dunque $\frac{\Phi\,y'}{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mu}\right)}-\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mu}\right)}=K'$

e però, differenziando di nuovo, ſi avrà

$$\frac{\Phi'\,y''}{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi'}\right)\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mu'}\right)}-\frac{\Phi\,y'}{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mu}\right)}-\frac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\phi'}\right)\pi_{,}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mu'}\right)}$$

$$+\frac{y}{\pi_i\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_i\left(\frac{1}{\mu}\right)}=0$$

Si faccia la moltiplicazione per $\pi_i\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_i\left(\frac{1}{\mu}\right)$; e perchè $\frac{\pi_i\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_i\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\pi_i\left(\frac{1}{\phi'}\right)\pi_i\left(\frac{1}{\mu'}\right)}=\phi\mu$ (§. XXVII.), si avrà l'equazione

$(II')\ldots y-\phi(1+\mu)y'+\phi\phi'\mu y''=0$.

Restano pertanto determinate le funzioni f, f, essendo $f(\phi,\mu)=-\phi(1+\mu)$; $f'(\phi,\mu)=\phi\phi'\mu$, e però l'equazione (II') è l'integrale completo dell'equazione differenziale (II), qualunque funzione di x sieno μ, e ϕ, e qualunque il modulo delle differenze.

Di nuovo si divida l'equazione (III') per $\pi_i\left(\frac{1}{\phi}\right)$, e si differenzj. Sarà

$$\frac{y'}{\pi_i\left(\frac{1}{\phi'}\right)}-\frac{y}{\pi_i\left(\frac{1}{\phi}\right)}=K'\pi_i\left(\frac{1}{\mu}\right)+K''\pi_i\left(\frac{1}{\mu}\right)\int\pi_i\left(\frac{1}{\omega}\right);$$

e moltiplicando per $\pi_i\left(\frac{1}{\phi}\right)$, farà

$$\phi y'-y=K'\pi_i\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_i\left(\frac{1}{\mu}\right)+K''\pi_i\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_i\left(\frac{1}{\mu}\right)\int\pi_i\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Dunque

$$\frac{\phi y'-y}{\pi_i\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_i\left(\frac{1}{\mu}\right)}=K'+K''\int\pi_i\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Si differenzj la seconda volta. Sarà

$$\frac{\phi' y''}{\pi_1\left(\frac{1}{\mu'}\right)\pi_1\left(\frac{1}{\phi'}\right)} - \frac{\phi y'}{\pi_1\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_1\left(\frac{1}{\phi}\right)} - \frac{y'}{\pi_1\left(\frac{1}{\mu'}\right)\pi_1\left(\frac{1}{\phi'}\right)} + \frac{y}{\pi_1\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_1\left(\frac{1}{\phi}\right)} = K'\pi_1\left(\frac{1}{\omega}\right);$$ e moltiplicando tutto per $\pi_1\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_1\left(\frac{1}{\phi}\right)$, farà $\phi\phi'\mu y'' - \phi y' - \dots y' + y$ $= K'\pi_1\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_1\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_1\left(\frac{1}{\omega}\right)$; e facendo il coefficiente di $K' = R$, si divida l' equazione per R. Si avrà

$$\frac{\phi\phi'\mu y'}{R} - \frac{\phi(1+\mu)y'}{R} + \frac{y'}{R} = K''.$$

Si differenzj la terza volta, e farà

$$\frac{\phi'\phi''\mu' y'}{R'} - \frac{\phi\phi'\mu y''}{R} - \frac{\phi'(1+\mu')y''}{R'} + \frac{\phi(1+\mu)y'}{R} + \frac{y'}{R'} - \frac{y'}{R} = 0$$ E poichè $\frac{R}{R'} = \phi\mu\omega$ (§. XXVII), se si moltiplichi quest' equazione per R, avrà l' equazione differenziale

$$(\text{III}'')\dots y - \phi(1+\mu+\mu\omega)y' + \phi\phi'(\mu+\mu\mu'\omega+\mu\omega)y'' - \phi\phi'\phi''\mu\mu'\omega y''' = 0$$

di cui farà integrale completo l' equazione (III), qualunque funzione di x sieno ϕ, μ, ω, e qualunque il modulo $x + X$.

Collo stesso metodo differenziando quattro volte successivamente l' equazione (IV'), si perverrà all' equazione differenziale

$$(\text{IV}')\dots y - \phi(1+\mu+\mu\omega+\mu\omega\lambda)y' + \phi\phi'(\mu+\mu\omega+\mu\omega\lambda + \mu\mu'\omega+\mu\mu'\omega\lambda+\mu\mu'\omega\lambda)y'' - \dots (\mu\mu'\omega - \mu\mu'\omega\lambda + \mu\mu'\omega\lambda + \mu\mu'\omega\lambda)y''' + \phi\phi\phi'\phi''\mu\mu'\mu''\omega\omega\lambda y'''' = 0$$

e così all' infinito. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XLIX. La differenziazione può continuarsi pe' gradi superiori senza necessità di cominciare da' primi, essendo la quarta norma per la quinta, questa per la sesta, e così successivamente. E poichè integrando l'equazione (A') in supposizione, che l' omogeneo di comparazione sia $= o$, si può ella integrare anche in supposizione ch' egli sia $= \mathfrak{Q}$ funzione di x (§. XLIII); è manifesto, che s' integreranno le equazioni (II″), (III″) ecc. anche in supposizione, che s' abbia per omogeneo una funzione di x qualunque.

COROLLARIO II.

§. L. Proposta pertanto qualsivoglia equazione differenziale finita del grado n a coefficienti variabili $\mathfrak{Q} = y + Ay' + By'' + Cy''' + \text{ecc.}$ ella avrà integrale completo della forma (I) (§. XLVIII) in supposizione di $\mathfrak{Q} = o$, sempre che sia ella reducibile all' equazione differenziale corrispondente (II″), (III″) ecc. E perchè s' identifichino, converrà che i coefficienti delle funzioni y', y'' ecc. nelle equazioni (II″), (III″) ecc. sieno rispettivamente uguali ai coefficienti A, B ecc. dell' equazione proposta. Quindi essendo il numero delle funzioni indeterminate ϕ, μ ecc. uguale al grado dell'equazione; e uguale a questo grado essendo pure il numero de' coefficienti da paragonare rispettivamente, si avranno tante equazioni, quanto è il numero delle funzioni indeterminate. E ammettendo l' equazione proposta integrale completo in ipotesi di $\mathfrak{Q} = o$, lo avrà pure in supposizione di $\mathfrak{Q}$ funzione di x, come si è osservato poc' anzi.

COROLLARIO III.

§. LI. Non è difficile il riconoscere anche a primo aspetto, che non ha confini il numero delle equazioni differenziali finite a coefficienti variabili che si possono integrare con questo metodo. Lasciando da parte l'assunzione libera di qualsivoglia funzione di x per le indeterminate Φ, μ, ω ecc. col mezzo della quale si possono assegnare equazioni differenziali senza numero e di qualunque grado, suscettibili tutte d'una completa integrazione, non è egli del tutto inefficace per un'infinità eziandio di equazioni differenziali a coefficienti variabili dati. Imperciocchè, esaminando la natura delle equazioni di relazione, che ci risultano dal paragone de' coefficienti dati cogli assunti, si vede patentemente, ch'elle sono differenziali finite, e che si può sempre pervenire prima ad una Ridotta del grado n in Φ e coefficienti dati, indi ad altre successivamente inferiori del grado $n-1$, $n-2$ ecc. in μ, ω ecc. In conseguenza se si abbia un Integrale particolare per ciascheduna di queste equazioni gradatamente inferiori, si ha immediatamente l'integrale completo dell'equazione proposta, qualunque cosa sieno i coefficienti dati, il che ci offerisce una soluzione diretta del Problema. E se non si possono conseguire *a priori* tutti questi integrali particolari successivi, si può sempre tanti assumerne ad arbitrio, quanti possono occorrere per determinare le altre funzioni indeterminate, sì che resti disobbligato il maggior numero possibile di coefficienti dati. Facciamo di tutto ciò un qualche svolgimento a illustrazione del Metodo.

I.

Sia primieramente propoſta l' equazione (A)

$(A) \ldots . o = y + My' + Ny''$

a cui ſi riducono tutte le equazioni differenziali di ſecondo ordine. Paragonata coll' equazione (II'), farà d'uopo per l'identificazione, che abbiano luogo le due equazioni

$$-\phi - \phi\mu = M$$
$$\phi\phi'\mu = N$$

la ſeconda ſomminiſtra $\mu = \frac{N}{\phi\phi'}$, il qual valore ſoſtituito nella prima ci dà l'equazione in ϕ

$$-1 = \frac{M}{\phi} + \frac{N}{\phi\phi'}$$

cioè, poſto $\frac{1}{\phi} = \frac{z'}{z}$ l'equazione

$$z + Mz' + Nz'' = o$$

che è lo ſteſſo che l'equazione (A) poſto z in luogo di y.

Se ſi abbia pertanto un ſolo valore particolare per $z = p$ ſoddisfacente a queſt' equazione, farà $\phi = \frac{p}{p'}$, $\mu = \frac{Np''}{p}$, e però $y = \pi_1 \left(\frac{p'}{p}\right)\left(K + K' \int \pi_1 \left(\frac{p}{Np''}\right)\right)$ farà l'integrale completo dell'equazione generale (A), eſſendo M, N funzioni di x qualunque. Che ſe non foſſe per alcun modo poſſibile il ritrovare l'integrale particolare p, ſi prenda $\phi = p$ funzione qualſivoglia di x ad arbitrio. Si avrà $\mu = \frac{N}{pp'}$, e l'integrale completo

dell'

dell'equazione (*A*) farà $y = \pi_1\left(\frac{1}{p}\right)\left(K + K'\int \pi_1\left(\frac{pp'}{N}\right)\right)$

purchè i due coefficienti M, N abbiano tra di sè la relazione seguente

$$Mp' + pp' + N = o$$

con che uno dei due resta determinato per l'altro, e per la funzione p assunta ad arbitrio. In conseguenza le due equazioni differenziali di secondo ordine

$$o = y + My' - p'(p + M)y'$$

$$o = y - \left(\frac{N + pp'}{p'}\right)y' + Ny''$$

saranno completamente integrabili, qualunque funzione di x sieno M, e p per la prima, ed N, e p per la seconda.

II.

Sia l'equazione (*B*)

(*B*) .... $o = y + My' + Ny'' + Py'''$

a cui si riducono tutte le equazioni differenziali di terzo ordine.

Perchè ammetta ella l'integrale (III'), dovranno aver luogo le equazioni

$$1 + \mu + \mu\omega = -\frac{M}{\Phi} = A$$

$$\mu + \omega\mu\mu' + \mu\omega = \frac{N}{\Phi\Phi'} = B$$

$$\mu\mu'\omega = -\frac{P}{\Phi\Phi'\Phi''} = C$$

Sottraendo la prima dalla seconda, e dal residuo sottraendo la terza, farà

$$1 + \frac{M}{\Phi} + \frac{N}{\Phi\Phi'} + \frac{P}{\Phi\Phi'\Phi''} = o$$

cioè, posto $\frac{1}{\Phi} = \frac{z'}{z}$, farà la ridotta del grado n

$(C)\ldots\ldots z+Mz'+Nz''+Pz'''=o$

Per trovare la seconda Ridotta in μ del grado $n-1$, si dispongano le equazioni di relazione de' coefficienti in questo modo

$$\frac{A-1}{\mu}=1+\omega$$

$$\frac{C}{\mu\mu'}=\omega$$

Sottraendo la prima dalla seconda equazione, risulta immediatamente

$$\frac{C}{\mu\mu'}-\frac{A-1}{\mu}=-1$$

e però, posto $\frac{1}{\mu}=\frac{r'}{r}$, si avrà

$(D)\ldots\ldots o=r-(A-1)r'+Cr''$

Tutte le volte pertanto, che si possa avere per z un valor particolare p dall'equazione (C), con che si avrà $\phi=\frac{p}{p'}$, e sostituito questo valore in A, e C, si abbia pure per r un valor particolare q dall'equazione (D), il quale darà $\mu=\frac{q}{q'}$, e $\omega=\frac{C}{\mu\mu'}=\frac{Cq''}{q}$, sarà

$$y=\pi_1\left(\frac{p'}{p}\right)\left(K+\int\pi_1\left(\frac{q'}{q}\right)\left(K'+K''\int\pi_1\left(\frac{q}{Cq''}\right)\right)\right)$$

l'integrale completo di tutte le equazioni differenziali di terzo ordine, qualunque funzione di x sieno M, N, P.

Ma se non possono aversi questi valori particolari per ϕ, e μ, si assumano in luogo loro funzioni di x di qualunque natura, cioè p per ϕ, q per μ. Sostituendo questi valori nelle due equazioni (C), (D), qual' ora pei coefficienti dell' equazione (B) abbiano luogo le seguenti equazioni,

$$pp'p'' + Mp'p'' + Np'' + P = 0$$
$$Mp'p''q' + pp'p''q' + pp'p''qq' - P = 0$$

farà

$$y = \pi_1\left(\frac{1}{p}\right)\left(K + \int \pi_1\left(\frac{1}{q}\right)\left(K' + K'\int \pi_1\left(\frac{qq'}{c}\right)\right)\right)$$

l' integrale completo dell' equazione propoſta.

In conſeguenza generalmente le equazioni di terzo grado

$$0 = y - \left(\frac{N}{p'} + Nq' + p + pq' + pqq'\right)y' + Ny'' + (pp'p''qq' - Np''q' - Np'p''q'q' - pp'p''q'q' - pp'p''q'q')y''$$

$$0 = y + My' - \left(\frac{p'M + pp' + pp'q' + pp'qq'}{1 + p'q'}\right)y'' + (Mp'p''q' + pp'p''q' + pp'p''qq')y'''$$

$$0 = y + \left(\frac{P - pp'p''q' - pp'p''qq'}{p'p''q'}\right)y' + \left(\frac{pp'p''qq - Pp' - (pp'q' + pp'qq')pp'p''q'}{1 + p'q'}\right)y'' + Py'''$$

faranno completamente integrabili, qualunque funzione di x ſieno M, N, P, p, q

III.

Sia l' equazione (F)

$$(F) \ldots . 0 = y + My' + Ny'' + Py''' + Qy''''$$

di quarto grado. Perchè poſſa ella ammettere integrale completo della forma (IV'), farà neceſſario che abbiano luogo le equazioni

$$(1) \ldots . 1 + \mu + \mu\omega + \mu\omega\lambda = -\frac{M}{\varphi} = A$$

$$(2) \ldots . \mu(1 + \omega + \omega\lambda) + \mu\mu'(\omega + \omega\lambda + \omega\omega'\lambda) = \frac{N}{\varphi\varphi'} = B$$

$$(3)\ldots \mu\mu'(\omega+\omega\lambda+\omega\omega'\lambda)+\mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda=-\frac{P}{\phi\phi'\phi''}=C$$

$$(4)\ldots \mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda=\frac{Q}{\phi\phi'\phi''\phi'''}=D.$$

Sottraendo la prima dalla ſeconda equazione, e ſucceſſivamente ſottraendo il reſiduo dalla terza, e il nuovo reſiduo dalla quarta, ſi avrà la Ridotta in ϕ

$$-1=\frac{M}{\phi}+\frac{N}{\phi\phi'}+\frac{P}{\phi\phi'\phi''}+\frac{Q}{\phi\phi'\phi''\phi'''}$$

cioè l'equazione ſeguente, poſto $\frac{1}{\phi}=\frac{z'}{z}$,

$$(G)\ldots. z+Mz'+Nz''+Pz'''+Qz''''=0.$$

Di nuovo, diſponendo le equazioni di relazione tra' coefficienti nel ſeguente modo

$$(5)\ldots \frac{A-1}{\mu}=1+\omega+\omega\lambda=A'$$

$$(6)\ldots. \frac{B+1-A}{\mu\omega}=\omega+\omega\lambda+\omega\omega'\lambda=B'$$

$$\frac{D}{\mu\mu'\mu''}=\omega\omega'\lambda$$

ſi avrà immediatamente la Ridotta in μ

$$\frac{D}{\mu\mu'\mu''}-\frac{B+1-A}{\mu\mu'}+\frac{A-1}{\mu}-1=0$$

cioè, poſto $\frac{1}{\mu}=\frac{r'}{r}$, l'equazione ſeguente

$$(H)\ldots r-(A-1)r'+(B+1-A)r''-Dr'''=0$$

E di nuovo, ripigliando le equazioni (5) (6), ſi ha

$$\frac{A'-1}{\omega}=1+\lambda$$

$$\frac{B'+1-A'}{\omega\omega'}=\lambda$$

donde riſulta la Ridotta in ω

$$\frac{A'-1}{\omega} - \frac{B+1-A}{\omega\omega'} - 1 = 0$$

cioè, posta $\frac{1}{\omega} = \frac{t'}{t}$, l' equazione

$$(J) \ldots t - (A'-1)t' + (B+1-A')t'' = 0$$

Se pertanto si abbia un valore p per ϖ soddisfacente all' equazione (G), sicchè sia $q = \frac{p}{p}$, e un valore q per r soddisfacente all' equazione (H), onde sia $\mu = \frac{q}{q'}$, e finalmente un valor particolare m per t, il quale soddisfaccia all' equazione (J), con che si abbia $\omega = \frac{m}{m'}$, e $\lambda = \frac{D}{\mu\mu'\mu''\omega\omega'} = \frac{Dm'q''}{mq}$, farà

$$y = \pi\left(\frac{p}{p}\right)\left(K + \int \pi\left(\frac{q'}{q}\right)\left(K' + \int \pi\left(\frac{m'}{m}\right)\left(K'' + K''' \int \pi\left(\frac{mq}{Dm''q''}\right)\right)\right)\right)$$

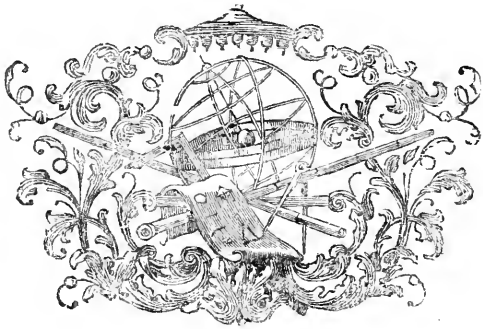
l' integrale completo dell' equazione (F), essendo M, N, P, $\mathfrak{Q}$ funzioni di x qualunque. Che se non possano averli sì fatti integrali particolari, sarà sempre possibile il conservare uno qualunque de' coefficienti M, N, ecc. non avendovi, come si è veduto qui innanzi, che un numero $n-1$ di equazioni di relazione tra essi da soddisfare, minore di un' unità del numero de' coefficienti. Imperciocchè, assunte ad arbitrio le funzioni p per Φ, q per μ, m per ω, le equazioni necessarie tra coefficienti saranno quelle, che seguono

$$pp'p''p''' + Mp'p''p'' + Np''p' + Pp'' + \mathfrak{Q} = 0$$
$$ppp'p'qq'q'' + (M-p)p'p''qq' + (N + pp' + Mp')p'p''q'' - \mathfrak{Q} = 0$$
$$pp'qq'mm' + N + pp' + Mp' + pp'qq' - (M-p)p'qq' - (M-2p)p'qq'm' = 0$$

E però non sarà, che un affare di calcolo, soddisfacendo a queste equazioni, il determinare le equazioni

integrabili generalmente, qualunque funzione di x sieno M, N ecc. p, q ecc., come si è fatto precedentemente.

Nello stesso modo potremo inoltrarci all' integrazione delle equazioni superiori, siccome è agevole da vedere. Ma questo per ora basti intorno al Calcolo Integrale delle equazioni differenziali finite a due variabili.



SPERIENZE

SOPRA IL PRECIPITATO PORPORA

Ottenuto dal Gaz ricavato dallo Stagno, e dalla sua Calce.

Del Sig. Conte Morozzo.

1. NEL tempo, in cui l' esame de' diversi fluidi aeriformi forma la particolare occupazione de' Chimici, e Fisici moderni, non credo di far cosa infruttuosa, se verrò esponendo alcune nuove sperienze instituite sopra il gaz suscitato sì dallo stagno, che dalla sua calce; e se prenderò motivo di descriverne alcune altre che da quelle hanno tratto origine, ed occasione.

Non ha dubbio, che il sodo progresso delle Scienze non esigga, che si aduni una gran quantità di fatti ben esaminati, e si moltiplichino le osservazioni prima di passare a stabilire teorie luminose; le quali alcune volte un solo fatto distrugge, ma che spesso la lusinghiera compiacenza dell' Autore, anche a costo di sconvolgere i primi elementi della natura, cerca ad ogni modo di produrre, e mettere nel lume che può migliore. Laonde in vece di aumentarsi il numero delle umane cognizioni sempre più elle s' avvolgono sotto un velo più denso.

Spero che non incorreranno simil taccia le sperienze, che mi fo a descrivere, poichè le conseguenze, che ne deduco, sono bensì semplici conghietture, ma coll' esame e ravvicinamento di molti altri fatti possono

prendere quel grado di certezza che si richiede per ischiarire la verità in siffatte materie.

2. Prima di venire all'esposizione di queste sperienze parmi necessario di gettare un colpo d' occhio sull' apparecchio, di cui mi sono servito (veggasi la *fig. I.*). *A* è un matraccio; *B* una caraffa col tubo ricurvo perchè possa essere introdotto nel matraccio. Possono pure queste caraffe facilmente adattarsi l'una sull'altra, così che il tubo dell'una s'introduca nel collo dell'altra passando per un turacciolo di sughero; e le giunture si suggellano poi esattamente.

C è una vescica armata di chiave applicata all' ultima caraffa dell' apparecchio per raccogliere il gaz. *D* è il tubo che s' introduce nel matraccio, per cui col mezzo di un imbuto *E* si versa il liquore, e che, tolto l' imbuto, si chiude subitamente.

SPERIENZA I.

3. Riposi in un matraccio mezz' oncia di stagno d'Inghilterra ridotto in fogli, come pure un' oncia di spirito di Salmarino; indi aggiustato il matraccio ad una caraffa, la quale col suo tubo ricurvo avea con esso comunicazione, e conteneva una soluzione d' oro allungata nell'acqua distillata ch'era di color citrigno, vi versai due oncie circa di spirito di nitro, e tolto l' imbuto fu chiuso ben bene l' apparecchio.

Immediatamente cominciò l' effervescenza con calor grande, e il gaz sviluppatosi attraversò con rapidità la soluzione d' oro, e si gettò nella vescica.

La soluzione d'oro fu precipitata in color porpora dopo qualche tempo; ma ciò che mi sorprese alquanto, si è, che questo precipitato si radunò al fondo del vaso lasciando la soluzione limpida, e trasparente, come l' acqua distillata, di cui mi era servito per allungarla; ciò che non succede quando si fa la tintura porpora

di

di *Caſſius*, ove tutta la ſoluzione prende un color intenſo paonazzo, che a poco a poco ſi va depoſitando al fondo a guiſa di mucilaggine, ed in cui l'acqua ritiene ſovente un color roſſiccio.

Eſaminato il gaz raccolto nella veſcica l' ho ritrovato alcune volte infiammabile con fiamma leggera, e cerulea (1); alcune volte pareva atto alla reſpirazione, ed a mantenere la fiamma; accidenti oſſervati pure da' Sigg. *Prieſtley*, de *Laſſone*, e *Macquer* (2). Ma ho luogo di credere, che ſiffatte variazioni ſieno prodotte dalla maniera di eſaminarlo, poichè qualora è raccolto dentro ad una campana, od altro vaſo, che prima ſia riempiuto d' acqua, non è egli invero ſempre infiammabile, ma ſempre più o meno meſitico.

Avendo introdotto di queſto gaz in una ſoluzione d' oro, e meſcolato ben bene, non ſi è altramente ottenuto cangiamento nel ſuo colore, nè ſi formò precipitato veruno.

SPERIENZA II.

4. Il tutto diſpoſto come nella precedente ſperienza, ſalvo che aggiunſi una caraffa all'apparecchio, in modo che la prima, per cui paſſava il gaz, era ripiena d'acqua diſtillata, e la ſeconda conteneva la ſoluzione d'oro; ripoſi dello ſtagno nel matraccio con dello ſpirito di ſalmarino, eccitando indi per mezzo dello ſpirito di nitro l' efferveſcenza. Non ottenni in queſto modo precipitato veruno nella ſoluzione d' oro. Nella caraffa poi, che conteneva l' acqua diſtillata, quantunque non appariſſe l' acqua di color lattiginoſo, e foſſe quaſi

(1) Ben inteſo che il verſava in un vaſe con aggregazione d'aria atmoſferica.

(2) Veggaſi il Dizionario Chimico di *Macquer pag. 597. tom. 1. ediz. in quarto.*

trasparente, avendovi versato della soluzione d' oro, ottenni dopo alcune ore un precipitato porporino.

Il gaz esaminato offerse gli stessi risultamenti della precedente sperienza.

SPERIENZA III.

5. Alcuni Chimici hanno creduto, che il precipitato porpora, che si ottiene dall' oro per mezzo della soluzione di stagno, non fosse ad altro dovuto, che all' acido intenso, che si carica del flogisto dello stagno; e che se si avesse mezzo di avere un acido flogisticato concentratissimo, si otterrebbe tale precipitato anche senza lo stagno. Feci perciò la sperienza seguente.

Riposi nel matraccio dello stagno, e tutto disposi come nella prima sperienza col solito apparecchio, salvo che adoperai quattro caraffe. La prima conteneva acqua distillata; la seconda la soluzione d' oro; la terza era ripiena di tintura di tornasole; e la quarta finalmente conteneva de' fiori di Ciano, ed alcune rose (delle quali aveva preso solamente i petali) rinserrate ben bene. La vescica era adattata all' ultima caraffa.

Non ebbi precipitato nella soluzione dell' oro. Nell' acqua distillata avendo versato una soluzione d' oro, ebbi come nella sperienza antecedente, dopo alcune ore, il precipitato porporino.

La soluzione di tornasole divenne rossa. I fiori di Ciano presero il colore dello scarlatto; e le rose un color porporino intenso (3). Il gaz ottenuto offerse gli stessi fenomeni delle sopraccitate sperienze.

---

(3) E' cosa degna d' osservazione, che i fiori, ch' erano fuori della corrente del gaz, non veniva-no visibilmente colorati. Quelli all' opposto pe' quali passava il gaz prendevano un color carico di scarlatto, come ho detto. Si osserva lo stesso nelle soluzioni del tornasole, se vi si metta l' occhio nel momento stesso, che il gaz le attraversa; ma più o meno secondo la costruzione de' vasi.

Si osserva dunque, che ancorchè l' acido fosse assai intenso per colorare con vivacità sì i colori, che la tintura di tornasole, ciò non ostante non fu egli atto a precipitare in porpora la soluzione d' oro.

6. Debbo avvertire, che in siffatte sperienze, cessato lo sviluppamento del gaz, comincia a farsi l'assorbimento; così che conviene disfare l'apparecchio a tempo se non si vuol rischiare di veder mescolati i liquori nelle differenti caraffe; e quello della prima nel matraccio; il che alcune volte mi è accaduto.

Nè debbo tacere, che i precipitati porpora ottenuti si facevano in più o meno corto spazio di tempo, le cose essendo in circostanze uguali, senza che abbia riconosciuta la causa produttrice.

7. Queste sperienze fanno chiaramente vedere, che il color porpora che si è conseguito si deve alle particelle sottili dello stagno, che sono sollevate col gaz, sì che deposte nell' oro formano l' oro di *Cassius*, o sia il precipitato porpora. Un accidente sopraggiuntomi me ne confermò la verità. Queste sperienze parendomi di gran peso per accrescere le cognizioni Fisico-Chimiche nella teoria delle arie fattizie, cercai di ripeterle più volte.

Presi dunque un altro matraccio, e più volte replicai queste sperienze, senza però ottenere gli stessi risultamenti. Già diffidava di me stesso in questa diversità di apparenze; quando presi a riflettere, che il matraccio, di cui prima mi era servito, aveva il collo sette o otto pollici più corto dell' altro. In fatti tagliato il collo a quel matraccio, e messolo di nuovo in esperienza, ottenni di bel nuovo il precipitato porpora. La lunghezza del matraccio non eccedeva così due piedi parigini.

8. Confermato in tal guisa il risultamento delle precedenti sperienze, non senza fondata ragione potei conchiudere, che le sostanze aeriformi tengono in dis-

ſoluzione alcune particelle de' corpi componenti (4), e che queſte vengono inalzate a certe determinate altezze dal movimento rapido dell' effervescenza; ma che poi, ceſſato queſto impulſo, la gravità ſpecifica riprendendo la propria energia ſopra di eſſe, precipitano di nuovo. Il che dà a conoſcere quanto debba eſſer circoſpetto il Fiſico Oſſervatore, poichè i riſultamenti in ſiffatte ſperienze variano ſecondo le differenti altezze, alle quali deve il gaz ſollevarſi, o ſecondo le ſoſtanze, ch' eſſo dee attraverſare.

9. Ottenuto, come vedeſi, il precipitato porpora per mezzo dell' emanazione gazoſa dello ſtagno per via umida, cercai per mezzo del fuoco, ſe dal metallo medeſimo, o dalla ſua calce poteſſi ottenere lo ſteſſo, e feci a tal fine le ſeguenti ſperienze.

SPERIENZA IV.

10. In una canna da fucile, alla quale era ben ſaldata la vite, come pure il focone, ripoſi tre oncie di ſtagno d' Inghilterra ridotto in grani. Vi adattai un tubo di vetro, il quale metteva in un vaſe ripieno di ſoluzione d'oro allungata con acqua diſtillata; al qual vaſe era pure adattata una veſcica a ſiaſco armata di chiave (veggaſi la *fig. II.*).

Diedi a queſta canna un fuoco violentiſſimo per lo ſpazio di ſette e più ore; ma non ſi ſprigionò giammai alcuna ſoſtanza gazoſa. Sul principio fu depreſſa la ſoluzione dentro al tubo, ma non paſsò mai veruna bolla d'aria; anzi dopo due ore di fuoco ſi fece aſſorbimento. Più volte tentai la ſteſſa ſperienza, ma invano; quantunque il Sig. de *Prieſtley* aſſicuri aver eſtrat-

(4) Sembra che di tal ſentimento ſieno pure i Sigg. *Baumè*, *Morveau*, e *Vallerius*, ed altri più antichi Autori.

to del gaz infiammabile ſenza intermezzo d' alcuna ſoſtanza da diverſi metalli, tanto col riporli in un cannone di fucile, quanto col mezzo d'uno ſpecchio uſtorio dentro a vaſi di vetro; i metalli da lui ſperimentati furono il ferro, lo zinco, lo ſtagno (5). Nè debbo incolpare l'azione del fuoco, poichè vetrificai in quel tempo alcune ſoſtanze nel fornello medeſimo, in cui era collocata la canna.

La ſoluzione d' oro non avendo ricevuto il menomo cangiamento, eſaminai lo ſtagno, e lo ritrovai nella ſuperficie calcinato (6), anzi in qualche punto vetrificato. Il ſuo peſo non fu ſenſibilmente cangiato, ma è coſa difficile in queſte ſperienze l' accertarſene, poichè per la violenza del fuoco ſi diſtaccano le ſcorie dal ferro, delle quali rieſce difficile il liberarne la ſoſtanza ſperimentata.

11. Queſta ſperienza, che fu inutile per le mie ricerche, mi ſe paleſe per altro un fenomeno, che può intereſſare i Fiſici. Un' ora e mezza circa dappoichè la canna fu al fuoco, il calore era così intenſo in tutta la ſua lunghezza, che non poteva con la mano toccarſi francamente neppure in ſommità. Quando poi cominciò a farſi l' aſſorbimento, cioè un' ora dopo che il fuoco nel fornello era aſſai più intenſo, divenne la canna quaſi fredda, di modo che potea ſenza incomodo toccarla la mano in tutta la lunghezza, anche dove era lutata al fornello.

Non potrebbeſi conghietturare, che l'aria ſia il conduttore del calore? Che quando queſta venne aſſorta

(5) Il Sig. de *Lavoiſier* non ne ha ricavato dal piombo, e ſi ha luogo a credere, che nella ſperienza di *Hales* l' aria da eſſo ottenuta ſiaſi ſviluppata dall' apparecchio.

(6) Vegganſi le ſperienze del Sig. *Lavoiſier* le quali ſono analoghe ſopra tal fatto (*Opuſcules Phiſiques, & Chimiques pag.* 282).

dal metallo nel tempo della riduzione della sua superficie in calce sia appunto cessato il calore? O forse i vapori assorti dall' acqua, quando si fece il vuoto, hanno cagionato questo fenomeno?

SPERIENZA V.

12. Misi in una canna da fucile ben chiusa tre oncie di calce di stagno, ossia *potèe d'etain*, essendo l'apparecchio come nella precedente sperienza. Le diedi un fuoco il più violento, ma non mi riuscì la riduzione.

Vi fu soltanto il liquore un po' depresso, ma non passò veruna bolla; e questa depressione la giudico unicamente cagionata dalla dilatazione dell' aria contenuta nel vano.

Intrapresi pertanto a far cimento coll' addizione di sostanze flogistiche; il che feci con le seguenti sperienze.

SPERIENZA VI.

13. Riposi un' oncia e mezza di calce di stagno, e un' egual porzione di resina nella solita canna da fucile con lo stesso apparecchio.

Quando il calore cominciò a penetrare la canna, immediatamente si sviluppò una prodigiosa quantità di gaz, il quale attraversando la soluzione dell' oro, gettossi nella vescica annessa. La violenza con cui si sviluppava mi fece disgiungere l' apparecchio; ciò non ostante osservai

Che la soluzione dell' oro fu leggermente precipitata in color porpora, quantunque l' acqua avesse preso un color verde chiaro; il che deggio attribuire alla resina.

Che la calce di stagno nella canna era stata quasi tutta ridotta in metallo.

Che il gaz era infiammabile con fiamma azzurra, facendo una forte detonazione (7), e così nocivo alla respirazione animale, che un passero introdotto vi morì in pochi secondi, senza che mi sia riuscito di richiamarlo a vita col soccorso dell' alkali *fluor*.

Che una candela introdotta dopo averne infiammata la superficie si spegneva immediatamente, se più oltre veniva abbassata.

Sperienza VII.

14. In un apparecchio simile a quello delle precedenti sperienze riposi un' oncia di calce di stagno, e parte uguale di carbon pesto. La soluzione dell' oro attraversata dal gaz fu precipitata in color paonazzo circa un' ora dopo.

La calce è stata intieramente ridotta: il gaz s' infiammava con forte detonazione: la sua fiamma era piuttosto oscura.

Era egli più nocivo dell' altro, cioè mortale alla respirazione animale, poichè in minor tempo ancora vi morì un passero introdotto.

Sperienza VIII.

15. Riposi di nuovo un' oncia di calce di stagno, ed egual misura di sal nitro nella canna da fucile collo stesso apparecchio. Sviluppossi una gran quantità di gaz; ed attraversando esso la soluzione d' oro, questa diventò da principio di color lattiginoso, ed opaca,

(7) In questa sperienza, come nelle susseguenti, quando trattavasi d' infiammare il gaz, io lo versava dentro ad un vaso di vetro con bocca stretta. In tal guisa vi si mescolava dell' aria atmosferica, senza la quale non si ottiene nè infiammazione, nè detonazione.

ma poi prese una tinta porpora chiara, e precipitò in fondo del vaso una polvere di color lillà; la calce fu ridotta in metallo.

Il gaz raccolto mi sorprese per la sua natura; non era altramente infiammabile; non era gaz nitroso; non era aria deflogisticata, come potrebbe conghietturarsi, ma era gaz mefitico. Una candela che vi s'introdusse fu più volte spenta; un passero cadde in asfissia, ma non morì,

16. Non devo tacere, che in tutte queste sperienze, cessato lo sviluppamento del gaz, comincia l'assorbimento; che perciò quando si osserva il liquore del tubo ascendere, conviene disfare l'apparecchio, se non si vuole che il liquore in esperimento venga ad essere assorto nella canna; il che alcune volte m'è accaduto.

17. Provano siffatte sperienze, che la calce di stagno nella sua riduzione colle sostanze flogistiche lascia sfuggire le parti più volatili, le quali in un colla sostanza gazosa vengono sollevate, come le soluzioni d'oro precipitate in porpora ne fanno testimonianza.

18. Pensano generalmente i Chimici moderni essere dovuto all'aria il maggior peso, che acquistano i metalli quando vengono calcinati; ma la diminuzione del peso, che soffrono le calci metalliche nella riduzione, non è del solo eccedente acquistato, ma eziandio di una porzione del peso proprio (8). Quindi è che per ispiegare questo fenomeno si pretende che la perdita si faccia insieme con le materie flogistiche.

Ma

(8) La calce di piombo perde nella riduzione $\frac{1}{7}$ circa del suo peso; e quella dello stagno ne perde circa $\frac{1}{10}$; così che se molte volte si facesse la trasmutazione di calce in metallo, e di metallo in calce, verrebbe interamente a svanire la sostanza sperimentata. Tale almeno è il mio sospetto; ma le mie sperienze, che vo ad intraprendere sopra queste calcinazioni, e riduzioni, daranno luogo alla verità indubitatamente.

Ma le mie ſperienze provano chiaramente, che quel di più è la ſoſtanza metallica la più volatile, ſfuggita con l' emanazione gazoſa.

19. Riflettendo ſopra i riſultamenti di queſte ſperienze, ſono entrato in penſiero, che la diſparità de' ſentimenti de' Chimici ſopra queſte arie fattizie poteſſe provenire dall' apparecchio adoperato ſinora, cioè da quello che ſi denomina apparecchio pneumato-chimico immaginato dal Sig. *Prieſtley*, indi perfezionato dal Sig. *Sigaud de la Fond*; poichè con tale apparecchio molte delle ſoſtanze gazoſe attraverſando l' acqua depongono in quella alcune quaſi inviſibili particelle, e forſe anche alcune altre ſi caricano di un principio umido, per il che più non ſono nello ſtato di purezza, o d' aggregazione, come emanano immediatamente dai corpi componenti. E per dare una convincente prova delle mie conghietture rapporterò, oltre alle già recate, due ſperienze, che pajono deciſive a queſto propoſito.

SPERIENZA IX.

20. L' apparecchio fu lo ſteſſo che quello adoperato nella Sperienza prima (veggaſi la *fig. I*). Ripoſi nel matraccio del ſale di tartaro, ſaturandolo con l' olio di vitriolo. Il gaz ſviluppatoſi paſſava per quattro caraffe prima di gettarſi nella veſcica adattata all' ultima caraffa. Conteneva la prima acqua diſtillata; la ſeconda acqua di calce; la terza era ripiena di fiori naturali di ciano, di roſe, e di viole gialle murali; l' ultima era ripiena di ſoluzione di tornaſole.

Oſſervai, che la tintura di tornaſole divenne roſſiccia; che l' acqua di calce precipitò; che i fiori alte-

rarono colore (9); e finalmente che il gaz mefitico diè luogo a tutti i fenomeni descritti da' Chimici moderni.

La caraffa dell' acqua distillata non offerse variazione alcuna; ma feci ch' ella fosse sempre la prima nell' apparecchio in molte sperienze, che intrapresi, sì che per ben otto volte fu occupata dal gaz mefitico.

Decantata pertanto quest' acqua dopo di averla fatta alquanto svaporare, e lasciatala quindi tranquilla, con grande mia soddisfazione vidi formarsi nel fondo del vase che la conteneva un precipitato, che riconobbi essere un vero tartaro vitriolato.

SPERIENZA X.

21. Coll' apparecchio simile al precedente riposi nel matraccio due oncie di limatura di ferro, faturandola con l' olio di vitriolo. La prima caraffa, per cui passava il gaz sviluppato, era ripiena d' acqua distilla-

(9) L'alterazione de' colori ne' fiori, e specialmente nelle rose osservata da *Prieſtley* qualora vengono esposte al vapore del gaz ottenuto dalla fermentazione della birra, è ugualmente sensibile, se si facciano attraversare dal gaz ottenuto sì dal sale di tartaro, che dalle pietre calcaree per mezzo dell' olio di vitriolo; ed ho osservato, che il calore delle rose divien più intenso singolarmente alle estremità de' petali; che i fiori violacei divengono rossegianti, e che i gialli non soffrono cangiamento veruno. In somma ho osservato que' cangiamenti stessi, che il vapore del zolfo ha prodotto sopra di essi, e che ho descritto nelle *Memorie della Real Soc. di Torino* (Tom. V. pag. 31), ove conchiusi che queste mutazioni erano dovute all' acido sprigionato dal zolfo. Nè per altra ragione succede l' alterazione di colore ne' fiori sottoposti all' azione de' diversi gaz. Ho sempre preferito nel far esperimento sull' acidità de' diversi gaz di mettere de' fiori di ciano, od altri fiori violacei invece della tintura di tornasole; avendo riconosciuto esser essi più di questa sensibili, e pronti ad alterare il loro colore.

In tutte le sperienze fatte sopra i fiori attraversati dal gaz ho osservato il fenomeno descritto nella nota n. 3. della Sperienza 3, cioè che il gaz forma una corrente nel vase, e che i fiori, che non vi sono involti, non restano visibilmente colorati.

Fig. II

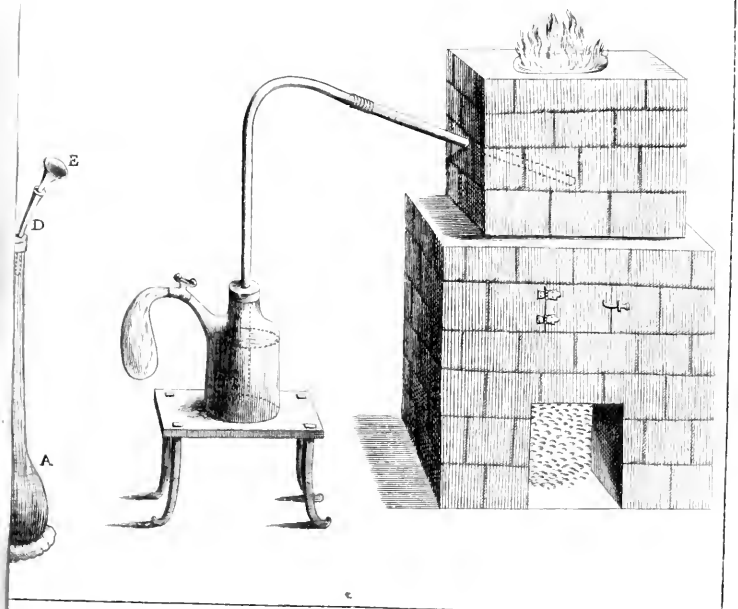


Fig. I

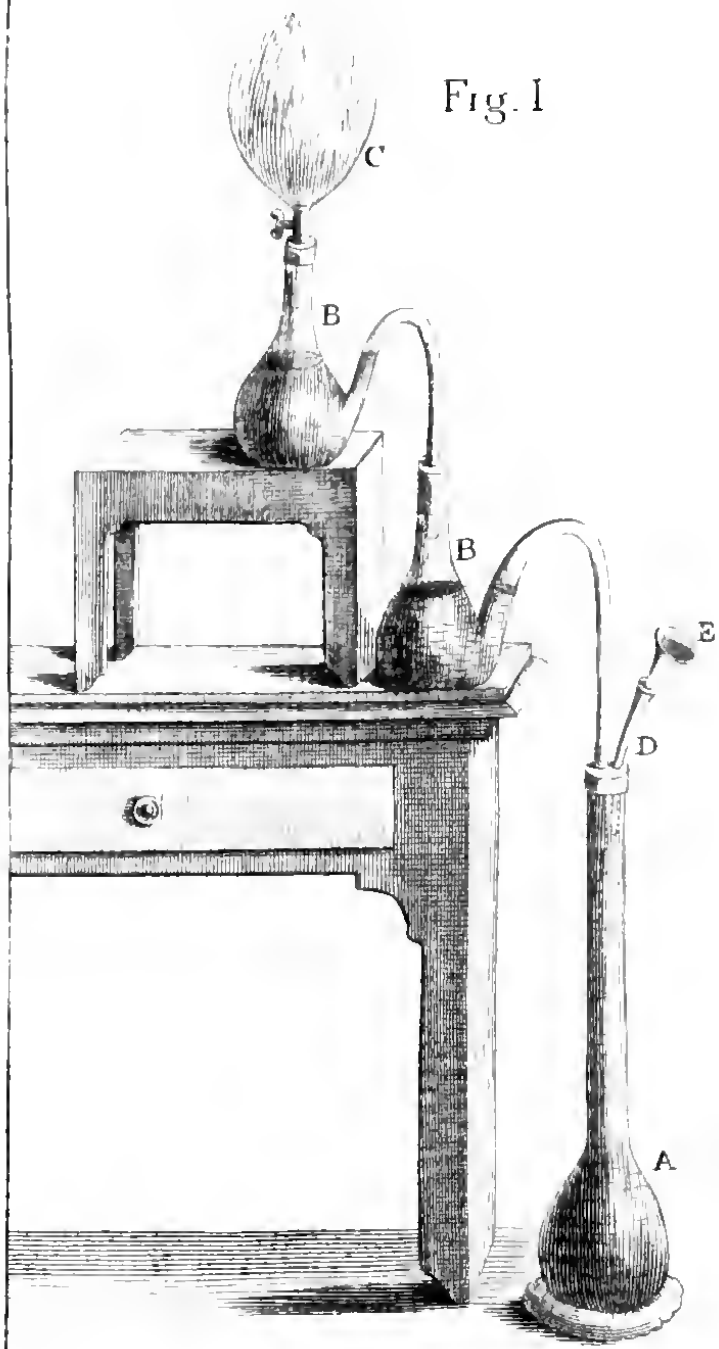
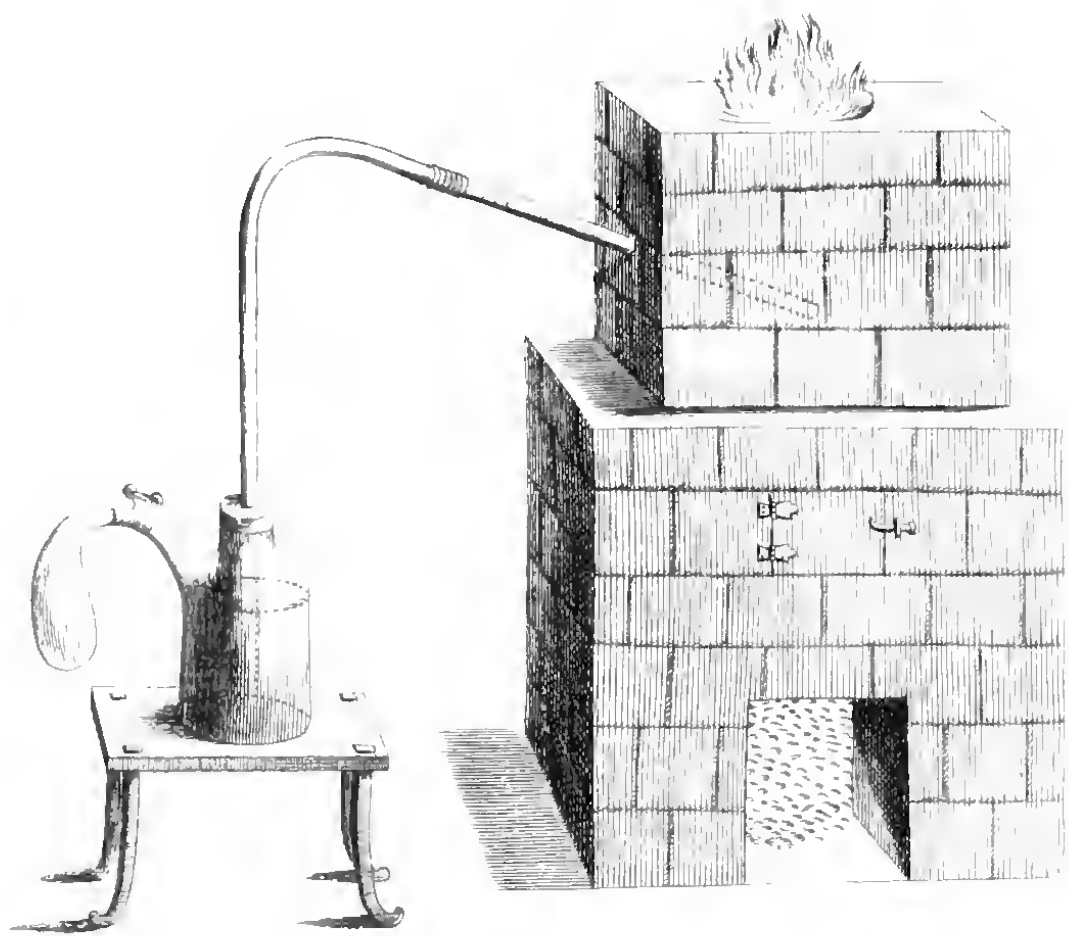


Fig. II



ta; la seconda, terza, e quarta contenevano se stesse sostanze della precedente sperienza.

Ho riconosciuto su tutte, e riscontrato le medesime azioni del gaz infiammabile, che ci vengono descritte dagli Autori.

La caraffa de' fiori, che non conteneva se non se rose, offerse un fatto molto curioso (10). Conservai, come nella precedente sperienza, la caraffa dell' acqua distillata, la quale mi servì costantemente in molte sperienze, valendomene anche col gaz infiammabile estratto dal ferro. Esaminata poscia quest' acqua, riconobbi distintamente esservisi formato nel fondo un precipitato, il quale era un vero vitriolo marziale; e alla superficie dell' acqua osservai una leggera intonacatura d' ocra alle pareti del vase.

Feci pure cimento di sostituire all' acqua distillata della prima caraffa una soluzione di galla, ed osservai che questa diventava paonazza, e nericcia se più d'una volta la faceva attraversare dal gaz infiammabile.

(10) Queste rose divennero d'un color paonazzo più intenso, che nella precedente sperienza, specialmente all' estremità de' petali, il che fa conghietturare, che questo gaz contenga una maggior quantità di acido; ciò però che mi riuscì sorprendente, si è, che queste rose non avendo più il loro odore naturale, presero un odore tragrantissimo, come quello dell' etere vitriolico, nel quale si sentiva per altro un odore sfumato di rose, che rendeva ancor più grato l' odore fatticcio, che avevano preso.

DELLE VIBRAZIONI SONORE DEI CILINDRI.

Del Sig. Conte Giordano Riccati.

I. Di parecchi cilindri di metallo, o di creta si formano certi ſtrumenti, che rieſcono grati all' orecchio. Di tali corpi mia intenzione ſi è l' indagare le oſcillazioni, le quali, come vedremo, vengono regolate da leggi diverſiſſime da quelle delle corde cilindriche. Quantunque io abbia preſo l' eſſenzial di queſta ſoluzione dall' Appendice ſopra le curve elaſtiche aggiunta dal dottiſſimo Sig *Leonardo Eulero* alla ſua profonda Opera *Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes*; nulladimeno non iſdegnino di leggerla i Matematici, sì perchè ho procurato di riſchiarare la materia per sè ſteſſa oſcuriſſima, sì perchè m'è riuſcito di farci per entro qualche non diſpregevole ſcoperta, e di notare altresì alcun picciolo neo, che anderò opportunamente ſegnando, nelle ſpeculazioni per altro ſublimi del chiariſſimo Autore.

Se nulla diſtendendoſi le lunghezze inferiori di due cilindri, s'allungano ſolamente le ſuperiori, o a roveſcio, e ciò per opera di due forze minime uguali normali alle baſi dei cilindri, ed applicate a' punti analoghi de' loro diametri ſituati ne' piani, in cui giacciono le mentovate oppoſte lunghezze, gli allungamenti corriſpondenti a' punti analoghi de' diametri ſteſſi ſtanno in ragione compoſta, diretta delle lunghezze de' cilindri, ed inverſa della rigidità della materia, onde ſono formati, e delle loro baſi, o ſia dei quadrati de' loro diametri.

II. Ci ſieno (*fig.* 1.) due cilindri *OV*, *ov*, i quali ſi trovino in tali circoſtanze, che nulla dilatandoſi le lunghezze inferiori *VM*, *vm*, ſi diſtendano a grado a grado le ſuperiori, dimodochè gli allungamenti s'eguaglino alle ordinate dei triangoli *MOL*, *mol*. Si fingano totalmente infleſſibili le loro baſi *MGOI*, *mgoi*, e ſuppongaſi, che i mentovati allungamenti ſieno cagionati da due forze infinitesime uguali applicate con direzione normale alle dette baſi, per eſempio all' eſtremità *O*, *o* dei diametri *MO*, *mo* collocati ne' piani *VL*, *vl*: dico che le diſtenſioni *OL*, *ol* corriſpondenti ai punti analoghi *O*, *o* ſerbano la proporzione compoſta, diretta delle lunghezze *SO*, *so* dei cilindri, e reciproca della rigidità della materia, onde conſtano, e dei quadrati dei loro diametri.

Si ſegnino prima le linee finite *MP*, *mp*, indi le infinitesime *PR*, *pr* proporzionali ai diametri *MO*, *mo*, e ſi tirino parallele alle lunghezze *VM*, *vm* le linee *KZ*, *NX*; *kz*, *nx*. Per tali coppie di linee paſſino dei piani normali ai piani *VL*, *vl*, e queſti ſegneranno due parallelepipedi, le cui lunghezze *KP*, *kp*, e le baſi *GH*, *gh*. Eſſendo *MO*: *MP*:: *mo*: *mp*, *MO*: *MP*:: *OL*: *PZ*, *mo*: *mp*:: *ol*: *pz*, ſi verifica parimente l' analogia

$OL : PZ :: ol : pz$, la quale c' insegna, che gli allungamenti dei due cilindri in siti analoghi abbracciano la medesima proporzione. Vengano le distensioni PZ, pz direttamente effettuate nei solidi KR, kr da due forze minime uguali. Ho dimostrato nella mia Opera *Delle Corde, ovvero Fibre elastiche* al numero IV. dello Schediasma I, che gli allungamenti prodotti da forze infinitesime pari in due corde elastiche, che non sien tese, stanno come le loro lunghezze divise pel prodotto della rigidità della materia, onde sono composte, nelle loro basi: e le dimostrazioni ivi addotte, che non ripeto presentemente, s' adattano interamente ai parallelepipedi KR, kr. Per la qual cosa le distensioni PZ, pz serberanno la nominata relazione: ma le basi GH, gh, che sono porzioni simili delle basi circolari dei cilindri, si riferiscono nella ragione dei quadrati de' diametri MO, mo; dunque le distensioni PZ, pz dei solidi KR, kr, ed altresì quelle di tutte l' altre coppie di solidi fondati su basi simili, e similmente situati, che in pari numero compongono i nostri cilindri, accettano la proporzione delle lunghezze VM, vm divise pel prodotto della rigidità della materia nel quadrato dei diametri de' cilindri. Si cavi la conseguenza, che in qualunque pajo di parallelepipedi collocati in siti analoghi gli allungamenti, che si riguardano nella mentovata ragione, sono cagionati da forze uguali.

Si restituiscano ora i cilindri per gli spazietti $L\mathfrak{Q}$, lq parti infinitesime simili degli spazj OL, ol, ed agevole riuscirà la riflessione, essere $OL : PZ :: \mathfrak{Q}L : YZ :: ol : pz :: ql : yz$, e che perciò gli spazietti analoghi $\mathfrak{Q}L$, ql; YZ, yz si riferiscono nella stabilita ragione, nella quale altresì si riguarderanno le reazioni menomissime delle forze a coppia a coppia eguali applicate ai punti analoghi Z, z; L, l ecc. Lo stesso rapporto parimente accetteranno gli aggregati di queste reazioni. Se tolte di mezzo tali forze infinite di numero, io

voglio collocare nei siti L, l due forze equipollenti per le direzioni OL, ol, egli è d'uopo, che alla somma delle reazioni delle forze levate s'eguagli l'unica reazione della forza sostituita. Quindi le reazioni delle due forze surrogate dovranno stare come $QL : ql$; ma le dette forze reagiscono per gli spazj QL, ql; dunque le reazioni sono come gli spazj, per cui resistono le due forze, il che non può verificarsi senon nel caso, che sieno uguali esse forze. Se due forze uguali pertanto normali alle basi dei cilindri OV, ov, ed applicate ai punti analoghi O, o dei diametri MO, mo situati nei piani VL, vl fanno equilibrio colla forza elastica dei cilindri stessi, le corrispondenti distensioni OL, ol devono serbare la ragione composta, diretta delle lunghezze SO, so dei cilindri, ed inversa della rigidità della materia, di cui sono formati, e dei quadrati de' loro diametri.

Determinare la forza, la quale, supponendosi applicata per una data direzione in un sito determinato, sia equipollente alla forza elastica d'una menoma porzione di cilindro infinitamente poco incurvato.

III. Sia $AVMF$ (Fig. 2.) la curva di menoma piegatura, a cui vibrandosi si sia adattato un cilindro, ed AC, CM sieno le coordinate l'una all'altra normali. La lunghezza pochissimo incurvata MV della porzione elementare LV del detto cilindro venga combaciata dal circolo MV descritto col raggio infinitamente lungo DM. Alla linea DVS pel punto M conduco parallela la retta MO. Potendosi supporre, che nel ripiegarsi la lunghezza inferiore MV del mentovato cilindretto non abbia ricevuta alterazione, si farà egli superiormente dilatato per OL.

Fingasi collocata in A una forza equipollente a tutte quelle, che come vedremo sono parallele alle ordi-

nate MC, le quali fanno equilibrio col cilindretto LV. S' io risolverò questa forza in due, una parallela, e l'altra normale alla direzione MV d'esso cilindro, troverò la prima minima rispettivamente alla seconda; perchè discostandosi infinitamente poco la curva $AVMF$ dalla linea retta AB, la direzione della forza, che si risolve, è pressochè perpendicolare alla linea MV. La forza menomissima parallela ad MV allunga tutto il cilindretto LV egualmente, e la normale rispettivamente infinita ripiega il detto cilindro, e cagiona le distensioni espresse dalle ordinate del triangolo MOL. Ecco adunque, che trascurando l'allungamento comune a tutto il cilindro, siccome operato da una forza adequatamente uguale a nulla, mi è concesso il supporre, che la lunghezza inferiore MV ritenga la sua naturale misura.

Chiamo la lunghezza del cilindro $MV = ds$, il raggio osculatore $DM = R$, il diametro di esso cilindro $ML = D$, la rigidità della materia, che lo compone, $= r$. La similitudine dei triangoli DMV, MLO mi somministra l'analogia

$DM : MV :: ML : LO$

$R : ds :: D : \frac{Dds}{R}$, da cui si ricava $LO = Dds : R$.

Una forza costante $= 1$, che agisse per la direzione OL, allungherebbe il cilindro, come ho dimostrato al numero *II.* per lo spazio proporzionale a $ds : rD^2$, il quale sta in ragione composta, diretta della lunghezza del cilindro, ed inversa del quadrato del diametro, o sia della base del cilindro, e della rigidità della materia, della qual è formato. Essendo pertanto nello stesso cilindro le distensioni come le forze minime, che le cagionano; se l'allungamento come $ds : rD^2$ è prodotto dalla forza $= 1$, ne segue, che per ottenere la dilatazione $LO = Dds : R$ ci vorrà la forza proporzionale a $D^3r : R$.

Si restituisca il nostro cilindro per lo spazio $L\mathcal{Q}$ porzione inassegnabile dello spazio LO, ed il raggio osculatore

latore MD s'allunghi, e divenga uguale ad $MG = R + dR$; troveremo la linea $\mathcal{Q}O = \frac{Dds.}{R+dR}$, la quale sottratta da $LO = Dds : R$, ci dà $L\mathcal{Q} = DdRds : R^2$. Quindi la reazione della forza proporzionale a $D^3r : R$, che per lo spazio $L\mathcal{Q}$ si conserva costante, starà come $D^4rdRds : R^3$. Taglio $MT = 1 : R$, e pel punto T conduco TR parallela ad $L\mathcal{Q}$. Dalla similiglianza dei triangoletti $ML\mathcal{Q}$, MTR deduco l' analogia

$ML : L\mathcal{Q} :: MT : TR$

$D : \frac{DdRds}{R^2} :: \frac{1}{R} : \frac{dRds}{R^3}$, che mi addita il valore di $TR = dRds : R^3$. Voglia collocarsi in T colla direzione RT una forza equipollente a quella, che s'è applicata in L, e che per conseguenza faccia equilibrio coll'elasticità del cilindro LV. Se le due forze in L, ed in T hanno ad essere equipollenti, le loro reazioni per gli spazj $L\mathcal{Q}$, TR debbono essere uguali. S'inferisca, che divisa la reazione della prima forza, proporzionale a $D^4rdRds : R^3$ per lo spazietto $TR = dRds : R^3$, per cui reagisce la seconda, ne proverrà la grandezza della forza stessa applicata nel sito T proporzionale a D^4r, cioè a dire in ragione composta del quadrato-quadrato del diametro del cilindro, che si vibra, e della rigidità della materia, della qual è formato.

Sia M la massa di tutto il cilindro, L la sua lunghezza, g la sua gravità specifica, o densità, e la quantità $M : gL$ esprimerà la base del cilindro, la quale serba la ragione del quadrato D^2 del diametro. Sostituendo in vece di D^4 la grandezza proporzionale $M^2 : g^2L^2$ troveremo stare come $M^2r : g^2L^2$ quella forza applicata alla distanza $MT = 1 : R$, che forma equilibrio coll'elasticità del cilindretto LV, la cui minima curvatura $= 1 : R$. Nominata E la detta forza, avremo $KrM^2 : g^2L^2 = E$, ed il coefficiente K farà costante in tutti i cilindri.

IV. Se col metodo da me tenuto rispettivamente ai cilindri avessi cercato il valore della forza E nelle lamine elastiche, mi sarebbe riuscito di trovarlo in ragione composta della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del cubo della sua grossezza. Alla forza E il Signor *Eulero* dà il titolo di elasticità assoluta della lamina, e senza dimostrarlo, l'asserisce proporzionale al prodotto della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del quadrato della grossezza. Questo sbaglio influisce nella legge dei tempi delle vibrazioni delle lamine elastiche determinata dal nostro Autore, la quale non corrisponde ai fenomeni, salvochè nella circostanza, che le diverse lamine sieno di pari grossezza.

Trovare col mezzo degli esperimenti il valore della forza E.

V. Alla muraglia perpendicolare BK sia immobilmente raccomandato il cilindro $AVMF$, il quale prima di essere incurvato teneva la positura HF a squadra della linea FB. Avverto, che la retta HF tocca la curva $AVMF$ nel punto F. Una forza P applicata al punto estremo A con direzione sempre parallela ad FB abbia ripiegato il cilindro nella curva $AVMF$, e formi con esso equilibrio, e con tutti i suoi elementi. Pel punto A si tiri AB parallela ad HF, e dal punto M si lasci cadere l'ordinata MC normale ad AB. Si tagli $ME = AC$, e si conduca la diagonale AM. Chiamo $AB = a$, $BF = b$, $AC = x$, $CM = y$; e giacchè il cilindretto LV sta in equilibrio colla forza P, se supporremo, che invariata rimanga la curvatura del resto del cilindro, e che solamente l'elasticità del cilindretto LV eserciti una menoma azione, a questa dovrà esser uguale la reazione della forza P. In cambio dell'elasticità del cilindro LV io posso sostituire la forza equivalente E applicata in T, ovvero in R, la quale

agiſca per lo ſpazietto RT. Il punto R della linea MR deſcriverà l' archetto RT, ed i raggi $MI=ME$, ed MA ſegneranno gli archi IE, AZ ſimili all' RT. Dal punto Z ſi cali ZN normale ad AB. Eſſendo la direzione della forza P perpendicolare ad AB, reagiſce per lo ſpazio NZ, mentre la forza E agiſce per lo ſpazio RT. Avremo dunque per le leggi dell'equilibrio $P.NZ=E.RT$. I triangoli ſimili MAC, AZN m' inſegnano eſſere $MA:AZ::AC:NZ$; ma per la ſimiglianza dei ſettori MAZ, MIE, $MA:AZ::MI:IE$; dunque $AC:NZ::MI:IE$; e giacchè per la coſtruzione $AC=MI=x$, ſarà parimente $NZ=IE$. Avremo pertanto $P.IE=E.RT$, e ſurrogando in luogo degli archetti IE, RT i raggi proporzionali $MI=AC=x$, $MR=1:R$, $Px=E:R$.

VI. Chiamano i Meccanici la quantità Px il momento della forza P riſpettivamente al punto M, e dovendo queſta far equilibrio coll' elaſticità del cilindro, il cui momento $E:R$, ſtabiliſcono l' equazione $Px=E:R$. Ho ſtimato opportuna coſa riſchiarar la materia, deducendo la noſtra formola dall' eguaglianza delle azioni menomiſſime, che mutuamente s' impediſcono, nella quale conſiſte il vero fondamento dell'equilibrio. Fa vedere il progreſſo del mio raziocinio, che le grandezze Px, $E:R$ ſono proporzionali alle azioni eguali, e contrarie, l' una delle quali ſerve all' altra d' impedimento, della forza P, e dell' elaſticità del cilindro LV. Quindi ſiccome rettamente ſi nomina Px il momento della forza P, così $E:R$ ſi dee appellare il momento della forza elaſtica del cilindretto LV, la cui curvatura $1:R$, e per queſta parola momento altro non ſi dee intendere, ſalvochè le mentovate virtuali infiniteſime azioni uguali, e contrarie, o quantità ad eſſe proporzionali.

VII. Dopo queſta forſe non inutile digreſſione torno in ſentiero, e ripigliata per mano l' equazione Px

$= E : R$, osservo che preso siccome costante l' elemento dx dell' asissa, abbiamo il raggio osculatore $R = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{(dx^2+dy^2)^{3:2}}{-dxddy}$. Ponendo in opera un tal valore, trovo $Px = \frac{-Edxddy}{(dx^2+dy^2)^{3:2}}$, o sia $Pxdx = \frac{-Edx^2ddy}{(dx^2+dy^2)^{3:2}}$, formola, che riceve la seguente integrazione $P.(\frac{1}{2}x^2+f) = \frac{-Edy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, la quale maneggiata mi dà $dy = \frac{-Pdx.(\frac{1}{2}x^2+f)}{\sqrt{(E^2-P^2.(\frac{1}{2}x^2+f)^2)}}$. Si determina la costante f riflettendo, che nel sito F la tangente HF è parallela all' asissa AB; laonde $dy : dx = 0$, e perciò $\frac{1}{2}x^2+f = 0$, ovvero $f = -\frac{1}{2}x^2$: ma in questo caso $x = AB = a$; dunque $f = -\frac{1}{2}a^2$. Fatto uso di questo valore, ed adempiuti i necessarj calcoli, ci si presenterà $dy = \frac{(a^2-x^2).dx}{\sqrt{(4E^2:P^2-a^4+2a^2x^2-x^4)}}$.

S' adatti all' estremità A del cilindro $AVMF$ una forza, o peso P assai picciolo rispettivamente alla forza E, dimodochè il cilindro stesso si ripieghi per una saetta FB fisicamente menoma, ma che per altro possa accuratamente misurarsi. In sì fatta ipotesi la quantità $4E^2 : P^2$ sarà talmente grande, che si potrà in riguardo alla pratica trascurare la grandezza $-a^4+2a^2x^2-x^4$. Avremo pertanto $dy = \frac{(a^2-x^2)dx}{2E:P}$, ed integrando $y = \frac{P.(a^2x-\frac{1}{3}x^3)}{2E}$: ma quando $x = a$, $y = b$; dunque $b = Pa^3 : 3E$, e finalmente $E = Pa^3 : 3b$, valore della forza E, che non si discosterà dal vero sensi-

bilmente, purchè la curvatura del cilindro ſia piccioliſſima.

VIII. Avendo dimoſtrato eſſere E come rD^4, ſtarà per conſeguenza rD^4 come $Pa^3 : 3b$, ed r come $Pa^3 : 3bD^4 = E : D^4$. Col mezzo adunque della premeſſa eſperienza ſi può ſcoprire la proporzione fra le rigidità delle materie, onde ſono compoſti i cilindri. Stabilirò in progreſſo al numero XXV un altro canone ugualmente ſemplice che ſerve a determinare la detta proporzione.

IX. Nella formola $dy = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{\sqrt{4E^2 : P^2 - a^4 + 2a^2x - x^4)}}$ ſi faccia $2E : P = c^2 - a^2$, e conſeguentemente $4E^2 : P^2 = c^4 - 2c^2a^2 + a^4$. Supponendoſi $2E : P$ una quantità aſſai grande riſpettivamente ad x, e ad a, ſarà parimente tale la quantità c, come agevolmente raccoglieſi dall' equazione aſſunta $2E : P = c^2 - a^2$. Soſtituito in cambio di $2E : P$ il ſuo valore, troveremo $dy = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{\sqrt{(c^4 - 2c^2a^2 + 2a^2x^2 - x^4)}}$. Se nel denominatore io trafcuro i ſoli due termini $2a^2x^2 - x^4$, la cui ſomma è fiſicamente nulla non ſolo in riguardo a c^4, ma ancora per rapporto a $-2c^2a^2$, mi ſi preſenta la formula $dy = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{\sqrt{(c^4 - 2c^2a^2)}}$, che s'adegua alla ſeguente $dy = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{c^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{2E : P}$, da cui ricavo $E = Pa^3 : 3b$.

Ma s' io trafando altresì il termine $-2c^2a^2$, ho l' equazione $dy = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{c^2}$, la quale integrata mi dà $y = \frac{a^2x - \frac{1}{3}x^3}{c^2}$. Corriſpondendo $y = b$ ad $x = a$, troveremo $b = 2a^3 : 3c^2$, e ponendo in luogo di c^2 il ſuo

valore $2E:P+a^2$, $3b=\frac{2a^3}{2E:P+a^2}$. Dal maneggio di questa formola si ricava $E=\frac{Pa^2.(2a-3b)}{6b}$. Il Signor *Eulero* assegna alla forza E un tal valore, il quale è meno semplice, e meno esatto di quello, che da me è stato determinato.

Determinare l' equazione della curva, a cui s' adatta un cilindro, che si vibra.

X. Tenga il cilindro prima di vibrarsi la positura rettilinea *ACB* (*fig. 3*), e messo poscia in oscillazione s' adatti alla curva *aEcFb*, la quale si discosti dalla linea retta *ACB* per minimi spazj. Sia la lunghezza del cilindro *acb*, ovvero $ACB=L$, la sua massa $=M$, il raggio osculatore in $M=R$, il momento dell' elasticità del cilindro nel sito medesimo $=E:R$. Si chiami inoltre $Aa=b$, $AP=aM=x$, $PM=y$. Effettuando il nostro cilindro nel tempo stesso le sue menome vibrazioni più, o meno estese, dee necessariamente oscillare colla legge di un pendolo a cicloide. Sia f la lunghezza del pendolo semplice isocrono, e giacchè questo, mentre gli resta da scorrere lo spazio $MP=y$, viene animato dalla forza acceleratrice $y:f$, tale sarà altresì la forza acceleratrice del cilindro nel sito M. La massa d' un elemento d' esso cilindro, la cui lunghezza dx s' eguaglia ad $Mdx:L$, la quale moltiplicata per $y:f$, mi dà la forza sollecitante il detto elemento collocato in $M=Mydx:Lf$. Il cilindro dopo compiuta un' oscillazione si trovi nella positura *aEcFb*, e se in tale istante a tutti i punti d' esso cilindro s' applicheranno le convenienti forze $Mydx:Lf$ con direzioni contrarie, per esempio MH, mb, a quelle delle forze sollecitanti, non seguirà più moto, ed

il cilindro si fermerà in equilibrio. Le forze applicate alla curva aM stanno in equilibrio colla forza elastica del cilindro in M: ed in fatti se questa si minorasse, tutte le dette forze si porrebbero in azione. Quindi l' aggregato dei momenti delle mentovate forze dee pareggiare il momento $E:R$ della forza elastica nel sito M.

Nomino p la somma delle forze applicate alla curva am, e dp per conseguenza sarà la forza, che tira l' elemento mu per la direzione mb. Il momento di essa forza rispettivamente al punto M, mettendo $Ap=q$, s'eguaglia ad $(x-q).\ dp$. Per trovare la somma desiderata dei momenti delle nostre forze in riguardo al punto M, si considerino per poco il detto punto, e l' assissa $AP=x$ come costanti, prendendo $Ap=q$ in qualità di variabile. Avremo pertanto l' aggregato dei momenti rispettivamente al punto M delle forze applicate alla porzione di curva $am = xp - \int qdp$: ma $\int qdp = qp - \int pdq$; dunque la mentovata somma $= xp - qp + \int pdq$. Giunga il punto m in M, e diverrà $q=x$, $dq=dx$. Sostituiti questi valori, troveremo la somma dei momenti per rapporto al punto M di tutte le forze applicate alla parte di cilindro $aM = \int pdx$. Ora dovendosi un tale aggregato eguagliare al momento $E:R$ dell' elasticità del cilindro nel sito M, siam pervenuti all' equazione $E:R=\int pdx$, e surrogando in vece di p l' eguale grandezza $\int \frac{Mydx}{Lf}$, $E:R=\int\left(dx\int\frac{Mydx}{Lf}\right)$. Nel caso presente, in cui la flussione costante dx dell' assissa s' adegua all' elemento ds della curva, si verifica essere $R=dx^2:ddy$, e perciò avremo $Eddy:dx^2=\int\left(dx\int\frac{Mydx}{Lf}\right)$. Prendo le differenze, e trovo $Ed^2y:dx^2=dx\int Mydx:Lf$, e

nuovamente differenziando $Ed^4y = Mydx^4 : Lf$, equazione alla curva cercata *aEcFb*.

XI. La somma dei momenti rispettivamente al punto *M* delle forze applicate al rimanente del cilindro *MEcFb* esser dee uguale, e contraria alla somma dei momenti delle forze applicate alla porzione *aM*, e l' una e l' altra di queste somme dee pareggiare il momento dell' elasticità $= \dot{E} : R$ del cilindro nel sito *M*. Così l' elemento di cilindro collocato in *M* sta in equilibrio, essendo preso in mezzo da due aggregati di momenti eguali, e contrarj. Se avessi considerati i momenti delle forze applicate alla parte *MEcFb* del cilindro, fatta la riflessione essere $BP = L - x$, ed il suo incremento $= -dx$, avrei scoperto $Eddy : dx^2$ $= \int \left(-dx \int - \frac{Mydx}{Lf} \right)$, espressione, che ci guida alla formula testè trovata $Edy = Mydx^4 : Lf$.

La premessa avvertenza me ne suggerisce un' altra, cioè che la somma dei momenti rispettivamente ai punti estremi *a*, *b* delle forze applicate a tutto il cilindro *aEcFb* deve uguagliarsi a nulla, siccome quella, che ha da formar equilibrio coll' aggregato dei momenti delle forze applicate al residuo del cilindro, che ne' due mentovati casi pareggia il nulla. Posta dunque $x = 0$, o pure $x = AB = L$, avremo $E : R = Dddy : dx^2$ $= \int \left(\pm dx \int \pm \frac{Mydx}{Lf} \right) = 0$. Si cavi la conseguenza essere nulla la curvatura $1 : R$ del cilindro nei siti *a*, *b*, e nullo parimente il momento della sua elasticità.

XII. Le forze *MH* uguali, e contrarie a quelle, che tentano di far reciprocare il cilindro, e spingono i suoi punti, per esempio *M*, verso la linea retta *AB*, debbono trattenere il cilindro stesso nella positura *aEcFb* totalmente immobile, senza che possa in esso seguire o moto progressivo per l' una, o l' altra direzione *Cc*, *cC*,

cC, o moto di giramento intorno qualfivoglia punto. Queſt' ultimo movimento non ſuccederà, quando i momenti delle forze applicate a deſtra, e a ſiniſtra di qualunque punto M ſieno eguali, e contrarj, e che per conſeguenza facciano equilibrio. Non accaderà nè pure il moto progreſſivo, qualora s' adempia la condizione, che l' aggregato delle forze traenti il cilindro per la direzione cC pareggi quello, che il tira per la direzione contraria Cc. Abbiamo veduto, che la ſomma delle forze applicate alla porzione aM s' eguaglia ad $M : LF \int ydx$: ma $\int ydx$ dinota l' aja $auMPA$; dunque la nominata ſomma delle forze applicate alla parte di cilindro aM ſcelta ad arbitrio è ſempre proporzionale alla corriſpondente aja $auMPA$. Dovendo il cilindro eſſer ugualmente tirato per le due direzioni oppoſte cC, Cc, egli è d' uopo che l' aja poſitiva $aEA + bFB$ pareggi la negativa $EFcE$, dimodochè facendo $x = AB = L$, ſi trovi $\int ydx = o$.

Oſſerveremo in progreſſo, che il cilindro AB ſi può oſcillando adattare ad infinite curve, la metà delle quali tagliano l' aſſe AB in un numero pari di punti, ed il rimanente in un numero impari. Le più ſemplici fra le dette curve ſi veggono eſpreſſe nelle figure 3, e 4. Pretende il Signor *Eulero*, che le curve del ſecondo genere non ſervano per le vibrazioni delle lamine elaſtiche; ma queſta ſua aſſerzione non è conforme alla verità, potendoſi anco riſpettivamente a tali curve determinare le coſtanti aggiunte nelle integrazioni, di maniera che ſieno eguali i momenti delle forze a deſtra, e a ſiniſtra d'un qualunque punto, e che di più ad $x = AB = L$ corriſponda $\int ydx = o$. L' eſperienza favoriſce i miei penſamenti; imperciocchè ſoſtenendo in bilico una lamina con un dito, ed indi percuotendola, ſi ſente chiaro quel ſuono, che rende la lamina ſteſſa, mentre s' uniforma alla curva della figura 4, che non viene punto diſturbata dal dito, il quale tocca la la-

mina nel sito immobile *C*. Il dito applicato in *C* ammortisce la metà dei suoni della lamina, cioè a dire tutti quelli ch' essa produce, mentre s' adatta alle curve del primo genere, nelle quali tutte al punto *C* (*Fig.* 3, 5, 7 ecc.) si riferisce la massima ordinata *Cc*.

Integrare l' equazione $\frac{ELfd^4y}{M} = ydx^4$, *e determinare i valori delle costanti aggiunte nelle integrazioni.*

XIII. Pongasi $ELf : M = c^4$, onde s' abbia $c^4d^4y = ydx^4$. Il celebratissimo Sig. *Eulero nel Tomo VII. delle Miscellanee di Berlino* ci ha insegnata la generale integrazione di tali equazioni differenziali di alto grado. Col mezzo di questo metodo si trova $y = Ae^{x:c} + Be^{-x:c} + C$ sen. $x:c + D$ cos. $x:c$ (1), in cui *e* dinota il numero, che ha per logaritmo l' unità nella logistica delle sottotangente $= 1$. I logaritmi presi nella suddetta logistica si chiamano naturali, o iperbolici; perchè si suole con essi esprimere la quadratura dell' iperbola. Il lodato Autore nella sua eccellente Introduzione all' Analisi degl' infiniti ha computato il valore del numero *e*, che, presa l' unità come protonumero, si suol nominare la base della logistica $= 2, 7182818$. Ci ha dato parimente nello stesso luogo la serie dei logaritmi iperbolici dall' 1 fino al 10. Per i computi, che siam per fare, basta il sapere, che il numero 10 nelle tavole ha per logaritmo 1, 000000, e nella logistica iperbolica 2, 3025851, e che nella stessa proporzione si deggiono riferire i logaritmi dell' una e dell' altra logistica, che corrispondono allo stesso numero. Coll' ajuto dunque dei logaritmi delle tavole si potrà trovare il logaritmo iperbolico di qualunque numero. Nella sovrapposta formola sen. $x:c$, e cos. $x:c$ dinotano il seno, ed il coseno dell' arco $x:c$ preso nel circolo, il cui raggio $= 1$. *A*, *B*, *C*, *D* sono quattro

costanti introdotte nelle altrettante integrazioni, a cui è d' uopo assegnare i convenienti valori.

Si prendano nella nostra equazione le prime, ed indi le seconde, le terze, e le quarte differenze, ed avvertendo essere diff. $e^{x:c} = 1:c\, e^{x:c}\, dx$, diff. sen. $x:c = dx:c$ cos. $x:c$, diff. cos. $x:c = -dx:c$ sen. $x:c$, troveremo

$$dy = \frac{A}{c} e^{x:c} dx - \frac{B}{c} e^{-x:c} dx + \frac{C dx}{c} \text{cos.} \frac{x}{c} - \frac{D dx}{c} \text{sen.} \frac{x}{c} \quad (2)$$

$$ddy = \frac{A}{c^2} e^{x:c} dx^2 + \frac{B}{c^2} e^{-x:c} dx^2 - \frac{C dx^2}{c^2} \text{sen.} \frac{x}{c} - \frac{D dx^2}{c^2} \text{cos.} \frac{x}{c} \quad (3)$$

$$d^3y = \frac{A}{c^3} e^{x:c} dx^3 - \frac{B}{c^3} e^{-x:c} dx^3 - \frac{C dx^3}{c^3} \text{cos.} \frac{x}{c} + \frac{D dx^3}{c^3} \text{sen.} \frac{x}{c} \quad (4)$$

$$d^4y = \frac{A}{c^4} e^{x:c} dx^4 + \frac{B}{c^4} d^{-x:c} dx^4 + \frac{C dx^4}{c^4} \text{sen.} \frac{x}{c} + \frac{D dx^4}{c^4} \text{cos.} \frac{x}{c} \quad (5)$$

Se nell' equazione (5) sostituiremo y in cambio del suo valore $Ae^{x:c} + Be^{-x:c} + C$ sen. $x:c + D$ cos. $x:c$ somministrato dall' equazione (1), torneremo a trovare la formola differenziale $d^4y = ydx^4 : c^4$.

Le cinque notate formule ci guidano alla determinazione delle costanti.

In primo luogo ad $x = 0$ dee corrispondere $y = b$. Essendo in tal caso $e^{x:c} = 1$, $e^{-x:c} = 1$, sen. $x:c = 0$, cos. $x:c = 1$, la prima equazione si trasforma così $b = A + B + D$ (6).

In secondo luogo m' insegna il numero XI, che posta $x = 0$, o pure $x = L$, deve uguagliarli a nulla rispettivamente ai punti estremi a, b la somma dei momenti delle forze applicate a tutto il cilindro $aEcFb$, onde s' abbia $Eddy:dx^2 = \int(\pm dx \int \pm Mydx:Lf) = 0$, ovvero sostituendo c^4 in luogo di $ELf:M$, $c^4 ddy : dx^2 = \int(\pm dx \int \pm ydx) = 0$. Fatta pertanto nell' equazione (3) $ddy : dx^2 = 0$, e ponendo prima $x = 0$, indi $x = L$, troveremo

$0 = A + B - D$ (7)

$o = Ae^{L:c} + Be^{-L:c} - C$ sen. $L:c - D$ cos. $L:c$ (8).

In terzo luogo posta $x = o$, è parimente nulla l'aja $APMa = \int y dx$: ma come s'è stabilito al numero X $ELf: M \cdot d^3y : dx^3 = c^4 d^3y : dx^3 = \int y dx$; dunque uguagliata a nulla nell'equazione (4) la grandezza $d^3y : dx^3$, e mettendo $x = o$, si presenterà

$o = A - B - C$ (9).

Finalmente al numero XII abbiamo stabilito, che ancor nell'ipotesi di $x = L$ esser dee $\int y dx = o$. Quindi ponendo nell'equazione (4) $d^3y : dx^3 = o$, ed $x = L$, si scoprirà

$o = Ae^{L:c} - Be^{-L:c} - C$ cos. $L:c + D$ sen. $L:c$ (10).

Col mezzo delle cinque notate condizioni s'assegneranno i loro valori alle quantità costanti A, B, C, D, ed alla frazione $L:c$, la quale servirà poi per determinare la lunghezza f del pendolo semplice isocrono al cilindro AB.

Le formole (7), e (9) mi danno $D = A + B$, $C = A - B$, valori che surrogati nelle formole (8), e (10) fanno loro prendere il seguente aspetto

$o = Ae^{L:c} + Be^{-L:c}(-A+B)$. sen. $L:c(-A-B)$. cos. $L:c$,

$o = Ae^{L:c} - Be^{-L:c}(-A+B)$. cos. $L:c(+A+B)$. sen. $L:c$.

Si deduce da queste

$$\frac{A}{B} = \frac{-e^{-L:c} - \text{sen. } L:c + \text{cos. } L:c}{e^{L:c} - \text{sen. } L:c - \text{cos. } L:c} = \frac{e^{-L:c} - \text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c}{e^{L:c} - \text{cos. } L:c + \text{sen. } L:c} \quad (11),$$

e dall'equazione (11)

$o = 2 - e^{L:c}$ cos. $L:c - e^{-L:c}$ cos. $L:c$, o sia

$e^{2L:c} - \frac{2e^{L:c}}{\text{cos. } L.c} = -1$. Si supplisca il quadrato, ed

estratta poscia la radice si troverà

$$e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} \quad (12).$$

Il primo dei due valori, che per la formola (11) competono alla frazione $A:B$, s'eguaglia a $\frac{\text{cos. } L:c}{1-\text{sen. } L:c}$, il secondo a $\frac{-\text{cos. } L:c}{1+\text{sen. } L:c}$.

Giacchè, come ho testè dimostrato $e^{L:c} = \frac{1-\text{sen.}L:c}{\text{cos. } L:c}$, farà, sostituendo una tale grandezza in luogo di $e^{L:c}$ nel primo valore di $A:B$ contenuto nella formola

$$(11) = \frac{\frac{-\text{cos. } L:c}{1-\text{sen. } L:c} - \text{sen. } L:c + \text{cos.}L:c =}{\frac{1-\text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} - \text{sen. } L:c - \text{cos.}L:c}$$

$$\frac{\text{cos. } L:c}{1-\text{sen.}L:c}\left(\frac{-\text{sen. } L:c+(\text{sen. } L:c)^2-\text{sen. } L:c \text{ . cos. } L:c}{1-\text{sen.}L:c-\text{sen.}L:c \text{ . cos.}L:c-(\text{cos.}L:c)^2}\right)$$

: ma $1-(\text{cos. } L:c)^2 = (\text{sen. } L:c)^2$; dunque effettuata questa sostituzione nel denominatore,

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{cos. } L:c}{1-\text{sen. } L:c} \times \frac{-\text{sen.}L:c+(\text{sen.}L:c)^2-\text{sen.}L:c \text{ . cos. } L:c}{-\text{sen.}L:c+(\text{sen.}L:c)^2-\text{sen. } L:c \text{ . cos.}L:c}$$

$$= \frac{\text{cos. } L:c}{1-\text{sen. } L:c}.$$

Con pari metodo proverò essere

$$\frac{A}{B} = \frac{e^{-L:c}-\text{cos.}L:c-\text{sen.}L:c}{e^{L:c}-\text{cos. } L:c+\text{sen.}L:c} = \frac{-\text{cos. } L:c}{1+\text{sen. } L:c},$$

e perciò avremo

$\frac{A}{B} = \frac{\pm \text{cos. } L:c}{1 \pm \text{sen. } L:c}$. Da questa formola io ricavo

$$B = A.\left(\frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\pm \text{cos. } L:c}\right) = A.\left(\frac{\pm 1 - \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}\right)$$

Essendo per la formola (9) $C = A - B$, scopriremo

$$C = A.\frac{(\text{cos. } L:c + \text{sen. } L:c \mp 1)}{\text{cos. } L:c}$$

L'equazione (7) determina $D = A + B$, e quindi troverassi

$$D = A.\frac{(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)}{\text{cos. } L:c}$$

Dandoci inoltre la formola (6) $b = A + B + D$, e la (7) $D = A + B$, ne risulta

$$D = b:2 = A.\frac{(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 2)}{\text{cos. } L:c}.$$

I due valori di D mi somministrano quello di

$$A = \frac{b \text{ cos. } L:c}{2.(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)}$$

Or ecco i valori delle quattro costanti, i quali si renderanno noti, ridotta che sia a computo la frazione $L:c$ coll'mezzo dell'equazione (12.)

$$A = \frac{b.\text{ cos. } L:c}{2.(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \mp 1)} = \frac{b.(\pm 1 + \text{sen. } L:c - \text{cos. } L:c)}{4.\text{ sen. } L:c} \quad (13.)$$

$$B = \frac{b.(\pm 1 - \text{sen. } L:c)}{2.(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)} = \frac{b.(\mp 1 + \text{sen. } L:c + \text{cos. } L:c)}{4\text{ sen. } L:c} \quad (14.)$$

$$C = \frac{b.(\mp 1 + \text{sen. } L:c + \text{cos. } L:c)}{2.(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)} = \frac{b.(\pm 1. - \text{cos. } L:c)}{2.\text{ sen. } L:c} \quad (15.)$$

$$D = b:2. = \frac{b \text{ sen. } L:c}{2.\text{ sen. } L:c} \quad (16.)$$

Le seconde espressioni delle costanti A, B, C si provano eguali alle prime con un breve giro di computo, ch'io lascio all'industria di chi legge.

Soſtituiti queſti valori nell'equazione (1), troveremo

$$\frac{y}{b} = \frac{e^{x:c}\text{cof. } L:c + e^{-x:c} \cdot (\pm 1 - \text{ſen. } L:c)}{2 \cdot (\text{cof. } L:c - \text{ſen. } L:c \pm 1)}$$

$$\frac{(\pm 1 - \text{cof. } L:c) \cdot \text{ſen. } x:c + \text{ſen. } L:c \cdot \text{cof. } x:c}{2 \text{ ſen. } L:c} \quad (17).$$

Ridurre a forma più ſemplice la formola (17).

XIV. Prendano le aſſiſſe l' origine dal punto medio C (*fig.* 3 e 4), e poſta $CP = z$, farà $\frac{1}{2}L - z = x$. Avremo pertanto $e^{x:c} = e^{L:2c - z:c}$, e giacchè per l'equazione (12) $e^{L:2c} = \sqrt{\left(\frac{1 \mp \text{ſen. } L:c}{\text{cof. } L:c}\right)}$, ſcopriremo

$$e^{x:c} = e^{-z:c} \cdot \sqrt{\left(\frac{1 \mp \text{ſen. } L:c}{\text{cof. } L:c}\right)}, e^{-x:c} = e^{z:c}\sqrt{\left(\frac{\text{cof. } L:c}{1 \mp \text{ſen. } L:c}\right)}.$$

Quindi farà

$$\frac{Ae^{x:c} + Be^{-x:c}}{b} = \frac{e^{x:c}\text{cof. } L:c + e^{-x:c} \cdot (\pm 1 - \text{ſen. } L:c)}{2 \cdot (\text{cof. } L:c - \text{ſen. } L:c \pm 1)}$$

$$= \frac{(\pm e^{x:c} + e^{-x:c})\sqrt{(\text{cof. } L:c \cdot (1 \mp \text{ſen. } L:c))}}{2 \cdot (\text{cof. } L:c - \text{ſen. } L:c \pm 1)}$$

$$= \frac{\pm e^{x:c} + e^{-x:c}}{2 \cdot \left(\pm e^{L:2c} + e^{-L:2c}\right)}. \text{ Queſt' ultimo valore dipende da ciò, che per la formola (12) } \pm e^{L:2c} + e^{-L:2c}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{1 \mp \text{ſen. } L:c}{\text{cof. } L:c}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\text{cof. } L:c}{1 \mp \text{ſen. } L:c}\right)}$$

$$= \frac{\text{cof. } L:c - \text{ſen. } L:c \pm 1}{\sqrt{(\text{cof. } L:c \cdot (1 \pm \text{ſen. } L:c))}}.$$

La Trigonometria c' iſtruiſce eſſere $(\pm 1 - \text{cof. } L:c) \cdot \text{ſen. } x:c + \text{ſen. } L:c \cdot \text{cof. } x:c = \pm \text{ſen. } x:c + \text{ſen. } \left(\frac{L-x}{c}\right)$, e

sostituendo nell' omogeneo di comparazione in cambio di x il suo valore $\frac{1}{2}L - z$, $(\pm 1 - \text{cos. } L{:}c)$. sen. $x{:}c + \text{sen. } L{:}c \text{ cos. } x{:}c = \pm \text{sen. } (L{:}2c - z{:}c) + \text{sen. } (L{:}2c + z{:}c)$. Nella formola (17) alle grandezze espresse per x si sostituiscano le uguali espresse per z or ora determinate, e s' avrà

$$\frac{2y}{b} = \frac{\pm e^{z:c} + e^{-z:c}}{\pm e^{L:2c} + e^{-L:2c}} \pm \frac{\text{sen.}(L{:}2c - z{:}c) + \text{sen.}(L{:}2c + z{:}c)}{\text{sen. } L{:}c} \quad (18).$$

Abbiamo inoltre $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\text{cos. } L{:}c - \text{sen. } L{:}c + 1}{\sqrt{(\text{cos. } L{:}c \,.\, (1 - \text{sen. } L{:}c))}} = \frac{\mp 2 \text{ cos. } L{:}2c}{\sqrt{\text{cos. } L{:}c}}$ (a),

$-e^{L:2c}$

(a) L' accennata riduzione si può dimostrare così. Il secondo membro dell' equazione, lasciato da parte il divisore $\sqrt{\text{cos. } L{:}c}$, s'eguaglia, alzandolo al quadrato, alla quantità

$$\frac{(\text{cos. } L{:}c)^2 - 2 \text{ sen. } L{:}c \text{ cos. } L{:}c + (\text{sen. } L{:}c)^2 + 2 \text{ cos. } L{:}c - 2 \text{ sen. } L{:}c + 1}{1 - \text{sen. } L{:}c} = \frac{2 - 2 \text{ sen. } L{:}c + 2 \text{ cos. } L{:}c - 2 \text{ sen. } L{:}c \text{ cos. } L{:}c}{1 - \text{sen. } L{:}c} = 2 + 2 \text{cos. } L{:}c \,.$$

Il noto Teorema trigonometrico ci suggerisce l'equazione cos. $L{:}c = (\text{cos. } L{:}2c)^2 - (\text{sen. } L{:}2c)^2$: ma $(\text{sen. } L{:}2c)^2 = 1 - (\text{cos. } L{:}2c)^2$; dunque $1 + \text{cos. } L{:}c = 2 \, (\text{cos. } L{:}2c)^2$, o sia $2 + 2 \text{ cos. } L{:}c = 4 \, (\text{cos. } L{:}2c)^2$. Il perchè sostituito in cambio di $2 + 2 \text{ cos. } L{:}c$ lo scoperto valore, estratta la radice, e restituito il divisore $\sqrt{\text{cos. } L{:}c}$, troveremo $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\text{cos. } L{:}c - \text{sen. } L{:}c + 1}{\sqrt{(\text{cos. } L{:}c \,.\, (1 - \text{sen. } L{:}c))}}$

$= \frac{\mp 2 \text{ cos. } L{:}2c}{\sqrt{\text{cos. } L{:}c}}$.

$$-e^{L:2c}+e^{-L:2c} = \frac{\text{cof. } L:c - \text{fen. } L:c - 1}{\sqrt{(\text{cof. } L:c.(1+\text{fen. } L:c))}} = \frac{\pm 2\,\text{fen. } L:2c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}} (b),$$

$$\frac{\text{fen.}(L:2c-z:c)+\text{fen.}(L:2c+z:c)}{\text{fen. } L:c} = \frac{\text{cof. } L:2c}{\text{cof. } L:2c} (c),$$

$$-\frac{\text{fen.}(L:2c-z:c)+\text{fen.}(L:2c+z:c)}{\text{fen. } L:c} = \frac{\text{fen. } z:c}{\text{fen. } L:2c} (d).$$

(*b*) Queſta riduzione ſi prova con un metodo ſimile al precedente. Imperciocchè il quadrato del ſecondo membro ſenza il diviſore $\sqrt{\text{cof. } L:c}$ è

$$\frac{(\text{cof. } L:c)^2-2\,\text{fen. } L:c\ \text{cof. } L:c+(\text{fen. } L:c)^2-2\,\text{cof. } L:c+2\ \text{fen. } L:c+1}{1+\text{fen. } L:c}$$

$$= \frac{2+2\ \text{fen. } L:c-2\ \text{cof. } L:c-2\ \text{fen. } L:c\ \text{cof. } L:c}{1+\text{fen. } L:c} = 2-2\ \text{cof. } L:c.$$

Ora $2-2\ \text{cof. } L:c = 4\,(\text{fen. } L:c)^2$; dunque cavando la radice, e reſtituito il diviſore $\sqrt{\text{cof. } L:c}$, $-e^{L:2c}+e^{-L:2c} = \frac{\text{cof. } L:c - \text{fen. } L:c - 1}{\sqrt{(\text{cof. } L:c\,.\,(1+\text{fen. } L:c))}} = \frac{\pm 2\ \text{fen. } L:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$.

(*c*) (*d*) E' noto eſſere $\pm\,\text{fen.}\,(L:2c-z:c) = \pm\,\text{fen. } L:2c\ \text{cof. } z:c \mp \text{cof. } L:2c\ \text{fen. } z:c$, ſeno $(L:2c+z:c) = \text{fen. } L:2c\ \text{cof. } z:c + \text{cof. } L:2c\ \text{fen. } z:c$, e perciò $\text{fen.}\,(L:2c-z:c) + \text{fen.}\,(L:2c+z:c) = 2\ \text{fen. } L:2c\ \text{cof. } z:c$, $-\text{fen.}\,(L:2c-z:c) + \text{fen.}\,(L:2c+z:c) = 2\,\text{cof. } L:2c\ \text{fen. } z:c$: ma come parimente ſi ſa, $\text{fen. } L:c = 2\ \text{fen. } L:2c\ \text{cof. } L:2c$; dunque $\frac{\text{fen.}(L:2c-z:c)+\text{fen.}(L:2c+z:c)}{\text{fen. } L:c} = \frac{\text{cof. } z:c}{\text{cof. } L:2c}$,

$$\frac{-\text{fen.}(L:2c-z:c)+\text{fen.}(L:2c+z:c)}{\text{fen. } L:c} = \frac{\text{fen. } z:c}{\text{fen. } L:2c}.$$

Nella formola (*a*) i segni del meno, e del più antepoſti a 2 cof. *L*:2*c* ſono adattati alle due circoſtanze, quello che cof. *L*:2*c* ſia quantità negativa, queſto che cof. *L*:2*c* ſia quantità poſitiva. I ſegni più e meno nella formola (*b*), che precedono 2 ſen. *L*:2*c*, ſervono ai due caſi, che ſen. *L*:2*c* ſia negativo, o poſitivo.

La ſurrogazione dei nuovi valori ci ſomminiſtra le due ſeguenti equazioni, che nella più ſemplice forma eſprimono le curve dei due diverſi generi analoghe a quelle, che ſono nelle figure 3, e 4 delineate

$$\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}).\sqrt{\text{cof. } L:c}}{2 \text{ cof. } L:2c} + \frac{\text{cof. } z:c}{\text{cof. } L:2c} \quad (19)$$

$$\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{\text{cof. } L:c}}{2 \text{ ſen. } L:2c} + \frac{\text{ſen. } z:c}{\text{ſen. } L:2c} \quad (20).$$

Secondo ciò, che poco fa ho notato, i ſegni ſuperiori nell' equazioni (19), e (20) ſuppongono cof. *L*:2*c*, ſen. *L*:2*c* grandezze negative, gl' inferiori le ſuppongono poſitive.

XV. Le coſe, che ſono per dire, richiedono, che riſpettivamente alla formola (19) ſi dimoſtri eſſere

$$-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{-1 + \text{ſen. } L:c + \text{cof. } L:c}{\sqrt{(\text{cof. } L:c.(1-\text{ſen. } L:c))}} = \frac{\mp 2 \text{ſen. } L:2c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}.$$

E primieramente la formola (12) ci dà per riguardo all' equazione (19) $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = -\sqrt{\left(\frac{1-\text{ſen. } L:c}{\text{cof. } L:c}\right)}$

$+\sqrt{\left(\frac{\text{cof. } L:c}{1-\text{ſen. } L:c}\right)} = \frac{-1 + \text{ſen. } L:c + \text{cof. } L:c}{\sqrt{(\text{cof. } L:c \,.\, (1-\text{ſen. } L:c))}}$. Provo in ſecondo luogo, che s' avvera l' equazione $\frac{-1+\text{ſen. } L:c+\text{cof. } L:c}{\sqrt{(1-\text{ſen. } L:c)}} = \mp 2 \text{ ſen. } L:2c$. Abbiamo dalla Trigonometria 2 ſen. *L*:*c* = 4 ſen. *L*:2*c* cof. *L*:2*c*, e moltiplicando, e dividendo per $1 - \text{ſen. } L:c$, $\frac{2\text{ſen. } L:c - 2(\text{ſen. } L:c)^2}{1 - \text{ſen. } L:c} = 4 \text{ ſen. } L:2c \text{ cof. } L:2c$. Pongo in

cambio d' uno de' due quadrati $-(\text{sen. } L{:}c)^2$ il suo valore $-1+(\text{cos. } L{:}c)^2$, e mi si presenta $\frac{-1+2\text{sen. } L{:}c-(\text{sen. } L{:}c)^2+(\text{cos. } L{:}c)^2}{1-\text{sen. } L{:}c} = 4\,\text{sen. } L{:}2c\,\text{cos. } L{:}2c$.

Dall' annotazione (*a*) ricavasi $\mp 2\,\text{cos. } L{:}2c = \frac{1-\text{sen. } L{:}c+\text{cos. } L{:}c}{\sqrt{(1-\text{sen. } L{:}c)}}$. Sostituiscasi questo valore, e dividendo poscia per lo stesso, ritroverassi $\frac{-1+\text{sen. } L{:}c+\text{cos. } L{:}c}{\sqrt{(1-\text{sen. } L{:}c)}} = \mp 2\,\text{sen. } L{:}2c$, e perciò $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{-1+\text{sen. } L{:}c+\text{cos. } L{:}c}{\sqrt{(\text{cos. } L{:}c.(1-\text{sen. } L{:}c))}} = \frac{\mp 2\,\text{sen. } L{:}2c}{\sqrt{\text{cos. } L{:}c}}$.

Corollarj, che si deducono dalla formola (19.)

XVI. Dalla formola (19.) si deducono i seguenti corollarj.

1. Ponendo nella detta formola l'assissa $z = o$, ne risulterà il valore dell'applicata $y = Cc$ in tutte le curve analoghe alla figura (3.), dalle quali viene l'asse AB tagliato in un numero pari di punti. Avremo pertanto $Cc : Aa = y : b = \mp \frac{\sqrt{(\text{cos. } L{:}c)+1}}{2\,\text{cos. } L{:}2c} = 1{:}2\,\text{sec. } L{:}2c \mp \text{sec. } L{:}c\sqrt{\text{cos. } L{:}c}$ (*e*).

Dal ridurre a computo rispettivamente a ciascuna curva del genere di quella della figura (3.) la frazione $L{:}c$ dipende la determinazione del valore della linea Cc.

(*e*) Stando come il seno tutto al coseno, così la secante al seno tutto, si verifica l'equazione $\text{sec. } L{:}2c = \frac{1}{\text{cos. } L{:}2c}$, o sia $\frac{1}{2}\,\text{sec. } L{:}2c = \frac{1}{2\,\text{cos. } L{:}2c}$.

Mi riſervo d'insegnare il metodo d'un tal calcolo al numero XIX, e ſeguenti.

2. Si prendano le differenze nella formola (19.), e ſcopriraſſi $2cdy:bdz$ cof. $z:2c = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c})\sqrt{(\text{cof. } z:c)}}{2}$ $-$ ſen. $z:c$ (21.). Facciaſi $dy:dz = 0$, e le radici dell'equazione $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c})\sqrt{(\text{cof. } z:c)} - 2$ ſen. $z:c = 0$ determineranno i valori delle aſſiſſe z, alle quali corriſpondono le maſſime ordinate y nelle curve analoghe a quella nella figura (3) delineata. Secondo che queſte curve tagliano l'aſſe AB in 2, 4, 6, 8 punti ecc., i numeri delle predette radici ſaranno 1, 3, 5, 7 ecc. Una delle radici della noſtra equazione ſi è $z = 0$, e perciò nelle curve, di cui parliamo, aſcende al maſſimo l'ordinata Cc corriſpondente al punto medio C del cilindro AB.

3. Fatte $y = 0$, ſi troveranno i punti 2, 4, 6, 8 ecc., nei quali l'aſſe AB vien tagliato dalle curve compreſe nell'equazione (19.). Avremo pertanto $\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c} + 2 \text{ cof. } z:c \sqrt{\text{cof. } z:c} = 0$. Mentre il cilindro oſcilla, queſti punti reſtano immobili, e quindi ſotto ponendo ai punti per eſempio E, F (*fig.* 3.) due appoggi, non ſono da eſſi fraſtornate le vibrazioni del cilindro. La mentovata figura eſprime il modo principale, onde ſi vibra il cilindro, rendendo il ſuono fra tutti il più grave. I punti ſtabili E, F diſtano dalle eſtremità A, B del cilindro per le linee EA, FB, che come vedremo al numero XXX. poco calano dalla quarta parte della lunghezza AB. Negli ſtrumenti formati di cilindri i punti E, F ripoſano ſu due ſcannelli, eſſendo riuſcito alla pratica col mezzo di replicati tentativi di accorgerſi d'una proprietà, ſenza della quale non potrebbe la Muſica valerſi dei noſtri corpi ſonori.

4. Differenzio nuovamente la formola (21.), e ſcopro

$4c^2 ddy : bdz^2$. cos. $L:2c = (\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cos. } L:c)} - 2$ cos. $z:c$ (22.). Abbiamo veduto al numero XI, che quando $ddy:dx^2 = ddy:dz^2 = 0$, è parimente nulla in quel tal sito la curvatura del cilindro, il momento della sua elasticità, ed altresì la somma dei momenti delle forze applicate al cilindro stesso o da un canto, o dall' altro. Si è pure fatta la riflessione, che ciò interviene nei punti estremi a, b del cilindro. Pongo nell'equazione (22) $ddy:dz^2 = 0$, e mi si affaccia $\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c} - \frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} = 0$. Rispettivamente ai punti estremi a, b è $z = \pm L:2$, e queste debbono essere due radici della nostra equazione. In fatti sostituendo in cambio di z i detti valori, e fatta la riflessione essere cos. $-L:2c =$ cos. $L:2c$, troveremo in tutti e due i casi $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \mp \frac{2 \text{ cos. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, equazione, che ho dimostrato esser vera al numero XIV nell'annotazione (*a.*)

Il numero delle radici dell'equazione, di cui trattiamo, s'eguaglia a quello de' punti 2, 4, 6, 8 ecc., ne' quali le curve tagliano l'asse AB. Detratte le due radici $z = \mp L:2$ le rimanenti 0, 2, 4, 6 ecc. servono a determinare nelle curve altrettanti flessi contrarj, ed in tali siti parimente s'eguaglia a nulla la curvatura del cilindro, e la somma dei momenti delle forze applicate a destra, o a sinistra.

Le due metà per esempio cEa, cFb (*fig.* 3.) delle nostre curve sono uguali, simili, e collocate in maniera, che segnate due assisse uguali CP, $C\mathfrak{Q}$, una positiva, e l'altra negativa, s'eguagliano le corrispondenti ordinate PM, $\mathfrak{Q}N$, e sono amendue o positive, o negative. In prova di ciò faccia chi legge la riflessione, ch' essendo cos. $z:c =$ cos. $-z:c$, nulla s'altera la formola (19.), mentre si cangia il segno all'incognita z; e quindi ad assisse uguali una positiva, e l'altra nega-

tiva ſi riferiſcono ordinate uguali, e ſimilmente ſituate.

Se dee pareggiare il nulla la ſomma dei momenti riſpettivamente al punto eſtremo *b* delle forze applicate al cilindro *aEcFb*, egli è neceſſario, che le forze, ovvero le ordinate dalla noſtra curva ad eſſe proporzionali ſieno parte poſitive, e parte negative. Il perchè paſſando fra i due rami *cEa*, *cFb* la ſomiglianza teſtè deſcritta, ſi richiede indiſpenſabilmente, che ciaſcuno tagli l'aſſe *AB* almeno in un punto, come nella figura (3.) ſuccede.

La ſomma dei momenti in riguardo al punto *M* delle forze applicate alla porzione di cilindro *aM* è proporzionale a $ddy{:}dz^2 = ddy{:}dz^2$, o ſia alla quantità $(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cof. } L{:}c)} - 2 \text{ cof. } z{:}c$. Taglio $C\mathfrak{Q} = CP$, e ſcopro l'aggregato dei momenti riſpettivamente al punto *N* delle forze applicate alla parte *aEcN* del cilindro come $(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cof. } L{:}c)} - 2 \text{ cof.} - z{:}c$. L'eguaglianza delle ritrovate grandezze moſtra, che ſono eguali le ſomme dei nominati momenti: ma l'aggregato dei momenti riſpettivamente al punto *N* delle forze applicate al cilindro *aEcN* pareggia quello in relazione al punto *M* delle forze applicate al cilindro *bFcM*; dunque s'eguagliano le ſomme dei momenti a deſtra, e a ſiniſtra del punto *M* preſo ad arbitrio, i quali perciò fanno equilibrio e coll'elaſticità del cilindro nel ſito *M*, e tra loro, dimodochè non può ſeguire verun moto di rotazione.

5. Preſe le differenze nella formola (22.) avremo $4c^3 d^3y{:}bdz^3 . \text{cof. } L{:}2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cof. } L{:}c)} + 2 \text{ ſen. } z{:}c$ (23.). Dal numero X. raccoglieſi eſſere $ELf{:}M . d^3y{:}dx^3 = c^4 d^3y{:}dx^3 = \int y dx$. Nel numero XII. ho notato, che la ſomma delle forze applicate al cilindro *aM* è proporzionale all'aja $aMPA = \int y dx = \int -y dz$ S'inferiſca, che queſta ſomma ſerba la ragione di $c^4 d^3y{:}dx^3 = c^4 d^3y{:}-dz^3$, o ſia per l'equazione (23.) della quantità $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cof. } L{:}c)} - 2 \text{ ſen } z{:}c$. Qualora

s'abbia $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos. } L:c)} - 2 \text{ sen. } z:c = 0$, s'eguaglierà a nulla l'aggregato delle forze applicate al cilindro *aM*. L'ultima formola ha sempre le tre radici $z = 0$, $z = L:2$, $z = -L:2$. Posta $z = 0$, chiaramente si scopre essere $e^{o:c} \mp e^{-o:c} = \pm 1 \mp 1 = 0$, 2 sen. $o:c = 0$. Questa radice mi addita eguagliarsi a nulla l'aggregato delle forze applicate alla metà *aEc* del cilindro, e che per conseguenza l'aja positiva *aEA* pareggia la negativa *CEc*. L'altre due radici $z = L:2$, $z = -L:2$ mi danno quella $(\pm e^{L:2c} \mp e^{-L:2c})\sqrt{(\text{cos. } L:c)} - 2 \text{ sen. } L:2c = 0$, questa $(\pm e^{-L:2c} \mp e^{L:2c})\sqrt{(\text{cos. } L:c)} - 2 \text{ sen.} - L:c = 0$; e giacchè $-2 \text{ sen.} - L:2c = 2 \text{ sen. } L:2c$, trovo in tutti e due i casi $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\pm 2 \text{ sen. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, equazione, che al numero XV. ho dimostrato verificarsi. Dalla radice $z = L:2 = CA$ si ricava, che una somma di forze uguali a nulla s'applica alla porzione *aM* del cilindro, quando essa pareggia il nulla. Finalmente, e questo è quel che più importa, la radice $z = -L:2 = CB$ ci manifesta esser nullo l'aggregato delle forze applicate a tutto il cilindro *AB*, cioè a dire che le forze negative s'eguagliano alle positive. In sì fatta guisa non potendo il cilindro girarsi intorno qualsivoglia punto *M*, ed essendo egualmente tirato per le direzioni opposte *Cc*, *cC*, viene trattenuto immobile nella positura *aEcFb* dalle forze *MH* uguali, e contrarie a quelle, che tentano di farlo reciprocare, e rimosse esse forze *MH*, non concepisce altro moto, che di sola vibrazione.

XVII. Incontreremo nel corollario 5. dedotto dalla formola (20) l'equazione $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp \text{cos. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, la di cui verità presentemente dimostro. L'equazione

(12) ci somministra rispettivamente alla formola (20)
$e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \sqrt{\left(\frac{1+\text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\text{cos. } L:c}{1+\text{sen. } L:c}\right)}$
$= \frac{1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(\text{cos. } L:c \,.\, (1+\text{sen. } L:c))}}$. Egli è d' uopo adunque provare adempierfi l' equazione $\frac{1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(1+\text{sen. } L:c)}}$
$= \mp 2 \text{ cos. } L:2\theta$.

Moltiplico, e divido per $1+\text{sen. } L:c$ il primo membro dell' equazione $-2 \text{ sen. } L:c = -4 \text{ cos. } L:2c$, onde s' abbia $\frac{-2\text{sen. } L:c-2(\text{sen. } L:c)^2}{1+\text{sen. } L:c} = -4 \text{ cos. } L:2c \,.\, \text{sen. } L:2c$. Il luogo d' uno de' due quadrati $-(\text{sen. } L:c)^2$ colloco il suo valore $-1+(\text{cos. } L:c)^2$, e trovo $\frac{-1-2\text{sen. } L:c-(\text{sen. } L:c)^2+(\text{cos. } L:c)^2}{1+\text{sen. } L:c} = -4 \text{ cos. } L:2c \,.\, \text{sen. } L:2c$: ma per l' annotazione $(b) \pm 2 \text{ sen. } L:2c = \frac{-1-\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(1+\text{sen. } L:c)}}$; dunque surrogando un tal valore, o dividendo poscia per lo stesso, scopriremo $\frac{1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(1+\text{sen. } L:c)}} = \mp 2 \text{ cos. } L:2c$, e conseguentemente sarà $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(\text{cos. } L:c \,.\, (1+\text{sen. } L:c))}}$
$= \frac{\mp 2 \text{ cos. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$.

Corollarj, che si deducono dalla formola (20).

XVIII. Dalla formola (20) ne nascono i corollarj seguenti.

1. La mentovata formola comprende tutte le curve analoghe

analoghe alla figura (4), che tagliano l' asse AB nel punto medio C. In fatti posta $z = CP = o$, si trova $y = o$. Le nostre curve hanno la comune proprietà, che a due assisse uguali CP, $C\mathcal{Q}$, una positiva, e l' altra negativa corrispondono due ordinate uguali una positiva, e l' altra negativa, o a rovescio PM, $\mathcal{Q}N$. Se nell' equazione (20) $\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos}.L:c)}}{2 \text{ sen. } L:2c}$ $+ \frac{\text{sen. } z:c}{\text{sen. } L:2c}$ cangeremo il segno all' incognita z, scopriremo $\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{-z:c} \pm e^{z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos}.L:c)}}{2 \text{ sen. } L:2c} + \frac{\text{sen.} - z:c}{\text{sen. } L:2c}$. Il paragone delle due espressioni dimostra, ch' essendo sen. $-z:c = -$ sen. $z:c$, a pari assisse CP, $C\mathcal{Q}$ quella positiva, e questa negativa si riferiscono ordinate uguali PM, $\mathcal{Q}N$, ma affette da segni contrarj. Quindi le due metà di curva $CgEa$, $CkFb$ sono eguali, e simili, ma inversamente collocate e in riguardo all' assisse, e in riguardo all' ordinate. Lo stesso dicasi delle due porzioni di curva $aEgCkN$, $bFkCgM$. Si osservi, che a punti analoghi per esempio g, k di queste porzioni ci vanno applicate forze uguali e contrarie, e che per conseguenza la somma dei momenti rispettivamente ai punti N, M delle forze applicate ad esse porzioni sono fra loro eguali, ma una positiva, e l' altra negativa.

2. Col mettere $y = o$, si determinano i punti 3, 5, 7, 9 ecc., nei quali le curve contenute nell' equazione (20) tagliano l' asse AB. Una tal ipotesi mi somministra la formola $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos}.L:c)} + 2 \text{ sen. } z:c = o$, che va sempre fornita della radice $z = o$, Mentre adunque il cilindro riposa equilibrato sopra un sostegno sottoposto al punto medio C, può ripiegarsi in tutte le curve espresse dall' equazione (20), e rendere i suoni ad esse curve confaccenti, fra' quali il più gra-

ve si è quello, che produce il cilindro, quando si conforma alla curva della figura (4). Se gli appoggi cadono sotto gli altri punti immobili E, F, si sente lo stesso suono. Chi vuol udire un suono chiaro e forte, avverta di non battere il cilindro ne' punti stabili E, C, F. I siti più rimoti dai punti fissi sono i più opportuni per batterlo, e specialmente i due G, K, ai quali corrispondono le massime ordinate Gg, Kk. Non riesce molto utile il percuotere il cilindro in vicinanza dei punti estremi A, B; perchè parte della forza s' impiega a far girare il cilindro intorno al più vicino sostegno.

3. Differenzio la formola (20), onde s' abbia $4cdy : -bdz.\ \text{sen.}\ L:2c = (\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos.}\ L:c) - 2\ \text{cos.}\ z:c}$ (24). Le radici dell' equazione $(\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos.}\ L:c) - 2\ \text{cos.}\ z:c} = 0$ determinano i punti per esempio G, K, ai quali corrispondono le massime ordinate Gg, Kk. I numeri di tali ordinate saranno 2, 4, 6, 8 ecc., secondo che le curve taglieranno l' asse AB in punti 3, 5, 7, 9 ecc.

4. Prendo di bel nuovo le differenze nell' equazione (24), e trovo $4c^2ddy : bdz^2 \cdot \text{sen.}\ L:2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos.}\ L:c) - 2\ \text{sen.}\ z:c}$ (25). Essendo la somma dei momenti in relazione al punto M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro proporzionale a $ddy:dz^2$, serberà altresì la ragione della grandezza $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos.}\ L:c) - 2\ \text{sen.}\ z:c}$. In que' siti, dove la predetta somma s' eguaglia a nulla, egli è d' uopo che s' adempia l' equazione $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos.}\ L:c) - 2\ \text{sen.}\ z:c} = 0$. Ha sempre questa le tre radici $z = \pm L:2$, $z = 0$. Posta $z = \pm L:2$, si trova $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\pm 2\ \text{sen.}\ L:2c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}}$, secondo a ciò che ho dimostrato nell' annotazione *(b)*. La prima radice determina il punto A, e m' insegna, che quando la parte aM del cilindro

pareggia il nulla, ed il punto *M* coincide col punto *a*, è parimente nulla la somma dei momenti rispettivamente al punto *M*, ovvero *a* delle forze ad essa parte applicate. Dalla seconda radice, che ci dà il punto *B*, si raccoglie uguagliarsi a nulla l'aggregato dei momenti in riguardo al punto *b* delle forze applicate a tutto il cilindro *agCkb*. La terza radice segna il punto *C*, e fa palese, che al nulla equivale la somma dei momenti per rapporto al punto *C* delle forze applicate alla metà del cilindro *aEgC*. Noto, che nel sito *C* interviene un flesso contrario, e che il numero di tali flessi s' eguaglia a quello dei punti, nei quali le curve tagliano l' asse *AB*, detratto il binario.

Essendo le forze applicate a' punti analoghi delle due metà *aEgC*, *bFkC* del cilindro sempre uguali e contrarie, egli è manifesto, che tali pure sono le somme dei momenti delle forze applicate ed esse metà rispettivamente al punto medio *C*. Le dette somme frattanto debbono essere amendue o positive, o negative; perchè hanno da stare in equilibrio e tra loro, e colla forza elastica del cilindro nel sito *C*. Le due condizioni, che sembrano assolutamente ripugnanti, si conciliano insieme, quando le mentovate somme s' eguagliano a nulla, come effettivamente succede.

E quindi cade in acconcio la riflessione, essere necessario che le nostre curve taglino l' asse almeno in tre punti. Se le forze applicate alla metà *aEgC* del cilindro hanno da formar equilibrio rispettivamente al punto *C*, fa di mestieri che siano parte positive e parte negative, e questa circostanza indispensabilmente richiede, che la curva *aEgC* sia parte al disotto, e parte al disopra dell' asse *AB*, e che per conseguenza l' interfechi almeno in un punto *E*. Lo stesso dicasi della curva *bFkC*, la quale dee tagliare l' asse *AB* almeno in un punto *F*. S' aggiunga il punto *C*, e si troveranno tre per lo meno i punti d' intersezione.

Segno $C\mathfrak{Q} = CP$, e cangiato il segno all' incognita z nella formola (25) $4c^2ddy : bdz^2$ fen. $L : 2c =$ $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cof. } L : c) - 2}$ fen. $z : c$, trovo $4c^2ddy : bdz^2$. fen. $L : 2c = (\mp e^{-z:c} \pm e^{z:c}) . \sqrt{(\text{cof. } L : c)}$ $- 2$ fen. $z:c$, o fia ponendo in cambio di $- 2$ fen. $z:c$ la quantità eguale 2 fen. $z:c$ $4c^2ddy : bdz^2$. fen. $L : 2c =$ $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cof. } L : c) + 2}$ fen. $z : c$. Paragonati inſieme gli omogenei di comparazione della formola (25), e dell' ultima, ſi ſcoprono eguali, ma uno negativo in riguardo all' altro. Eſprime il primo la ſomma dei momenti riſpettivamente al punto qualunque M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro, e dal ſecondo vien dinotata la ſomma dei momenti in riguardo al punto N delle forze applicate alla parte di cilindro $aEgCkN$. I predetti aggregati adunque ſono eguali, e contrarj: ma altresì eguali e contrarj, come ho notato nel Corollario 1, ſono gli aggregati di momenti riſpettivamente ai punti N, M delle forze applicate alle porzioni di cilindro $aEgCkN$, $bFkCgM$; dunque paſſa una perfetta uguaglianza fra le ſomme dei momenti riferiti al punto M delle forze applicate alle parti di cilindro da eſſo punto M diviſe; ed eſſendo le nominate ſomme amendue coſpiranti, s' equilibrano mutuamente, dimodo che il cilindro non può far moto alcuno di giramento intorno qualſivoglia punto M ſcelto ad arbitrio.

5. Si differenzj la formola (25), onde s' abbia $4c^3d^3y : -bdz^3$. fen. $L : 2c = (\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cof. } L : c) + 2}$ cof. $z:c$ (26). La ſomma delle forze applicate alla porzione di cilindro aM, che ha da eſſere proporzionale a $d^3y : -dz^3$, dee ſerbare altresì la ragione della quantità $(\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cof. } L : c) + 2}$ cof. $z:c$. S' eguaglierà a nulla la detta ſomma, quando ſi verifichi l' equazione $e^{z:c} + e^{-z:c} = \frac{\mp 2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$, a cui apparten-

gono le due radici $z = \pm L:2$. In fatti fostituito in luogo di z prima l' uno, indi l' altro valore, trovo in tutti e due i casi $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp 2 \text{ cos. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, formola, che al numero XVII. ho provato esser vera. La radice $z = L:2$ m' istruisce, che quando la porzione aM del cilindro eguaglia il nulla, s' applica ad essa un aggregato nullo di forze. Dalla radice $z = -L:2$ ci viene additato, equivalere al nulla la somma delle forze applicate all' intero cilindro AB, il che interviene, qualora le forze negative pareggiano le positive.

Si cavi l' importantissima conseguenza, che ancora quando il cilindro AB s' adatta alle curve del secondo genere, dalle quali l' asse AB viene tagliato in un numero impari di punti, si adempiono le due proprietà, ch' esso non possa rivolgersi intorno qualsivoglia punto M, e che sia del pari tirato da due somme di forze uguali, e contrarie. Quindi le forze MH eguali ed opposte a quelle, che tentano di farlo reciprocare, lo tengono immobile nel sito $aEgCkFb$, e tolte di mezzo esse forze, altro movimento, salvochè quello di vibrazione, non gli è permesso di poter acquistare.

Ridurre a computo la grandezza, o sia l' angolo L:c.

XIX. Prendo nuovamente per mano la formola (12) $e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}$, e fatta la riflessione, che tanto $e^{L:c}$, quanto $1 \mp$ sen. $L:c$ sono sempre quantità positive, ne inferisco, che sotto tal classe dee parimente riporsi cos. $L:c$. Fatto centro in C, col raggio $CA = 1$ (*fig.* 9) descrivasi il circolo $ABab$, il quale dalle linee Aa. Bb venga partito in quattro quadranti. Se il coseno CG dell' angolo ACF, o pure il coseno Cg dell' an-

golo ACf hanno da essere positivi, il che succede, quando la loro direzione è da C verso A, si rende necessario che i lati CF, Cf cadano dentro i quadranti ACB, ACb. Per la qual cosa l' angolo $L:c$ potrà ricevere infiniti valori, i quali staranno o fra l' angolo nulla e l' angolo retto, o fra i tre e i quattro retti, o fra i quattro e i cinque, o fra i sette e gli otto, o fra gli otto e i nove, o fra gli undici e i dodici, o fra i dodici e i tredici ecc. S' esprima colla lettera q l' angolo retto, o sia il quadrante di circolo, il cui raggio $= 1$, e chiamato ϕ quell' angolo minor del retto, per cui l' angolo $L:c$ differisce da un determinato numero di retti, ci si presenteranno le seguenti equazioni

1. $L:c = q - \phi$
2. $L:c = 3q + \phi$
3. $L:c = 5q - \phi$
4. $L:c = 7q + \phi$
5. $L:c = 9q - \phi$
6. $L:c = 11q + \phi$
7. $L:c = 13q - \phi$

ecc.

Le formole, cui stanno a lato i numeri impari, assegnano all' angolo $L:c = ACF$ valori tali, che il lato CF cade sempre dentro il quadrante ACB. Al contrario le formole segnate coi numeri pari attribuiscono all' angolo $L:c = ACf$ quelle grandezze, mercè le quali il lato Cf è costantemente compreso dentro il quadrante ACb.

Al punto A del circolo $ABab$ conduco la tangente indefinita HAh, e diviso per metà ne' punti I, i i due angoli ACF, bCf, ciascun de' quali vien dinotato dalla specie ϕ, delineo le secanti CIH, Cih. Descritte le linee FG, fg parallele a Bb, FN, fn parallele ad Aa, si tirino le rette FB, Fb, fb, fB.

Insistendo sopra lo stesso arco FB i due angoli FbB

alla circonferenza, FCB al centro, si corrispondono nella ragione 1 : 2; ma per la costruzione l' angolo FCB è doppio dell' HCB; dunque passa eguaglianza fra gli angoli FbA, HCB. Si osservi eguagliarsi gli angoli alterni HCB, CHA, e si deduca l' egualità degli angoli FbM, CHA nei triangoli rettangoli FbM, CHA, i quali perciò sono simili, e ci somministrano l'analogia $bM : MF :: HA : AC$. Giacchè $FG = MC$ è il seno dell' angolo $ACF = L:c$, scopriremo $bM = 1 + \text{sen. } L:c$. Abbiamo inoltre $MF = \text{cos. } L:c$, ed altresì $HA = \text{cot. } \frac{1}{2}\phi$, cioè a dire la linea HA eguale alla cotangente dell' angolo BCI metà del $BCF = \phi$. Ecco adunque l' espressione analitica della sovrapposta analogia $1 + \text{sen. } L:c$: cos. $L:c$ :: cos. $\frac{1}{2}\phi : 1$, da cui deriva l' equazione $\frac{1 + \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} = \text{cot. } \frac{1}{2}\phi$. Abbiamo superiormente notato, che la formola $e^{L:c} = \frac{1 + \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}$ ci guida all' equazione (20) propria delle curve del secondo genere, che tagliano l' asse AB (*fig.* 4) in un numero impari di punti. S' inferisca pertanto, che a tali curve servono gli angoli ACF (*fig.* 9), il cui lato CF cade dentro il quadrante ACB, e che s' eguagliano ad angoli retti 1, 5, 9, 13 ecc. meno l' angolo ϕ.

Collo stesso progresso dimostrerò verificarsi l'analogia $Bm : mf :: bA : AC$. Noto ch' essendo negativo il seno $gf = Cm$ dell'angolo $ACf = L:c$, la linea Bm s'eguaglia ad $1 - \text{sen. } L:c$; e quindi la premessa analogia s'esprimerà così $1 - \text{sen. } L:c : \text{cos. } L:c :: \text{cot. } \frac{1}{2}\phi : 1$, e ne risulterà l'equazione $\frac{1 - \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} = \text{cot. } \frac{1}{2}\phi$. Fatta l' avvertenza, che dall' equazione $e^{L:c} = \frac{1 - \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}$ deriva la formola (19)

ſpettante alle curve del primo genere, che interſecano l'aſſe *AB* (*fig.* 3.) in un numero pari di punti; ſi deduca ſervire a ſi fatte curve gli angoli *ACf* (*fig.* 9), il cui lato *Cf* ſta dentro il quadrante *ACb*, e che pareggiano angoli retti 3, 7, 11 ecc. più l'angolo ϕ.

Le coſe dette ci moſtrano a dito adempierſi l'equazione $e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\text{coſ. } L:c} = \text{cot.} \frac{1}{2}\phi$, la quale comprende le curve del primo, e del ſecondo genere. Facendo tranſito dai numeri ai logaritmi, e richiamando a memoria eſſere log. $e = 1$, troveremo $L:c = \text{log. cot.} \frac{1}{2}\phi$.

XX. Prima di paſſar oltre, egli è d'uopo provare, che il valore $L:c = q - \phi$ non può convenire a veruna curva del ſecondo genere, alla quale ad un cilindro, che oſcilla, ſia conceſſo adattarſi. Eſſendo l'angolo $L:c = q - \phi$ minore del retto, ſcopreſi poſitivo il ſeno dell'angolo $L:2c$. Qualmente ho avvertito al numero XIV. i ſegni inferiori della formola (20.) ſuppongono ſen. $L:2c$ grandezza poſitiva. Nel caſo adunque, che preſentemente ſi eſamina, avremo $\frac{2y}{b} = \frac{(e^{z:c} - e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{coſ. } L:c)}}{2 \text{ sen. } L:2c} + \frac{\text{sen. } z:c}{\text{sen. } L:2c}$. Poſto $L:c = q - \phi$, non può l'ordinata y pareggiare il nulla, ſalvochè nella circoſtanza, che ſia $z = 0$. Quindi non s'adempirebbe quello, che nel Corollario 4. del numero XVIII. ho dimoſtrato dover ſuccedere, che la curva (*fig.* 4.) *aEgCkFb* interſechi l'aſſe *AB* almeno in tre punti. Sia primieramente z maggiore del nulla; e giacchè il maſſimo valore, che poſſa attribuirſi a z, ſi è $L:2$, ci accorgeremo eſſere ſempre poſitivo ſen. $z:c$, ed altresì il termine $\frac{\text{sen. } z:c}{\text{sen. } L:2c}$. Conciofſiachè $e = 2,7182818$, ſcopriremo le due quantità $e^{z:c}$, $e^{-z:c}$ l'una maggiore, e l'altra minore dell'unità, ed

ed inferiremo, che il termine $\frac{(e^{z:c}-e^{-z:c})\cdot\sqrt{\text{cos. } L:c}}{2 \text{ sen. } L:2c}$ si mantiene positivo costantemente. Conchiudasi, che all' assissa z positiva corrisponderebbe l'ordinata y affermativa; essendo $2y:b$ uguale alla somma di due termini sempre positivi, e che contro la natura della nostra equazione la curva CgE caderebbe tutta al disotto del semiasse CA, nè lo taglierebbe in alcun punto medio fra C ed A.

In simil guisa dimostrerò, che supponendo z minore del nulla, vale a dire negativa, sarebbe sempre negativa l'ordinata y, e stando tutta la curva $CkFb$ al disopra del semiasse CB, non l' intersecherebbe in verun punto medio fra C e B.

XXI. Escluso il valore $L:c = q - \phi = \text{log. cos. } \frac{1}{2}\phi$, registro nella seguente tavola quelli, che sono confaccenti all'equazioni (19) e (20), o sia alle curve del primo, e del secondo genere.

1. $L:c = 3q + \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
2. $L:c = 5q - \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
3. $L:c = 7q + \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
4. $L:c = 9q - \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
5. $L:c = 11q + \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
6. $L:c = 13q - \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$

ecc.

Si trova il logaritmo iperbolico della cotangente d'un qualunque angolo, prendendo il lagaritmo delle tavole, sottraendo il logaritmo del seno tutto, e moltiplicando il residuo per 2, 3025851 (*f*). Per alleg-

(*f*) I logaritmi dei seni, e delle tangenti, e quelli dei numeri appartengono alla stessa logistica, e differiscono solo nel protonumero, a cui si assegna il logarit-

gerire una tal fatica, torna in acconcio il nuovamente ricorrere ai logaritmi. Sia u il logaritmo iperbolico della cotangente dell'angolo $\frac{1}{2}\phi$. Prendasi dalle tavole il logaritmo d'essa cotangente, e fatta la detrazione

---

mo nulla. I primi logaritmi hanno per protonumero $\frac{1}{100000}$, cioè a dire l'unità divisa pel seno tutto: e quindi all'unità tocca il logaritmo 5, 0000000. I secondi logaritmi accettano siccome protonumero l'unità. Si cavi la conseguenza, che si fa transito da quei logaritmi a questi, scemando per 5, 0000000 i logaritmi delle tavole dei seni.

Si chiamino T, t le cotangenti, l'una presa dalle tavole, e l'altra relativa ad un circolo di raggio $= 1$, ambe corrispondenti allo stesso angolo $\frac{1}{2}\phi$, le quali debbono stare come i raggi 100000, 1. Avremo pertanto $\frac{T}{100000} = t$, e giacchè $1 : \frac{1}{100000} :: T : t$, sarà passando ai logaritmi $\log. \frac{1}{100000} + \log. T - \log. 1 = \log t$: ma nelle tavole dei seni $\log. \frac{1}{100000} = 0$, $\log. 1 = 5,0000000$; dunque $\log. T - 5,0000000 = \log. t$. Ho fatta l'osservazione, che si fa passaggio dai logaritmi delle tavole de' seni a quelli dei numeri, minorando i primi per 5, 0000000. Il perchè se $\log. T$ si seguiti a prendere nelle tavole dei seni, e $\log. t$ si prenda nelle tavole dei numeri, avremo $\log. T - 10, 0000000 = \log. 1$.

Tramuteremo i logaritmi comuni in iperbolici premessa la riflessione, che riconoscendo entrambi per protonumero l'unità, i logaritmi d'un qualunque numero serbano la proporzione dei logaritmi d'un numero da-

del logaritmo del seno tutto, quello che avanza si chiami v. Essendo adunque $u = 2,3025851 . v$, avremo prendendo nelle tavole i logaritmi dei numeri, $\log. u = \log. v + 0,36221571$, e giacchè $u = nq \pm \phi$, farà altresì $\log. u = \log. (uq \pm \phi)$. Per determinare quest' ultimo logaritmo, l' angolo ϕ deve esprimersi in parti del raggio nella stessa guisa, che parimente in parti del raggio si dinota l' angolo retto $q = 1,5707963$. Otterremo l'intento, se ridurremo l'angolo ϕ in minuti secondi, e dal logaritmo di cotal numero sottrerremo costantemente $5,3143251$ (g). Così ne risulterà $\log. \phi$, il quale facendo ritorno ai numeri, ci sommministrerà il valore dell' angolo ϕ, da cui dipende quello dell' angolo $L:c = u = nq \pm \phi$. Ho detto, che dal logaritmo del numero dei secondi componenti l' angolo ϕ

---

to. Ora i logaritmi comune, ed iperbolico del numero 10 sono $1;2,3025851$; dunque facendo $1 : 2,3025851 :: \log. T - 10,0000000 :$ $(\log. T - 10,0000000) . 2,3025851$, il quarto termine esprimerà il logaritmo iperbolico cercato conforme alla regola da me data.

(g) Abbiamo notato essere l'angolo retto $q = 1,5707963$ parti del raggio $= 1$. Lo stesso angolo s' eguaglia a secondi 324000. Sia N il numero dei minuti secondi, ond' è composto l' angolo ϕ, e dall' analogia $324000 : 1,5707963 :: N : \phi$ ricaveremo il valore dell' angolo ϕ espresso in parti del raggio, cioè a dire $\frac{N . 1,5707963}{324000} = \phi$, o facendo transito ai logaritmi

$\log. N + \log. 1,5707963 - \log. 324000 = \log. \phi$: ma $\log. 324000 = 5,5105450$, $\log. 1,5707963 = 0,1961199$, e $5,5105450 - 0,1961199 = 5,3144251$; dunque $\log N - 5,3144251 = \log \phi$, come dovea dimostrarsi.

dee sottrarsi 5, 3144251. Conciossiachè nei computi, che sono per fare, troveremo sempre il primo logaritmo minore del secondo, s' accresca la caratteristica di quello per 10, e fatta poscia la sottrazione, ne proverrà un logaritmo, la cui caratteristica supererà la vera per 10. Quest' aumentazione ci addita, che in cambio di scrivere il numero corrispondente al nostro logaritmo nella sede, che richiede la caratteristica risultante dalla sottrazione, lo dobbiamo trasportare dieci sedi all' indietro.

XXII. Fatte queste necessarie avvertenze per agevolare, e dedurre i calcoli rettamente, non sarà difficile l' assegnare col mezzo delle approssimazioni il valore dell' angolo ϕ rispettivamente a qualsivoglia specie di oscillazioni. Imperciocchè attribuendo a ϕ alquanti valori ad arbitrio, e determinando col computo $nq \pm \phi$, e log. cos. $\frac{1}{2}\phi$, si scopriranno i limiti, dentro de' quali sta il vero valore dell' angolo ϕ; e se tali limiti sono troppo rimoti, se ne troveranno de' più vicini, e da questi finalmente si dedurrà il giusto valore dell' angolo mentovato. Pongo sotto gli occhi di chi legge i calcoli fino al numero 6, e noto esser inutile il continuarli più avanti; attesochè l' angolo ϕ diviene così menomissimo, che si può fisicamente supporre $L:c = nq$.

Computo pel numero 1.

$\phi = 1^\circ, 0, 40''$
in min. sec. $= 3\ 640$
log. $= 3,5611014$
sottra $5,3144251$
log. $\phi = 8,2466763$
$\phi = 0,0176472$
$3q = 4,7123890$
$L{:}c = 3q + \phi = 4,7300262$

$L{:}c = 3q + \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$.

$\phi = 1^\circ, 0, 41''$
in min. sec. $= 3\ 641$
log. $= 3,5612207$
sottra $5,3144251$
log. $\phi = 8,2467956$
$\phi = 0,0176521$
$3q = 4,7123890$
$L{:}c = 3q + \phi = 4,7300411$

$\frac{1}{2}\phi = 30', 20''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 12,0543425$
$v = 2,0543425$
log. $v = 0,3126728$
aggiungi $0,3622157$
log. $u = 0,6748885$
$L{:}c = u = 4,7302984$
errore $= +\ 2622$
altro errore $= -\ 171$
differenza $= 2793$.

$\frac{1}{2}\phi = 30', 20''\frac{1}{2}$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 12,0542232$
$v = 2,0542232$
log. $v = 0,3126476$
aggiungi $0,3622157$
log. $u = 0,6748633$
$L{:}c = u = 4,7300240$
errore $= -\ 171$

Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciasi $2793 : 2622 :: 1'' : \frac{2622''}{2793} = 0,9388''$, ed il quarto termine s'eguaglierà a quella quantità, che aggiunta a $1^\circ, 0, 40''$ mi dà il vero valore dell' angolo

$\phi = 1^\circ, 0', 40, 9388''$
in min. sec. $= 3640,9388''$
log. $= 3,5612132$
sottra $5,3144251$
log. $\phi = 8,2467881$
$\phi = 0,0176518$
$3q = 4,7123890$
$L{:}c = 3q + \phi = 4,7300408$ grandezza adequatamente giusta dell' angolo $L{:}c$ espresso in parti del raggio $= 1$.

Computo pel numero 2.

$\phi = 0, 2', 40''$
in min. sec. $= 1\ 60$
$\log. = 2,2041200$
sottra $5,3144251$
$\log.\phi = 6,8896949$
$\phi = 0,0007757$
$5q = 7,8539816$
$L:c = 5q - \phi = 7,8532059$

$L:c = 5q - \phi \log. \cot. \frac{1}{2}\phi.$

$\phi = 0, 2', 41''$
in min. sec. $= 1\ 61$
$\log. = 2,2068259$
sottra $5,3144251$
$\log.\phi = 6,8924008$
$\phi = 0,0007806$
$5q = 7,8539816$
$L:c = 5q - \phi = 7,8532010$

$\frac{1}{2}\phi = 0, 1', 20''$
$\log. \cot. \frac{1}{2}\phi = 13,4113351$
$v = 3,4113351$
$\log. v = 0,5329244$
aggiungi $0,3622157$
$\log. u = 0,8951401$
$L:c = u = 7,8548897$
errore $= +\ 16838$
altro errore $= -\ 45410$
differenza $= 62248$

$\frac{1}{2}\phi = 0, 1', 20'' \frac{1}{2}$
$\log. \cot. \frac{1}{2}\phi = 13,4086292$
$v = 3,4086292$
$\log. v = 0,5325798$
aggiungi $0,3622157$
$\log. u = 0,8947955$
$L:c = u = 7,8486600$
errore $= -\ 45410$

Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciasi $62248 : 16838 :: 1'' : \frac{16838''}{62248}$ $= 0, 27050''$ quantità da aggiugnersi a $0, 2', 40''$ onde s' abbia il giusto valore dell' angolo

$\phi = 0,2',40,27050''$
in min. sec. $= 160,27050$
$\log. = 2,2048536$
sottra $5,3144251$
$\log.\phi = 6,8904285$
$\phi = 0,0007770$
$5q = 7,8539816$
$L:c = 5q - \phi = 7,8532046$

misura fisicamente esatta dell' angolo $L:c$ espresso in parti del raggio.

Computo pel numero 3.

$\phi = 0, 0, 6''$
log. $= 0,7781512$
fottra $5,3144251$
log. $\phi = 5,4637261$
$\phi = 0,0000291$
$7q = 10,9955743$
$L:c = 7q + \phi = 10,9956034$

$L:c = 7q + \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$

$\phi = 0, 0, 7''$
log. $= 0,8450980$
fottra $5,3144251$
log. $\phi = 5,5306729$
$\phi = 0,0000339$
$7q = 10,9955743$
$L:c = 7q + \phi = 10,9956082$

$\frac{1}{2}\phi = 0, 0, 3''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 14,8373039$
$v = 4,8373039$
log. $v = 0,6846034$
aggiungi $0,3622157$
log. $u = 1,0468191$
$L:c = u = 11,1383051$
errore $= +\ 1427017$
altro errore $= -\ 113529$
differenza $= 1540546$

$\frac{1}{2}\phi = 0, 0, 3\frac{1}{2}''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 14,7703571$
$v = 4,7703571$
log. $v = 0,6785509$
aggiungi $= 0,3622157$
log. $u = 1,0407666$
$L:c = u = 10,9841553$
errore $= -\ 113529$

Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciaſi $1540546 : 1427017 :: 1'' : \frac{1427017''}{1540546} = 0,9263060''$ porzione di ſecondo, che aggiunta a $0, 0, 6''$, mi ſomminiſtra la miſura quanto baſta dell' angolo

$\phi = 0,0',6,9263060''$
log. $= 0,8405017$
fottra $5,3144251$
log. $\phi = 5,5260766$
$\phi = 0,0000336$
$7q = 10,9955743$
$L:c = 7q + \phi = 10,9956079$

grandezza fiſicamente eſatta dell' angolo $L:c$ eſpreſſo in parti del raggio. Si troverebbe con maggior preciſione il valore dell' angolo

$\phi = 6,9202852''$, supponendo $L:c = u = 10,9956079$, ed indi retrocedendo con metodo contrario a quello da me tenuto, fino a tanto che ci si presenta il valore di $\frac{1}{2}\phi$ espresso in secondi. Nei numeri seguenti a cagione della somma picciolezza dell' angolo ϕ, mi servirò di un tale artificio.

Computo pel numero 4.

$\phi = 0, 0, \frac{2}{7}''$
log. $= -0,5440680$
sottra $5,3144251$
$-5,8584931$
aggiungi $10,0000000$
log. $\phi = 4,1415069$
$\phi = 0,000001385$
$9q = 14,137166941$
$L:c = 9q - \phi = 14,137165556$

$L:c = 9q - \phi = \log. \cot. \frac{1}{2}\phi.$

$\phi = 0, 0, \frac{1}{2}''$
log. $= -0,4771212$
sottra $5,3144251$
$-5,7915463$
$10,0000000$
log. $\phi = 4,2084537$
$\phi = 0,000001616$
$9q = 14,137166941$
$L:c = 9q - \phi = 14,137165325$

$\frac{1}{2}\phi = 0, 0, \frac{1}{2}''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 16,1595232$
$v = 6,1595232$
log. $v = 0,7895471$
aggiungi $0,3622157$
log. $u = 1,1517628$
$L:c = u = 14,182828217$
errore $= +\ 45662661$
altro errore $= -\ 108489187$
differenza $= 154151848$

$\frac{1}{2}\phi = 0, 0, \frac{1}{6}''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 16,0925764$
$v = 6,0925764$
log. $v = 0,7848010$
aggiungi $0,3622157$
log. $u = 1,1470167$
$L:c = u = 14,028676138$
errore $= -\ 108489187$

Differenza $= 231$ fra i due valori del angolo ϕ espresso in parti del raggio. Facciasi $154151848 : 45662661 :: 231 : 68$ quantità che aggiunta a 1385 mi dà l' aggiustato valore dell' angolo

$\phi = 0,000001453$

$\phi = 0,000001453$ Sottraendo questo da 99, resta $L:c = 99 - \phi = 14,137165488$. Pongasi adunque

$L:c = u = 14,137165488$
$\log. u = 1,1503623$
sottra $0,3622157$
$\log. v = 0,7881466$
$v = 6,1396921$
$\log. \text{cot.} \frac{1}{2}\phi = 16,1396921$
$\frac{1}{2}\phi = 0,1495316''$
$\phi = 0,2990633''$ grandezza esattissima dell' angolo ϕ espresso in secondi.

Computo pel numero 5. $L:c = 11q + \phi = \log. \text{cot.} \frac{1}{2}\phi$.

Riducendo a calcolo nel presente, e nel seguente numero il valore dell'angolo $L:c$, trascuro siccome rispettivamente minimo l'angolo ϕ.

$L:c = u = 17,2787596$
$\log. u = 1,2375125$
sottra $0,3622157$
$\log. v = 0,8752968$
$v = 7,5046691$
$\log. \text{cot.} \frac{1}{2}\phi = 17,5046691$
$\frac{1}{2}\phi = 0,006461837''$
$\phi = 0,012923673''$ misura adequatamente giusta dell' angolo piccolissimo ϕ espresso in secondi.

Computo pel numero 6. $L:c = 13q - \phi = \log. \text{cot.} \frac{1}{2}\phi$.

$L:c = u = 20,4203522$
$\log. u = 1,3100632$
sottra $0,3622157$
$\log. v = 0,9478475$
$v = 8,8684449$
$\log. \text{cot.} \frac{1}{2}\phi = 18,8684449$
$\frac{1}{2}\phi = 0,000279242''$
$\phi = 0,000558483''$ valore fisicamente esatto dell' angolo ϕ espresso in parti di minuto secondo.

Dispongo ordinatamente nella tavola, che segue, le sei determinate grandezze dell' angolo $L:c$ espresso in parti del raggio.

Valori dell' angolo $L:c$ espresso in parti del raggio $=1$.

(1) $L:c=3q+\Phi=$	4, 7300408	log. $=0$, 6748648
(2) $L:c=5q-\Phi=$	7, 8532046	log. $=0$, 8950469
(3) $L:c=7q+\Phi=$	10, 9956079	log. $=1$, 0412192
(4) $L:c=9q-\Phi=$	14, 1371655	log. $=1$, 1503623
(5) $L:c=11q+\Phi=$	17, 2787596	log. $=1$, 2375125
(6) $L:c=13q-\Phi=$	20, 4203522	log. $=1$, 3100632
ecc.		ecc.

Determinare il numero di vibrazioni fatte da un Cilindro nel tempo d' un minuto secondo rispettivamente a ciascun modo, in cui può oscillare.

XXIII. Si chiami m il numero, a cui s' eguaglia l' angolo $L:c$, onde s' abbia $L:c=m$, e conseguentemente $L=mc$. E concioffiachè al numero XIII. s' è posto $c^4=ELf:M$, si scoprirà $L^4=m^4ELf:M$, e perciò $f=ML^3:m^4E$. Abbiamo stabilito al fine del numero III. $E=KrM^2:g^2L^2$. Fatta la surrogazione d' un tal valore, troveremo $f=L^5g^2:Km^4Mr$. Dalla prima equazione esprimente la lunghezza f del pendolo semplice isocrono impareremo serbar essa lunghezza la proporzione composta, diretta delle masse, e del cubo delle lunghezze dei cilindri, ed inversa del quadrato — quadrato del numero m, e della forza E, il cui valore si determina col mezzo degli esperimenti, qualmente ho insegnato nei numeri V. VI. e VII. La seconda espressione ci addita, che la lunghezza f del pendolo semplice isocrono sta in ragione composta, diretta della quinta potestà delle lunghezze L dei cilindri, e del quadrato della loro gravità specifica g, ed inversa del quadrato — quadrato del numero m, della massa M, e della ri-

gidità r della materia, onde ſono formati. Non ho fatta menzione del coefficiente K, perchè ho già notato al numero III. mantenerſi ſempre coſtante in tutti i cilindri.

Eſſendo la gravità ſpecifica eguale alla maſſa diviſa pel volume, ed eſſendo la baſe d'un cilindro proporzionale al quadrato del ſuo diametro, avremo g come $M:LD^2$, e per conſeguenza M come gLD^2. Soſtituiti nella noſtra ſeconda eſpreſſione della lunghezza f del pendolo ſemplice iſocrono prima in cambio di g, poſcia in cambio di M, i valori proporzionali, troveremo f come $L^3M:m^4D^4r$, f come $L^4g:m^4D^3r$.

Dalle quattro eſpreſſioni generali ſi dedurranno agevolmente le particolari. Se per eſempio due cilindri ſieno compoſti della ſteſſa materia, e ſi vibrino ſimilmente, ripiegandoſi in curve, che taglino l'aſſe in numero eguale di punti; ſaranno coſtanti i valori delle ſpecie g, r, m, e ſi ſcoprirà f come $L^4:D^3$, cioè a dire le lunghezze dei pendoli ſemplici iſocroni in ragione compoſta, diretta quadruplicata delle lunghezze dei cilindri, ed inverſa duplicata dei loro diametri.

XXIV. Sia b la lunghezza del pendolo ſemplice, che nel fare una vibrazione c'impiega un minuto ſecondo, dimodochè ſia $b=3,16625$ piedi del Reno, o pure $b=$ piedi 3 linee 8, 57 del piede Reale di Parigi: e giacchè le durate delle oſcillazioni ſerbano la ragione ſudduplicata delle lunghezze dei pendoli, il tempo d'una vibrazione d'un cilindro s'eguaglierà a ſecondi

$\sqrt{f}:\sqrt{b}=\frac{1}{m^2}\sqrt{(ML^3:bE)}=\frac{1}{m^2}\sqrt{(L^4g^2:KbMr)}$. Conſeguentemente avremo il numero delle vibrazioni fatte dal cilindro in un minuto ſecondo, o ſia il ſuono d'eſſo cilindro, ch'io chiamo $S=m^2\sqrt{(bE:ML^3)}=m^2\sqrt{(KbrM:L^4g^2)}$.

Se nell'eſpreſſione ſeconda in vece di g, o di M ſo-

ſtituiremo i valori proporzionali $M{:}LD^2$, gLD^2, ci ſi preſenterà S come $m^2\sqrt{(rD^4{:}ML^3)}$, come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r{:}g)}$.

La formola $S = m^2\sqrt{(hE{:}ML^3)}$ ſerve per iſcoprire il preciſo numero di vibrazioni, che fa un cilindro nel tempo d'un minuto ſecondo, potendoſi determinare il valore della forza E col mezzo degli eſperimenti, la grandezza della maſſa M col mezzo del peſo, la lunghezza L con diligente miſura, ed eſſendo cogniti la lunghezza h del pendolo a ſecondi, ed il numero m, qualmente che il cilindro ſi vibra piuttoſto in un modo, che nell'altro.

L'ultima maniera, colla quale ſi dinotano i ſuoni dei cilindri, cioè S come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r{:}g)}$, ci mette ſotto degli occhi nel ſuo più ſemplice aſpetto la legge, che dà regola ai ſuoni ſteſſi, i quali ſtanno in proporzione compoſta, diretta duplicata del numero m, ſemplice de' diametri D dei cilindri, dimezzata della rigidità r della materia che li compone, e reciproca duplicata delle lorolunghezze L, e dimezzata delle loro gravità ſpecifiche g.

Corollarj, che ſi deducono dalla formola S come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r{:}g)}$.

XXV. Dal predetto ultimo modo d'eſprimere i ſuoni dei cilindri s'inferiſcono parecchi corollarj.

1. Cavo ſubito quella conſeguenza, che ha l'aria di paradoſſo, e che da qualcuno non ſi crederebbe, ſe non veniſſe confermata dall'eſperienza, ed è ch' eſſendo il reſto pari, i cilindri ſono tanto più acuti, quanto il diametro loro è maggiore. Si dileguerà per altro l'apparente ripugnanza qualora ſi rifletta, che la forza elaſtica E creſce all'aumentarſi del diametro D, avendola dimoſtrata proporzionale a D^4r nel numero III. e creſce a proporzione più di quello s'ingrandiſca la maſſa M, laonde nell'ipoteſi, che preſentemente ſi conſidera, abbiamo $S = m^2\sqrt{(hE{:}ML^3)}$ proporzionale a D.

2. Poſtochè due cilindri oſcillino ſimilmente adattandoſi a curve, che interſecano l'aſſe in numero eguale di punti, ſarà coſtante la ſpecie m, e ne riſulterà S come $\frac{D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$.

3. Nella ſteſſa ſuppoſizione troveremo la rigidità r come $S^2L^4g:D^4$. Col mezzo dei ſuoni adunque ſi può ſcoprire la proporzione fra le rigidità di varie materie, le quali rigidità, quando i cilindri ſieno egualmente lunghi e groſſi, accetteranno la ragione S^2g, che ſi compone della duplicata dei ſuoni, e della ſemplice delle gravità ſpecifiche. Queſte mie determinazioni ſi accordano con ciò, che ha dimoſtrato il Co: *Jacopo Riccati* mio Padre nella ſua Diſſertazione intorno le leggi delle forze elaſtiche inſerita nel *Tomo I. dei Comentarj dell' Accademia di Bologna*, e riſtampata nel Tomo III. delle ſue Opere.

4. Se due cilindri, che ſi vibrano ſimilmente, ſaranno formati della ſteſſa materia, onde ſieno egualmente rigidi, ed egualmente gravi in iſpezie, o pure ſe in eſſi le rigidità ſtaranno come le gravità ſpecifiche, ſcoprirаſſi S come $D:L^2$, cioè a dire i ſuoni in ragione compoſta, diretta dei diametri dei cilindri, ed inverſa duplicata delle loro lunghezze.

5. Se inoltre i due cilindri ſaranno ſimili, avremo S come $1:L$, o pure S come $1:D$, vale a dire i ſuoni dei cilindri ſimili ſi riguarderanno nella ragione reciproca dei lati omologhi. Queſta legge abbraccia tutti i corpi ſimili della ſteſſa materia formati, non eccettuate le corde, per l'eſatta ſimilitudine delle quali non baſta, che i diametri ſieno proporzionali alle lunghezze, ma biſogna altresì che le loro particole ſieno ugualmente rigide, il che interviene, quando le corde ſi ſtendono con forze in ragione delle loro baſi. Coſa maravigliosa ſi è, che ſi dia un caſo, nel quale s'uniſcano in un ſolo i canoni cotanto diverſi, donde prendono regola i ſuoni di varj corpi differenti nella ſtrut-

tura, e nelle circoſtanze, che nelle loro vibrazioni influiſcono.

6. I ſuoni dello ſteſſo cilindro ſi riferiſcono nella proporzione dei quadrati m^2. Eſſendo $m = nq \pm \phi$, ſe gli angoli ϕ foſſero talmente piccioli, che ſi poteſſero totalmente traſcurare, abbraccierebbero i ſuoni il rapporto dei quadrati n^2: e giacchè n s'eguaglia in ſerie ai numeri impari 3, 5, 7, 9, 11, 13 ecc., i predetti ſuoni ſarebbero come i quadrati di tali numeri, cioè a dire come 9, 25, 49, 81, 121, 169 ecc. Meſſi a computo gli angoli ϕ, e principalmente il più grande, che corriſponde al numero (1.), ſi trovano alterate per poco più di mezzo comma $\frac{81}{80}$, il cui log. = 53950, le proporzioni 9 : 25, 9 : 49, 9 : 81 ecc., nelle quali il ſuono grave 9 paragonaſi cogli acuti. Le altre proporzioni rieſcono preſſochè giuſte; imperciocchè il maggior divario, che modifica la ragione 25 : 49, s'eguaglia in logaritmi a 885 parte 61.ma del comma.

Regiſtro nella ſeguente tavola i ſei ſuoni, che rende un cilindro, mentre oſcillando s'adatta a quelle curve, che tagliano l'aſſe in 2, 3, 4, 5, 6, 7 punti. Paragono i ſuoni acuti col grave, noto le alterazioni dei rapporti 9 : 25, 9 : 49, 9 : 81 ecc., ed oſſervo a quali ſemplici proporzioni ſi accoſtino i mentovati rapporti modificati.

Paragone del ſuono più grave d' un cilindro coi ſuoni acuti.

Quantità proporzionale ai ſuoni.	Loro logaritmi.
$(1)m^2=(3q+\phi)^2$	log.1,3497296
$(2)m^2=(5q-\phi)^2$	log.1,7900938 $=$ log. $\frac{25}{9}$ $-$ 33333, ſuono, che cala dalla Quarta maggiore ſopra l' Ottava $\frac{25}{9}$ per qualche coſa più di mezzo Comma, il cui log. $=$ 53950.
$(3)m^2=(7q+\phi)^2$	log.2,0824384 $=$ log. $\frac{49}{9}$ $-$ 32448. Queſto intervallo ſupera la Quarta ſopra la doppia Ottava per 57100 quantità poco più grande del Comma.
$(4)m^2=(9q-\phi)^2$	log.2,3007246 $=$ log. $\frac{81}{9}$ $=$ log.9 $-$ 32475, Seconda maggiore ſopra l' Ottava triplicata.
$(5)m^2=(11q+\phi)^2$	log.2,4750250 $=$ log. $\frac{121}{9}$ $-$ 32475, Seſta maggiore preſſochè giuſta ſopra la tripla Ottava, creſcendo ſolamente per 3566, parte decimaquinta del Comma.
$(6)m^2=(13q-\phi)^2$	log.2,6201264 $=$ log. $\frac{169}{9}$ $-$ 32475, Seconda ſuperflua ſopra la quadrupla Ottava, calante per 6700 ottava parte del Comma dalla ragione $\frac{7}{6}\cdot 16=\frac{56}{7}$ propria d' eſſo intervallo.

XXVI. In grazia dell' esperimento, che a suo luogo riferirò, metto sotto gli occhi di chi legge la seguente Tavola, in cui, posto che il suono più grave d' un cilindro sia unisono ad una corda, la cui lunghezza 60, dispongo ordinatamente le lunghezze delle porzioni della corda stessa unisone agli altri suoni d' esso cilindro.

Porzioni della corda 60 unisone ai suoni acuti d' un cilindro nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda intera.

	Lunghezze delle corde
(1)	60
(2)	21, 75+
(3)	11, 10+
(4)	6, 717—
(5)	4, 496+
(6)	3, 219+
ecc.	ecc.

XXVII. Stabilisce rettamente il celebratissimo Signor *Leonardo Eulero*, che rispettivamente alle lamine elastiche sia $S = m^2 \sqrt{(hE:ML^3)}$. Ma asserendo egli alla pag. 269. che la forza elastica E sta in ragione composta della rigidità r della materia componente le lamine della loro larghezza D, e del quadrato G^2 della loro grossezza, viene ad abbracciare la proporzione S come $\frac{m^2}{L^2}\sqrt{(Gr:g)}$, la quale non si accorda colla verità, ed è riprovata dall' esperienza. Le lamine della stessa materia simili, e similmente vibrantisi, non s' uniformerebbero alla legge comune a tutti i corpi simili, i cui suoni serbano la ragione reciproca dei lati omologhi. Oltre a ciò i suoni delle lamine, che differiscono solo nella grossezza, dovrebbero riferirsi nella proporzione dimezzata delle grossezze, e gli esperimenti c' insegnano, che i suoni si corrispondono nella ragione

ne delle groſſezze. Col metodo da me praticato in riguardo ai cilindri ſi dimoſtra, che nelle lamine la forza elaſtica E ſta come rDG^3. Fatto uſo di un tal canone, troveremo S come $\frac{m^2G}{L^2} V (r:g)$, rapporto, che ha il fondamento d' una rigoroſa dimoſtrazione, e coll' eſperienza s' accorda mirabilmente.

Aggiungo l' importante avvertenza, che nella determinazione dei ſuoni delle lamine elaſtiche non ha veruna parte la loro larghezza; dimodochè due lamine, la cui differenza conſiſta ſolo nella larghezza, rendono lo ſteſſo ſuono.

Determinare riſpettivamente a ciaſcun modo, in cui può oſcillare un cilindro, i nodi, o punti ſtabili intorno ai quali ſi vibra.

XXVIII. Dalle coſe ſopra ſpiegate raccoglieſi, che il numero de' punti immobili s' eguaglia a 2, 3, 4, 5, 6, 7 ecc. ſecondo che un cilindro ſi vibra o giuſto la prima, o giuſto la ſeconda, o giuſto la terza ecc. ſpecie delle oſcillazioni, che può concepire. Se il numero dei nodi è impari, un nodo cade alla metà del cilindro, e la ſua poſizione è determinata. Reſterebbe adunque da ſtabilirſi il ſito di due nodi nelle ſpecie di vibrazioni prima e ſeconda, di quattro nodi nelle ſpecie terza e quarta, di ſei nodi nelle ſpecie quinta e ſeſta; ſenonchè ſendo collocati eſſi nodi a coppia a coppia a pari diſtanze dalla metà del cilindro, l' uno a deſtra, e l' altro a ſiniſtra, baſta a determinare un nodo nella prima e nella ſeconda ſpecie, due nodi nella terza e nella quarta ſpecie, tre nodi nella quinta e nella ſeſta ſpecie di oſcillazioni, e così di ſeguito.

Nel ſito del punto immobile è l' ordinata $y = o$, ed in tal ipoteſi abbiamo per i corollari terzo del numero XVI. e ſecondo del numero XVIII. le due equazioni

$e^{z:c} + e^{-z:c} = \pm \frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, $e^{z:c} - e^{-z:c} = \pm \frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$. Il segno negativo negli omogenei di comparazione è adattato a que' casi, ne' quali sono negative le quantità cos. $z:c$, sen. $z:c$. Se i predetti coseni, e seni si considereranno sempre positivi, qualunque sia la lor direzione, valerà il segno positivo, del quale farò uso costantemente. Servono le due equazioni, la prima pel genere di vibrazioni indicato coi numeri impari, la seconda pel genere di vibrazioni dai numeri pari contrassegnato.

Si stabilisce la positura d'un nodo, assegnando all'angolo $z:c$ quella precisa misura, onde secondo i varj generi di vibrazioni si verifichi o l'una, o l'altra delle premesse equazioni. Troveremo poi la grandezza sificamente esatta dell'angolo mentovato, ponendo in opera il metodo dei limiti usato al numero XXII. per iscoprire il valore dell'angolo ϕ. Osserverà il Lettore nei seguenti computi, ch'io ristringo la misura dell'angolo $z:c$ fra due confini, che differiscono per un solo minuto secondo, e che dagli errori, nei quali s'incorre abbracciando l'uno, o l'altro limite, ne deduco il valore adequatamente giusto dell'angolo $z:c$.

XXIX. S'esprima in minuti secondi l'angolo $z:c$, e col metodo insegnato al numero XXI. e praticato al numero XXII. in riguardo all'angolo ϕ si trovi il logaritmo dell'angolo $z:c$ espresso in parti del raggio $= 1$. Il logaritmo del numero $e = 2,7182818$ s'eguaglia a $0,4342945$, ed il logaritmo di quest'ultimo numero pareggia $-0,3622157$, e quindi il logaritmo del logaritmo del numero e, o sia
log. log. $e = -0,3622157$. Sottraendo adunque dal logaritmo dell'angolo $z:c$ espresso in parti del raggio il numero $0,3622157$, ne risulterà una quantità $=$ log. $z:c$ + log. log. e. Si faccia transito coll'ajuto delle tavole dai logaritmi ai numeri, e ci si presenterà il valore della grandezza $z:c$ log. e, e nuovamente passando dai logarit-

mi ai numeri, ſcopriremo il valore di $e^{z:c}$. Dato queſto, rieſce facile il ritrovare il valore di $e^{-z:c} = \frac{1}{e^{z:c}}$, e conſeguentemente quello di $e^{z:c} \pm e^{-z:c}$.

I valori dell'uno, e dell'altro omogeneo di comparazione $\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$, $\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ ſi determinano col mezzo del ſeguente artifizio. Prendaſi dalle tavole il logaritmo del cof. $z:c$, e del ſen. $z:c$, ed indi ſottratto $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c$, dal reſiduo nuovamente ſi levi 4, 6989700, e quello che reſta s' eguaglierà a log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$, o pure a log. $\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ (*b*). I predetti coſeni, e ſeni

(*b*) Chiamo U, V i logaritmi preſi dalle tavole dei ſeni delle quantità cof. $z:c$, cof. $L:c$, e per le coſe dimoſtrate nell' annotazione ſegnata (*f*), ed inſerita nel numero XXI. faranno $U-10,0000000$, $V-10,0000000$ i logaritmi tolti dalle tavole dei numeri, proprj dei coſeni relativi al raggio $=1$ degli ſteſſi angoli $z:c$, $L:c$; dimodochè ſi avrà log. cof. $z:c = U-10,0000000$, log. cof. $L:c = V-10,0000000$: ma in riguardo ai logaritmi comuni, il cui protonumero $=1$ log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ $=$ log. cof. $z:c$ + log. 2 — $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c$; dunque ſurrogati nell'omogeneo di comparazione in cambio di log. cof. $L:c$, di log. 2 i loro valori $U-10,0000000$; $V-10,0000000$; 0, 3010300, e ridotti i computi, troveremo log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right) = U - \frac{1}{2}V - 4,6989700$;

faranno relativi al raggio $= 1$, ficcome al principio del numero XIII. è ſtato da me preſcritto. Fatto poſcia il paſſaggio dai logaritmi ai numeri, ci ſi affaccieranno i valori dei due omogenei di comparazione $\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$, $\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$.

Determinato col metodo dei limiti il valore ſſicamente eſatto dell' angolo $z:c$ eſpreſſo in minuti ſecondi, e trovato poi il logaritmo del medeſimo angolo eſpreſſo in parti del raggio $= 1$, ſi ſottri log. $L:c$, ed il reſiduo s' eguaglierà a log. $z:L$. I diverſi valori, che può avere log. $L:c$ riſpettivamente alle varie ſpecie di oſcillazioni, gli ho regiſtrati al fine del numero XXII. Aggiungaſi log. $2 = 0$, 3010300, e ne riſulterà il valore di log. $z:\frac{1}{2}L$, col mezzo del quale le tavole ci ſuggeriranno quello di $z:\frac{1}{2}L$, quantità, che determina la cercata proporzione fra la linea nota $\frac{1}{2}L = CA$ (*fig.* 3, 4, 5, 6, 7, 8 ecc.) e la lunghezza di z uguale per eſempio a CE, all' eſtremità della quale il punto immobile E corriſponde.

XXX. Dopo che ho ſpiegata la maniera d' iſtituire i computi paſſo ad effettuare i computi ſteſſi, che m' hanno coſtata una lunga fatica, e ch' io continuo ſino alla ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

---

il che ecc. La ſteſſa dimoſtrazione vale per comprovare il valore aſſegnato a log. $\left(\frac{2. \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$.

Computo per la ſpecie I. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c=$	$74,45',23''$	$z:c=$	$74,45,24''$
in min. ſec.$=$	$269123''$	in min. ſec.$=$	$269124''$
log.$=$	$5,4299508$	log.$=$	$5,4299524$
ſottra	$5,3144251$	ſottra	$5,3144251$
log. $z:c=$	$0,1155257$	log. $z:c=$	$0,1155273$
ſottra	$0,3622157$	ſottra	$0,3622157$
log.$z:c$+log.log.$e=$	$9,7533100$	log.$z:c$+log.log. $e=$	$9,7553116$
$z:c$ log. $e=$	$0,5666436$	$z:c$ log. $e=$	$0,5666457$
$e^{z:c}=$	$3,6867496$	$e^{z:c}=$	$3,6867674$
$e^{-z:c}=$	$0,2712417$	$e^{-z:c}=$	$0,2712403$
$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	$3,9579913$	$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	3.9580077
log. cof. $z:c=$	$9,4198295$	log. cof. $z:c=$	$9,4198218$
ſottr. $\frac{1}{2}$log.cof.$L:c=$	$4,1233764$	ſottr. $\frac{1}{2}$log.cof. $L:c=$	$4,1233764$
	$5,2964531$		$5,2964454$
ſottra	$4,6989700$	ſottra	$4,6989700$
log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)=$	$0,5974831$	log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)=$	$0,5974754$
$\frac{2 \text{ cof. } L:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}=$	$3,9580665$	$\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}=$	$3,9579964$
errore$=+$	752	errore$=-$	113
altro errore$=-$	113		
differenza$=$	865		

Facciaſi $865 : 752 :: 1'' : \frac{752''}{865} = 0,8694''$ porzione di ſecondo, per cui va accreſciuto il minor valore dell' angolo $z:c$, onde ſia

$z:c=$	$269123,8694''$
log.$=$	$5,4299522$
ſottra	$5,3144251$
log. $z:c=$	$0,1155271$
ſottra log. $L:c=$	$0,6748648$
log. $z:L=$	$9,4406623$

aggiun. log. 2 = 0,3010300

log. z:½L = 9,7416923

z:½L = CE:CA = 0,5516864 (*fig.* 3.)

Computo per la ſpecie II. delle vibrazioni dei cilindri

z:c = 165°,32′,5″	z:c = 165°,32′,6″
in min. ſec. = 595925	in min. ſec. = 595926
log. = 5,7751916	log. = 5,7751924
ſottra 5,3144251	ſottra 5,3144251
log. z:c = 0,4607665	log. z:c = 0,4607673
ſottra 0,3622157	ſottra 0,3622157
log. z:c + log. log. e = 0,0985508	log. z:c + log. log. e = 0,0985516
z:c log. e = 1,2547317	z:c log. e = 1,2547340
$e^{z:c}$ = 17,9775993	$e^{z:c}$ = 17,9776945
$e^{-z:c}$ = 0,0556248	$e^{-z:c}$ = 0,0556245
$e^{z:c} - e^{-z:c}$ = 17,9219745	$e^{z:c} - e^{-z:c}$ = 17,9220700
log. ſen. z:c = 9,3975807	log. ſen. z:c = 9,3975725
ſottr. ½ log. coſ. L:c = 3,4452230	ſottr. ½ log. coſ. L:c = 3,4452230
5,9523577	5,9523495
ſottra 4,6989700	ſottra 4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right)$ = 1,2533877	$\log.\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right)$ = 1,2533795
$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}$ = 17,9220512	$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}$ = 17,9217128
errore = + 767	errore = − 3572
altro errore = − 3572	
differenza = 4339	

Facciaſi 4339 : 767 :: 1″ : $\frac{767''}{4339}$ = 0, 1768″ parte di ſecondo, che deve aggiungerſi al più piccolo valore dell'angolo z:c, onde s'abbia

z:c = 595925,1768″

log. = 5,7751918

ſottra 5,3144251

log. z:c = 0,4607667

fottra log. $L:c$ = 0,8950469

log. $z:L$ = 9,5657198

aggiungi log. 2 = 0,3010300

log. $z:\frac{1}{2}L$ = 9,8667498

$z:\frac{1}{2}L = CE:CA$ = 0,7357831 (*fig.* 4)

Computo per la fpecie III. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c$ = 89°,10',41''	$z:c$ = 89°,10',42''
in min. fec. = 321041''	in min. fec. = 321042''
log. = 5,5065605	log. = 5,5065618
fottra 5,3144251	fottra 5,3144251
log. $z:c$ = 0,1921354	log. $z:c$ = 0,1921367
fottra 0,3622157	fottra 0,3622157
log.$z:c$+log.log. e = 9,8299197	log.$z:c$+log.log.e = 9,8299210
$z:c$ log. e = 0,6759580	$z:c$ log. e = 0,6759600
$e^{z:c}$ = 4,7419617	$e^{z:c}$ = 4,7419836
$e^{-z:c}$ = 0,2008832	$e^{-z:c}$ = 0,2108822
$e^{z:c}+e^{-z:c}$ = 4,9528449	$e^{z:c}+e^{-z:c}$ = 4,9528658
log. cof. $z:c$ = 8,1566857	log. cof. $z:c$ = 8,1565394
fottr. $\frac{1}{2}$log.cof. $L:c$ = 2,7628494	fottr. $\frac{1}{2}$log.cof.$L:c$ = 2,7628494
5,3938363	5,3936900
fottra 4,6989700	fottra 4,6989700
log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 0,6948663	log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 0,6947200
$\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 4,9529772	$\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 4,9513090
errore = + 1323	errore = — 15568
altro errore = — 15568	
differenza = 16891	

Facciaſi 16891 : 1323 :: 1'' : $\frac{1323''}{16891}$ = 0, 0783'' porzione di ſecondo da aggiungerſi al minor valore dell'angolo $z:c$, onde s' abbia

$z:c = 321041,0783''$
log. $= 5,5065606$
sottra $5,3144251$

log. $z:c = 0,1921355$
sottra log. $L:c = 1,0412192$

log. $z:L = 9,1509163$
aggiungi log. $2 = 0,3010300$

log. $z:\frac{1}{2}L = 9,4519463$
$z:\frac{1}{2}L = CE:CA = 0,2831042$ (*fig.* 5)

Segue il computo per la specie III. delle virbazioni dei cilindri.

$z:c = 255°,30',6''$	$z:c = 255°,30',7''$
in min. sec. $= 919806''$	in min. sec $= 919807''$
log. $= 5,9636963$	log. $= 5,9636967$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
log. $z:c = 0,6492712$	log. $z:c = 0,6492716$
sottra $0,3622157$	sottra $0,3622157$
log. $z:c$ + log. log. $e = 0,2870555$	log. $z:c$ + log. log. $e = 0,2870559$
$z:c$ log. $e = 1,9366695$	$z:c$ log. $e = 1,9366713$
$e^{z:c} = 86,4309940$	$e^{z:c} = 86,4318519$
$e^{-z:c} = 0,0115700$	$e^{-z:c} = 0,0115699$
$e^{z:c} + e^{-z:c} = 86,4425640$	$e^{z:c} + e^{-z:c} = 86,4429218$
log. cos. $z:c = 9,3985507$	log. cos. $z:c = 9,3985426$
sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c = 2,7628494$	sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c = 2,7628494$
$6,6357013$	$6,6356932$
sottra $4,6989700$	sottra $4,6989700$
log. $\left(\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) = 1,9367313$	log. $\left(\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) = 1,9367232$
$\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} = 86,4432869$	$\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} = 86,4416733$
errore $= +$ 7229	errore $= -$ 12485
altro errore $= -$ 12485	
differenza $=$ 19714	Facciasi 19714 : 7229 :: 1'' ::

$\frac{7229''}{19714} = 0,3667''$ parte di secondo, che dee aggiungersi al valore più picciolo dell' angolo $z:c$, onde sia

$z:c =$	$919806,3667''$
log. $=$	$5,9636964$
sottra	$5,3144251$
log. $z:c =$	$0,6492713$
sottra log. $L:c =$	$1,0412192$
log. $z:L =$	$9,6080521$
aggiungi log. $2 =$	$0,3010300$
log. $z:\frac{1}{2}L =$	$9,9090821$
$z:\frac{1}{2}L = C2E:CA =$	$0,8111144$ (*fig.* 5.)

Computo per la specie IV. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c =$	$179°,12',50''$
in min. sec. $=$	$645170''$
log. $=$	$5,8096742$
sottra	$5,3144251$
log. $z:c =$	$0,4952491$
sottra	$0,3622157$
log. $z:c$ + log. log. $e =$	$0,1330334$
$z:c$ log. $e =$	$1,3584179$
$e^{z:c} =$	$22,8253757$
sottra $e^{-z:c} =$	$0,0438107$
$e^{z:c} - e^{-z:c} =$	$22,7815650$
log. sen. $z:c =$	$8,1373342$
sottra $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c =$	$2,0806276$
	$6,0567066$
sottra	$4,6989700$
log. $\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) =$	$1,3577366$

$z:c =$	$179°,12',51''$
in min. sec. $=$	$645171''$
log. $=$	$5,8096749$
sottra	$5,3144251$
log. $z:c =$	$0,4952498$
sottra	$0,3622157$
log. $z:c$ + log. log. $e =$	$0,1330341$
$z:c$ log. $e =$	$1,3584201$
$e^{z:c} =$	$22,8254913$
sottra $e^{-z:c} =$	$0,0439107$
$e^{z:c} - e^{-z:c} =$	$22,7816806$
log. sen. $z:c =$	$8,1371818$
sottra $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c =$	$2,0806276$
	$6,0565542$
sottra	$4,6989700$
log. $\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) =$	$1,3575842$

$\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} = 22{,}7890714$ errore $= +\ 75064$ altro errore $= -\ 804$ differenza $= +\ 75868$

$\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} = 22{,}7816002$ errore $= -\ 804$

Facciasi $75868 : 75064 :: 1'' : \frac{75064''}{75868} = 0{,}9894''$ porzione di secondo, che va aggiunta al minor valore dell'angolo $z:c$, onde ci si presenti

$z:c = 645170{,}9894''$
log. $= 5{,}8096748$
sottra $5{,}3144251$
log. $z:c = 0{,}4952497$
sottra log. $L:c = 1{,}1503623$
log. $z:L = 9{,}3448874$
aggiungi log. $2 = 0{,}3010300$
log. $z:\frac{1}{2}L = 9{,}6459174$
$z:\frac{1}{2}L = CE:CA = 0{,}4425042$ (*fig. 6*)

Segue il computo per la specie IV. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 345°,30',15''$
in min. sec. $= 1243815''$
log. $= 6{,}0947558$
sottra $5{,}3144251$
log, $z:c = 0{,}7803307$
sottra $0{,}3622157$
log.$z:c$+log.log.$e = 0{,}4181150$
$z:c$ log. $e = 2{,}6188764$
$e^{z:c} = 415{,}7922488$
sottra $e^{-z:c} = 0{,}0024050$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 415{,}7898438$
log. sen. $z:c = 9{,}3984774$
sottr. $\frac{1}{2}$log.cos.$L:c = 2{,}0806276$
$7{,}3178498$

$z:c = 345°,30',16''$
in min. sec. $= 1243816''$
log. $= 6{,}0947561$
sottra $5{,}3144251$
log. $z:c = 0{,}7803310$
sottra $0{,}3622157$
log.$z:c$+log.log.$e = 0{,}4181153$
$z:c$ log. $e = 2{,}6188782$
$e^{z:c} = 415{,}7939713$
sottra $e^{-z:c} = 0{,}0024050$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 415{,}7915663$
log. sen. $z:c = 9{,}3984693$
sottr. $\frac{1}{2}$log.cos.$L:c = 2{,}0806276$
$7{,}3178417$

sottra 4,6989700	sottra 4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) = 2,6188798$	$\log.\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) = 2,6188717$
$\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} = 415,7955024$	$\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} = 415,7877512$
errore = + 56586	errore = — 38151
altro errore = — 38151	
differenza = 94737	

Facciasi 94737 : 56586 :: 1″ : $\frac{56586''}{94737}$ = 0, 5973″ parte di secondo, che aggiunta al minor valore dell' angolo $z:c$ ci dà

$z:c = 124381^{5},5973''$
log. = 6,0947560
sottra 5,3144251

log. $z:c$ = 0,7803309
sottra log. $L:c$ = 1,1503623

log. $z:L$ = 9,6299686
aggiungi log. 2 = 0,3010300

log. $z:\frac{1}{2}L$ = 9,9309986
$z:\frac{1}{2}L = c2E:CA$ = 0,8530974 (*fig.* 6)

Computo per la specie V. delle vibrazioni de' cilindri.

$z:c = 89°,57',50''$	$z:c = 89°,57',51''$
in min. sec. = 323870″	in min. sec. = 323871″
log. = 5,5193707	log. = 5,5103720
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
log. $z:c$ = 0,1959456	log. $z:c$ = 0,1959469
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e = 9,8337299	log. $z:c$ + log. log. e = 9,8337312
$z:c$ log. e = 0,6819144	$z:c$ log. e = 0,6819165
$e^{z:c}$ = 4,8074458	$e^{z:c}$ = 4,8074690
$e^{-z:c}$ = 0,2080107	$e^{-z:c}$ = 0,2080097
$e^{z:c} + e^{-z:c}$ = 5,0154565	$e^{z:c} + e^{-z:c}$ = 5,0154787

log. cof. $z:c$ = 6,7995181	log. cof. $z:c$ = 6,7961645
fottr $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c$ = 1,3984804	fottr. $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c$ = 1,3984804
5,4010377	5,3976841
fottra 4,6989700	fottra 4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 0,7020677	$\log.\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 0,6987141
$\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 5,0357912	$\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 4,9970552
errore = + 203347	errore = — 184235
altro errore = — 184235	
differenza = 387582	

Facciasi 387582 : 203347 :: $1'' : \frac{203347''}{387582} = 0,5247''$ parte di secondo da aggiungersi al valore più picciolo dell' angolo $z:c$, onde sia

$z:c$ = 323870,5247″	
log. = 5,5103714	
fottra 5,3144251	
log. $z:c$ = 0,1959463	
fottra log. $L:c$ = 1,2375125	
log. $z:L$ = 8,9584338	
aggiungi log. 2 = 0,3010300	
log. $z:\frac{1}{2}L$ = 9,2594638	
$z:\frac{1}{2}L = CE:CA$ = 0,1817456	(*fig.* 7)

Segue il computo per la specie V. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c$ = 269°,12′,45″	$z:c$ = 269°,12′,46″
in min. sec. = 969165″	in min. sec. = 969166″
log. = 5,9863977	log. = 5,9863982
fottra 5,3144251	fottra 5,3144251
log. $z:c$ = 0,6719726	log. $z:c$ = 0,6719731
fottra 0,3622157	fottra 0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e = 0,3097569	log. $z:c$ + log. log. e = 0,3097574
$z:c$ log. e = 2,0405954	$z:c$ log. e = 2,0405977

$e^{x:c} = 109,7982563$ | $e^{x:c} = 109,7988375$
$e^{-x:c} = 0,0091076$ | $e^{-x:c} = 0,0091076$
$e^{x:c} + e^{-x:c} = 109,8073639$ | $e^{x:c} + e^{-x:c} = 109,8079451$

log. cof. $z:c = 8,1380961$ | log. cof. $z:c = 8,1379437$
sottr. $\frac{1}{2}$log.cof. $L:c = 1,3984804$ | sottr. $\frac{1}{2}$log.cof. $L:c = 1,3984804$
$6,7396157$ | $6,7394633$
sottra $4,6989700$ | sottra $4,6989700$

log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right) = 2,0406457$ | log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right) = 2,0404933$

$\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}} = 109,8109762$ | $\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}} = 109,7724539$

errore $= + 36123$ | errore $= - 354912$
altro errore $= - 354912$

differenza $= 391035$ Facciasi $391035 : 36123 :: 1'' : \frac{36123''}{391035} = 0,0924''$ parte di secondo, per cui dee accrescersi il minor valore dell'angolo $z:c$, onde s' abbia

$z:c = 969165,0924''$
log. $= 5,9863978$
sottra $5,3144251$
log. $z:c = 0,6719727$
sottra log. $L:c = 1,2375125$
log. $z:L = 9,4344602$
aggiungi log. $2 = 0,3010300$
log. $z:\frac{1}{2}L = 9,7354902$
$z:\frac{1}{2}L = c2E:cA = 0,5438638$ (*fig.* 7)

Segue il computo per la ſpecie V. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 435°,30',11''$ | $z:c = 435°,30',12''$
in min. ſec. $= 1567811''$ | in min. ſec. $= 1567812''$
log. $= 6,1952936$ | log. $= 6,1952939$

sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
log. $z:c$ = 0,8808685	log. $z:c$ = 0,88808688
sottra 0,36222157	sottra 0,36222157
log. $z:c$ + log. log. e = 0,5186528	log. $z:c$ + log. log. e = 0,5186531
$z:c$ log. e = 3,3010555	$z:c$ log. e = 3,3010578
$e^{z:c}$ = 2000,1174574	$e^{z:c}$ = 2000,1280516
$e^{-z:c}$ = 0,0005000	$e^{-z:c}$ = 0,0005000
$e^{z:c} + e^{-z:c}$ = 2000,1179574	$e^{z:c} + e^{-z:c}$ = 2000,1285516
log. cof. $z:c$ = 9,3985100	log. cof. $z:c$ = 9,3985019
sottr. $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c$ = 1,3984804	sottr. $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c$ = 1,3984804
8,0000296	8,0000215
sottra 4,6989700	sottra 4,6989700
log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 3,3010596	log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 3,3010515
$\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 2000,1363427	$\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 2000,0990327
errore = + 183853	errore = — 295189
altro errore = — 295189	
differenza = 479042	

Facciasi 479042 : 183853 :: $1'' : \frac{183853''}{479042} = 0,3838''$ porzione di secondo, che unita al minor valore dell' angolo $z:c$ ci dà

$z:c$ = 1567811,3838″	
log. = 6,1952938	
sottra 5,3144251	
log. $z:c$ = 0,8808687	
sottra log. $L:c$ = 1,2375125	
log. $z:L$ = 9,6433562	
aggiun. log. 2 = 0,3010300	
log. $z:\frac{1}{2}L$ = 9,9443862	
$z:\frac{1}{2}L = C3E:CA$ = 0,8798045	(*fig.* 7.)

Computo per la ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c =$ 179°,57′,56″	$z:c =$ 179°,57′,57″
in min. ſec. = 647876″	in min. ſec. = 647877″
log. = 5,8114919	log. = 5,8114926
ſottra 5,3144251	ſottra 5,3144251
log. $z:c$ = 0,4970668	log. $z:c$ = 0,4970675
ſottra 0,3622157	ſottra 0,3622157
log. $z:c$+log.log.e = 0,1348511	log. $z:c$+log.log.e = 0,1348518
$z:c$ log. e = 1,3641153	$z:c$ log. e = 1,3641175
$e^{z:c}$ = 23,1267891	$e^{z:c}$ = 23,1269063
$e^{-z:c}$ = 0,0432399	$e^{-z:c}$ = 0,0432397
$e^{z:c}-e^{-z:c}$ = 23,0835492	$e^{z:c}-e^{-z:c}$ = 23,0836666
log. ſen. $z:c$ = 6,7789965	log. ſen. $z:c$ = 6,7706810
fottr. $\frac{1}{2}$log.cof. $L:c$ = 0,7162924	fottr. $\frac{1}{2}$log.cof. $L:c$ = 0,7162924
6,0627041	6,0543886
ſottra 4,6989700	ſottra 4,6989700
log. $\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 1,3637341	log. $\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 1,3554186
$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 23,1064981	$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 22,6682829
errore = + 229489	errore = — 4153837
altro errore = — 4153837	
differenza = 4383326	

Facciaſi 4383326 : 229489 :: 1″ : $\frac{229489''}{4383326}$ = 0, 0524″ parte di ſecondo da aggiungerſi al minor valore di $z:c$, onde ne riſulti

$z:c$ =	647876,0524″
log. =	5,8114919
ſottra	5,3144251
log. $z:c$ =	0,4970668
ſottra log.$L:c$ =	1,3100632
log. $z:L$ =	9,1870036

aggiungi log.2 = 0,3010300

log. $z:\frac{1}{2}L$ = 9,4880336

$z:\frac{1}{2}L = CE:CA$ = 0,3076335 (*fig.* 8)

Segue il computo per la ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c$ = 359°,12′,45″	$z:c$ = 359°,12′,46″
in min. ſec. = 1293165″	in min. ſec = 1293166″
log. = 6,1116539	log. = 6,1116542
ſottra 5,3144251	ſottra 5,3144251
log. $z:c$ = 0,7972288	log. $z:c$ = 0,7972291
ſottra 0,3622157	ſottra 0,3622157
log.$z:c$+log.log.e = 0,4350131	log.$z:c$+log.log.e = 0,4350134
$z:c$ log. e = 2,7227837	$z:c$ log. e = 2,7227856
$e^{z:c}$ = 528,1821168	$e^{z:c}$ = 528,1825349
$e^{-z:c}$ = 0,0018933	$e^{-z:c}$ = 0,0018933
$e^{z:c} - e^{-z:c}$ = 528,1802235	$e^{z:c} - e^{-z:c}$ = 528,1825349
log. cof. $z:c$ = 8,1380961	log. cof. $z:c$ = 8,1379437
ſottr. $\frac{1}{2}$log.cof.$L:c$ = 0,7162924	ſottr. $\frac{1}{2}$log.cof.$L:c$ = 0,7162924
4,4218037	7,4216513
ſottra 4,6989700	ſottra 4,6989700
log. $\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 2,7228337	log. $\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 2,7226813
$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 528,2429440	$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 528,0575942
errore = + 627205	errore = — 1249407
altro errore = — 1249407	
differenza = 1876612	

Facciaſi 1876612 : 627205 :: 1″ : $\frac{627205''}{1876612}$ = 0, 3342″ porzione di ſecondo, per cui dee aumentarſi il minor valore di $z:c$, onde ſia

$z:c$ =

$z:c =$ 1293165,3342″
log.= 6,1116540
fottra 5,3144251
log. $z:c =$ 0,7972989
fottra log. $L:c =$ 1,2100632
log. $z:L =$ 9,4871657
aggiun. log. $\frac{7}{2} =$ 0,3010300
log. $z:\frac{7}{2}L =$ 9,7881957
$z:\frac{1}{2}L = c2E:CA =$ 0,6140386 (*fig.* 8.)

Segue il computo per la ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c =$ 525°,30′,11″
in min. ſec.= 1891811″
log.= 6,2768777
fottra 5,3144251
log. $z:c =$ 0,9624526
fottra 0,3622157
log. $z:c$+log.log. $e =$ 0,6002369
$z:c$ log. $e =$ 3,9832440
$e^{z:c} =$ 9621,5265487
fottra $e^{-z:c} =$ 0,0001039
$e^{z:c} - e^{-z:c} =$ 9621,5264448
log. ſen. $z:c =$ 9,3985100
fottr. $\frac{1}{2}$log.cof. $L:c =$ 0,7162924
8,6822176
fottra 4,6989700
log. $\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right) =$ 3,9832476
$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}} =$ 9621,6061947
errore=+ 797499
altro errore = — 1414890
differenza= 2212389

$z:c =$ 525°,30′,12″
in min. ſec.= 1891812″
log.= 6,2768779
fottra 5,3144251
log. $z:c =$ 0,9624528
fottra 0,3622157
log. $z:c$+log.log. $e =$ 0,6002371
$z:c$ log. $e =$ 3,9832459
$e^{z:c} =$ 9621,5685841
$e^{-z:c} =$ 0,0001039
$e^{z:c} - e^{-z:c} =$ 9621,5684902
log. ſen. $z:c =$ 9,3985019
fottr. $\frac{1}{2}$log.cof. $L:c =$ 0,7162924
8,6822095
fottra 4,6989700
log. $\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right) =$ 3,9832395
$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}} =$ 9621,4269912
errore=— 1414890

Facciaſi 2212389 : 797499 ::

$1'' : \frac{797+99''}{2212389} = 0,3605''$ quantità da aggiugnerſi al più picciolo valore dell' angolo $z:c$, onde ci ſi preſenti

$z:c =$	1891811,3605″
log. =	6,2768778
ſottra	5,3144251
log. $z:c =$	0,9624527
ſottra log. $L:c =$	1,3100632
log. $z:L =$	9,6523895
aggiungi log. 2 =	0,3010300
log. $z:\frac{1}{2}L =$	9,9534195
$z:\frac{1}{2}L = C3E:CA =$	0,8982961

(*fig.* 8)

Confermare coll' eſperienza la ſcoperta legge dei ſuoni dei cilindri.

XXXI. Egli è d'uopo confermare coll'eſperienza le verità inſegnate dalla teorica. Do principio dal paragonare inſieme i ſuoni principali, cioè a dire i più gravi di varj cilindri. Feci lavorare tre cilindri d'acciajo *A*, *B*, *C*, ed ordinai, che i due primi foſſero egualmente groſſi, e diverſamente lunghi in ragione di $\sqrt{2} : 1$. Il primo ed il terzo doveano avere uguali le lunghezze, ed ineguali i diametri in proporzione di 4:5. L'Artefice non eſeguì eſattiſſimamente la mia intenzione, e le miſure dei cilindri furono le ſeguenti, che da me s'eſprimono in linee del piede Real di Parigi.

Miſura del cilindro *A*. $D =$ lin. 9, $L =$ lin. 86.
Miſure del cilindro *B*. $D =$ lin. 9, $L =$ lin. 61.
Miſure del cilindro *C*. $D =$ lin. $11\frac{1}{2}$, $L =$ lin. 87.

Differendo i due cilindri *A*, *B* ſolamente nella lunghezza, i loro ſuoni debbono corriſpondersi in ragione inverſa duplicata delle lunghezze, cioè a dire come $(61)^2:(86)^2$, o ſia come 3721 : 7396. Queſto rapporto s'accoſta molto al ſemplice 1 : 2 proprio dell'Ottava, ed il divario con-

fiſte nella proporzione 7396 : 7442, o ſia nella ſiſicamente uguale 161 : 162, metà preſſochè giuſta del Comma 80 : 81. In fatti percoſſi i cilindri A, B, trovai che i loro ſuoni in Ottava un poco calante ſi riferivano.

Giuſta il canone da me ſtabilito i ſuoni dei cilindri A, C debbono ſtare in ragione compoſta, diretta ſemplice dei diametri, ed inverſa duplicata delle lunghezze, vale a dire come $\frac{9}{(86)^2} : \frac{11\frac{1}{2}}{(87)^2}$. Queſta proporzione riduceſi alla ſeguente 68121 : 85054, la quale diſcorda pochiſſimo dalla ſemplice 4 : 5 conveniente alla Terza maggiore. La differenza s'eguaglia al rapporto 8505400 : 8515125, cioè proſſimamente a 875 : 876, undecima parte all'incirca del Comma 80 : 81, minuzia così picciola, che non viene dall'orecchio anche più perito notata. Poſti al confronto i ſuoni dei cilindri A, C, ſi conformarono alla teorica, ed il cilindro più groſſo C reſe un ſuono una Terza maggiore più acuto di quello del cilindro più ſottile A.

XXXII. M'inoltro all'eſame dei ſuoni, che giuſta le varie ſpecie di oſcillazioni un cilindro produce. Feci primieramente tirare con diligenza a martello, e lima un cilindro E d'acciajo, ed indi ne feci gittare un altro F di bronzo, il quale fu poſcia ripulito ſul tornio, e ridotto alla maggior eſattezza, che fu poſſibile. Miſure del cilindro E d'acciajo. D = lin. 6, L = lin. 259. Miſure del cilindro F di bronzo. D = lin. 6, L = lin. 257. $\frac{1}{2}$. Gli volli aſſai ſottili riſpettivamente alle loro lunghezze, e tollerai, che il ſuono loro più grave riuſciſſe muto, perchè ſi rendeſſero ſenſibili i ſuoni acuti, il che non interviene, quando la groſſezza alla lunghezza ha quella proporzione, che ſi ricerca, acciocchè il ſuono principale, e più grave acquiſti corpo, e ſi faccia udire grato al ſenſorio.

Segnai accuratamente i nodi, o punti ſtabili in riguardo alle diverſe ſpecie di vibrazioni, e ſottopoſti a

sì fatti punti i sostegni, si sentirono chiari e distinti i sei primi suoni in ambo i cilindri. Avendo dentro questi limiti ristretto i miei calcoli, non mi sono più oltre dilatato nè pur colle osservazioni. Avverto, che gli scannelli debbono essere rivestiti d'una materia cedente, per esempio di panno. Io mi servj di due funicelle, le quali erano forse un po' troppo dure, e credo che sarebbero meglio riusciti due grossi spaghi. Anche rispettivamente alle corde, mentre si vogliono far suonare divise in parti aliquote, bisogna adoperare degli ostacoli leggeri, e appoggiarli ad uno di que' punti, che separano una parte aliquota dall' altra. Veggasi ciò, che ho scritto in tale proposito ai numeri XX. e XXI. dello Schediasma IV, che tratta *delle vibrazioni delle corde sonore* nella mia Opera *Delle Corde, ovvero Fibre elastiche*.

Accordai all' unisono col suono principale del cilindro *E* d' acciajo una corda divisa in parti 60, ed un' altra corda egualmente lunga, e similmente partita la ridussi all' Ottava alta del suono principale del cilindro *F* di bronzo. Rendeva questo un suono talmente grave, che mettendo con esso all' unisono la predetta corda, avrebbe della sonorità fatto perdita. Per separare dal rimanente quelle porzioni di corda, che sono unisone ai suoni secondo, terzo, quarto ecc. dell' uno, e dell' altro cilindro, ho posto in opera uno scannello, la cui base s' eguaglia ad una porzione sessantesima della corda, ed è distribuita in parti dieci. Con questo artificio s' ottiene la divisione della corda in parti 600.

Nel numero XXVI. ho posto in serie le porzioni della corda 60, che secondo la teorica debbono star all' unisono coi suoni acuti d' un cilindro nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda intera. Questa progressione serve pel cilindro *E* d' acciajo, ed in riguardo al cilindro *F* di bronzo, il cui suono principale è unisono alla corda 120, si hanno da prendere porzioni il doppio lunghe delle mentovate.

Le seguenti due Tavole sono formate da tre colonne. I numeri della prima esprimono le specie delle vibrazioni. La seconda contiene le porzioni della corda 60, che giusto la teorica deggiono corrispondere all'unisono coi suoni acuti dei cilindri. Nella terza si comprendono le parti della stessa corda, che messa in opera la maggior attenzione, si sono trovate unisone ai suoni nominati, prestandomi diligente assistenza il Sig. *Domenico Biancbi* valente organista, ed accuratissimo accordatore di gravicembali.

Porzioni della corda 60 unisone ai suoni acuti del cilindro E d'acciajo nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda 60.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezze delle porzioni giusto la teorica.	Lunghezze delle porzioni giusto l'esperienza.
I.	60	60
II.	21, 75	21, 75
III.	11, 1	11, 15
IV.	6, 717	6, 9
V.	4, 496	4, 7
VI.	3, 219	2, 9

Porzioni della corda 60. unisone ai suoni acuti del cilindro F di bronzo nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda 120.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezze delle porzioni giusto la teorica.	Lunghezze delle porzioni giusto l'esperienza.
I.	120	120
II.	43, 5	43, 5

III.	22, 2	22, 3
IV.	13, 434	13, 6
V.	8, 992	9, 1
VI.	6, 438	6, 7

Per vero dire il cilindro *F* di bronzo era di figura più esatta di quello d'acciajo, ed oltre a ciò di materia più uniforme, ed omogenea, siccome formato per via di fusione. E quindi le sue voci acute con più aggiustatezza di quelle del cilindro *E* d'acciajo s'accomodavano ai tuoni dalla teorica determinati. La maggior differenza in ambo i cilindri s'udiva nel sesto suono, il quale nel cilindro d'acciajo cresceva sopra il corrispondente stabilito dal computo per la ragione 2900 : 3219, o sia prossimamente per qualche cosa meno di 9 : 10, ch'è quanto a dire per un Tuono un poco calante. Al contrario nel cilindro di bronzo il predetto suono calava dall'analogo fissato dal calcolo pel rapporto 6700 : 6438, cioè per una proporzione media fra le due 25 : 24, 26 : 25 esprimente un Semituono minore scarso. I notati opposti divarj danno a conoscere, che se ci fosse un cilindro di perfettissima figura, e composto di materia squisitamente omogenea, renderebbe i suoni esattamente unisoni a quelli, che mi è riuscito di scoprire nella presente Dissertazione.

Determinare la proporzione fra le rigidità dell'acciajo, e del bronzo, dei quali erano composti i cilindri usati nel riferito esperimento.

XXXIII. Non tralascio di determinare la proporzione fra le rigidità dell'acciajo, e del bronzo, ond'erano formati i nostri cilindri. Ho notato nel corollario terzo contenuto nel numero XXV. che mentre due cilindri oscillano similmente, le loro rigidità *r* stanno come $S^2L^4g:D^2$. Essendo il diametro *D* costante in amen-

due i cilindri E, F, le maſſe M ſtanno come Lg, e le rigidità r come S^2L^3M. Il cilindro di bronzo era unisono a parti $91\frac{1}{2}$ della corda 60 unisona al cilindro d'acciajo; e quindi i ſuoni S dei due cilindri d'acciajo, e di bronzo ſi riguardavano nella ragione $91\frac{1}{2}$: 60, o ſia 61 : 40. Ho già detto nel precedente numero XXXI. che le lunghezze L ſerbavano il rapporto $259 : 257\frac{1}{2}$, cioè in numeri interi 518 : 515. Peſò il cilindro E once 25, il cilindro F once 27, e per conſeguenza le maſſe M ſi riferivano nella ragione 25 : 27. Soſtituiti in cambio delle ſpecie analatiche i convenienti valori, troveremo le rigidità dell'acciajo e del bronzo componenti i noſtri cilindri come $(61)^2.(518)^3.25 : (40)^2.(515)^3.27$, o ſia ridotti i computi, come 646485758 59 : 29698029000, proporzione che ſta di mezzo fra le due 24 : 11, 13 : 6, avvicinandoſi per altro più alla prima, che alla ſeconda.

Determinare la proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; acciocchè rendano ſuoni del pari forti, e aggradevoli.

XXXIV. Chiudo la mia fatica collo ſtabilire la ragione fra le lunghezze ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; affinchè rendano ſuoni ugualmente forti, e aggradevoli. I cilindri di metallo, o di creta, i quali compongono uno ſtrumento, ſi percuotono con eguali forze vive, e per conſeguenza oſcillando di pari forze vive fanno l'acquiſto. Collo ſteſſo metodo uſato in riguardo alle corde nello Schediaſma VI. della mia Opera ſopraccitata potrei dimoſtrare, che tali cilindri rendono ſuoni ugualmente forti. Queſti ſuoni in oltre debbono riuſcire del pari aggradevoli, il che dipende dalla proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei varj cilindri, la quale mi accingo ad indagare preſentemente. Qualche ſtrumento da me veduto non s'eſten-

d[illegible] falvo che per due Ottave, ed era formato di cilindri, che differivano solo nella lunghezza. Per verità i cilindri estremi cadevano in difetti opposti; imperciocchè i più gravi erano troppo pieghevoli, e producevano suoni per dir così senza corpo: ed al contrario i più acuti erano troppo grossi, e poco flessibili, dimodochè i loro suoni si sperimentavano ottusi.

Le masse M, m di due cilindri della stessa materia stanno come $LD^2 : ld^2$, e giacchè sono pari le forze vive MV^2, mv^2, si verifica l'analogia $V : v :: \frac{1}{L^{\frac{1}{2}} D} : \frac{1}{l^{\frac{1}{2}} d}$. S'assegni alle velocità la legge perfettamente media fra i limiti stabiliti ne' numeri X. e XI. del citato Schediasma VI. onde s'abbia $V : v :: \frac{1}{T^{\frac{3}{4}}} : \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$, e scopriremo essere $L^{\frac{1}{2}} D : l^{\frac{1}{2}} d :: T^{\frac{3}{4}} : t^{\frac{3}{4}}$, e conseguentemente $L^{\frac{3}{4}} D^{\frac{1}{4}} : l^{\frac{3}{4}} d^{\frac{1}{4}} :: T : t$. C'insegna il corollario 4. contenuto nel numero XXV. che se due cilindri formati della stessa materia si vibrano similmente, stanno i loro suoni come $\frac{D}{L^2} : \frac{d}{l^2}$; ma i tempi delle vibrazioni accettano la ragione inversa dei suoni; dunque $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ e perciò $L^{2:3} D^{4:3} : l^{2:3} d^{4:3} :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ analogia, da cui derivano le due seguenti

$L : l :: D^{7:4} : d^{7:4}$, $D : d :: L^{4:7} : l^{4:7}$. Nel canone de' tempi delle vibrazioni $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ si sostituiscano prima in cambio di L, l, indi in cambio di D, d i valori

lori proporzionali, e ſcopriremo, effettuati i neceſſarj calcoli,
$D : d :: T^{2:5} : t^{2:5}, L : l :: T^{7:10} : t^{7:10}$. Regolate a norma di queſte leggi le dimenſioni dei cilindri, riuſciranno i loro ſuoni egualmente grati all'orecchio.

Stimo bene l'illuſtrare la teorica con un eſempio. Due cilindri ſi corriſpondano in quintupla Ottava, onde ſia $T : t :: 32 : 1 :: 2^5 : 1$. Fatto uſo di tali valori in luogo dei tempi T, t, ci ſi preſenterà $D : d :: 4 : 1$, $L : l :: \sqrt{128} : 1$, o proſſimamente 11, 3137 : 1.

Aſſai proſſima alla preſcelta ſarebbe la legge $V : v :: \frac{1}{T^{1:3}} : \frac{1}{t^{1:3}}$, da cui ſi dedurrebbe $D^2 : d^2 :: L : l$, $D : d :: T^{1:3} : t^{1:3}$, $L : l :: T^{2:3} : t^{2:3}$. La ſua maggiore ſemplicità renderebbe le miſure dei cilindri più facili da conteggiare.

XXXV. Concioſſiachè gli ſtrumenti compoſti di cilindri ſieno di poco uſo, e ſe ne lavorino in picciola quantità, non han potuto gl'induſtrioſi Pratici colle replicate ſperienze condurli a quella perfezione, di cui ſono capaci. Giudico adunque opportuna coſa il diſtendere una tavola, che per lo ſpazio di due Ottave contenga le lunghezze, ed i diametri dei cilindri ſecondo la più perfetta legge $L : l :: T^{7:10} : t^{7:10}$, $D : d :: T^{2:5} : t^{2:5}$. La nominata tavola è formata da ſei colonne. La prima comprende le lettere naturali, e le modificate dal Dieſis, e dal B molle diſpoſte giuſto la ſcala degli uſuali ſtrumenti da taſto, preſa per baſe la lettera C. Nella ſeconda colonna ſtanno diſpoſti i logaritmi dei ſuoni convenienti a ciaſcuna lettera, e temperati ſecondo il metodo da me ſpiegato nel *Saggio ſopra le leggi del Contrappunto* pag. 116. Contiene la terza colonna i logaritmi delle lunghezze dei cilindri componenti la detta ſcala, i quali battuti con forze vive uguali, hanno da produr ſuoni, che riescano egualmente grati all'udito.

Si veggono collocate ordinatamente nella quarta colonna le lunghezze d'essi cilindri. Seguono finalmente le colonne quinta, e sesta, e sono registrati in quella i logaritmi dei diametri dei nostri cilindri, in questa le misure dei diametri stessi. Le colonne principali rispettivamente alle presenti ricerche sono la quarta, e la sesta, in grazia della determinazion delle quali ho posto le colonne seconda, terza, e quinta.

Ecco il metodo da me tenuto per determinare le colonne quarta, e sesta. Sia l la lunghezza d' un cilindro, d il diametro, t il tempo d'una vibrazione, n il numero delle vibrazioni fatte in tempo dato, o sia il suono d'esso cilindro. Ho provato nel precedente numero XXXIV. dover esser l come $t^{7:10}$: ma t come $= 1:n$; dunque l come $\frac{1}{n^{7:10}}$, e passando dall'analogia all'equazione, $l = \frac{L}{n^{7:10}}$. L è una costante da determinarsi in progresso. Dai numeri faccio tranfito ai logaritmi, e mi si presenta la formola log. $l =$ log. $L - \frac{7}{10}$ log. n. Serve questa per istabilire il valore della costante L. Il logaritmo del suono n prodotto dal cilindro C base dello strumento s'eguaglia a nulla; dunque in tal caso log. $l.$ $=$ log. L, e per conseguenza $l = L$, cioè a dire la costante L uguale alla lunghezza l del cilindro C base dello strumento, la quale si suppone nella mia tavola divisa in parti 10000. Si troverà pertanto il logaritmo della lunghezza l d'un cilindro detraendo dal log. L, o sia dal logaritmo del numero 10000 le sette decime parti del logaritmo del suono, che il detto cilindro deve produrre. Determinato così log. l, le tavole dei logaritmi mi additano il valore della lunghezza cercata l.

In riguardo ai diametri dei cilindri ho dimostrato esfere d come $t^{2:5}$, come $\frac{1}{n^{2:5}}$. Quindi ne nascono le for-

mole $d = \frac{D}{n^{\frac{2}{5}}}$, log. d = log. $D - \frac{2}{5}$ log. n. D è il diametro del cilindro C baſe dello ſtrumento, che ſuppongo diviſo in parti 1000. Sottratte dal log. 1000 le due quinte parti del logaritmo del ſuono n, che dee rendere il cilindro, ne riſulterà il logaritmo del diametro d, la di cui miſura relativa a quella del diametro D competente al cilindro C verrà reſa nota dalle tavole logaritmiche.

Sarà facile l'ampliare la ſeguente tavola alle tre, alle quattro, alle cinque Ottave, valendoſi della regola del tre. Quella ſteſſa proporzione, che ha C, la cui lunghezza 10000, a C^d, la cui lunghezza 9640, la ſerba parimente C, la cui lunghezza 3789, a C^d, che poſta in uſo la nominata regola, ſi troverà lungo 3653. Con pari metodo ſi ſcoprirà il diametro del detto C^d 562, e ſi paſſerà poſcia a ſtabilire le dimenſioni di D, di E^b, di E ecc.

Sebbene poteva baſtare il dilatar la tavola ad una ſola Ottava. Determinato il ſecondo C, che in relazione al primo è lungo 6156, groſſo 758, ſi prendano per date le mentovate miſure, e dividendo la lunghezza in parti 10000, il diametro in parti 1000, chiaramente ſi ſcoprirà, che la diſtribuzione della prima Ottava ſerve altresì per la ſeconda, e per tutte l'altre, che ſeguono.

Per valerſi utilmente della noſtra tavola, fra varj cilindri pari di diametro, e diverſi di lunghezza biſogna ſcegliere quello, che rende un ſuono vigoroſo e chiaro, eſcluſi gli altri, che o per eſſere troppo lunghi riſpettivamente alla groſſezza producono un ſuono ſnervato, e ſenza corpo, o per eſſere troppo corti tramandano un ſuono muto, ed ottuſo. Se il cilindro preſcelto ſi trova uniſono col C baſe d'uno ſtrumento coriſta, s'intenda diviſa la ſua lunghezza in parti 10000, il ſuono diametro in parti 1000, ed in relazione a tali diviſioni ſi

ſtabiliſcano le miſure dei cilindri più acuti a norma della mia tavola. Che ſe lo ſteſſo cilindro foſſe uniſono ad un altro ſuono per eſempio *A* della prima Ottava; dovendo eſſere giuſto la tavola la lunghezza d'un tal cilindro 6965, ed il diametro 813; ſi concepiſcano diſtribuiti la lunghezza, ed il diametro nei detti numeri di parti 6965, 813, ed in riguardo a sì fatti compartimenti ſi determinino coll'ajuto della mia tavola le dimenſioni dei cilindri più gravi, e più acuti del dato cilindro *A*.

Se la lunghezza, ed il diametro del cilindro preſcelto foſſero dati eſempigrazia in linee, ſi potranno trovare le miſure degli altri cilindri eſpreſſe parimente in linee col mezzo della regola del tre. Sieno cogniti in linee la lunghezza, ed il diametro del cilindro *A* appartenente alla prima Ottava, e ſi voglia ſapere di quante linee debbono eſſer compoſti la lunghezza, ed il diametro del cilindro *C* baſe dello ſtrumento. Si faccia come la lunghezza del cilindro *A* a quella del cilindro *C* notate nella mia tavola, cioè come 6965 a 10000, così il numero di linee, che formano la lunghezza del cilindro *A*, al quarto termine proporzionale, il quale s'eguaglierà al numero delle linee, che hanno da formare la lunghezza del cilindro *C*. Non altrimenti ſe faremo come 813 a 1000 diametri, che la mia tavola aſſegna ai cilindri *A*, *C*, così il numero delle linee, onde conſta il diametro del cilindro *A*, al quarto termine proporzionale; pareggerà queſto il numero delle linee componenti il diametro cercato del cilindro *C*.

In uno ſtrumento lavorato ſecondo il mio metodo gli ſcannelli ſu i quali s' appoggiano i cilindri, e che debbono ſtare ſotto i loro circoli d'ammortimento, hanno ad eſſere di figura curva, la quale facilmente ſi deſcrive, eſſendo nota dei mentovati circoli la poſizione.

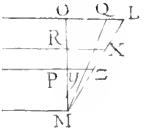
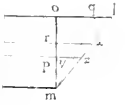
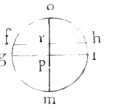


Fig. 1





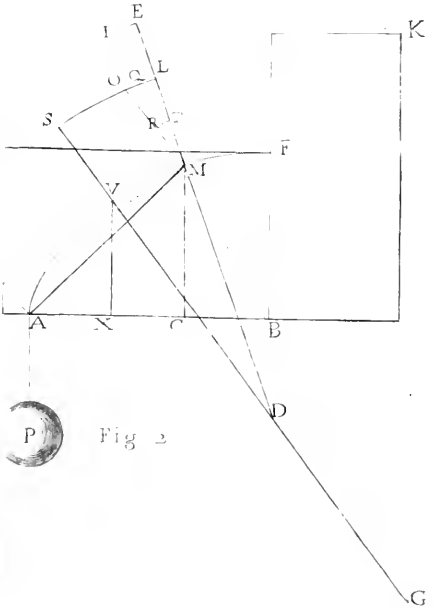
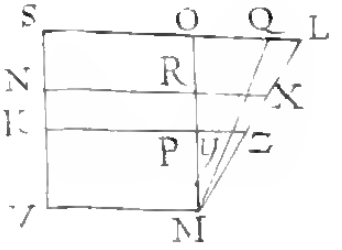


Fig. 2



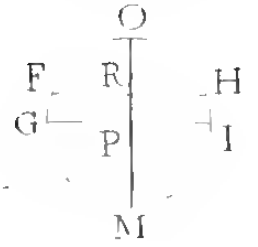
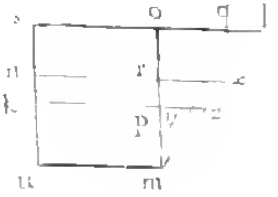
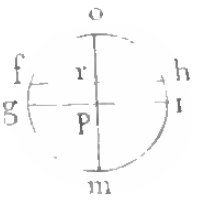


Fig. 1





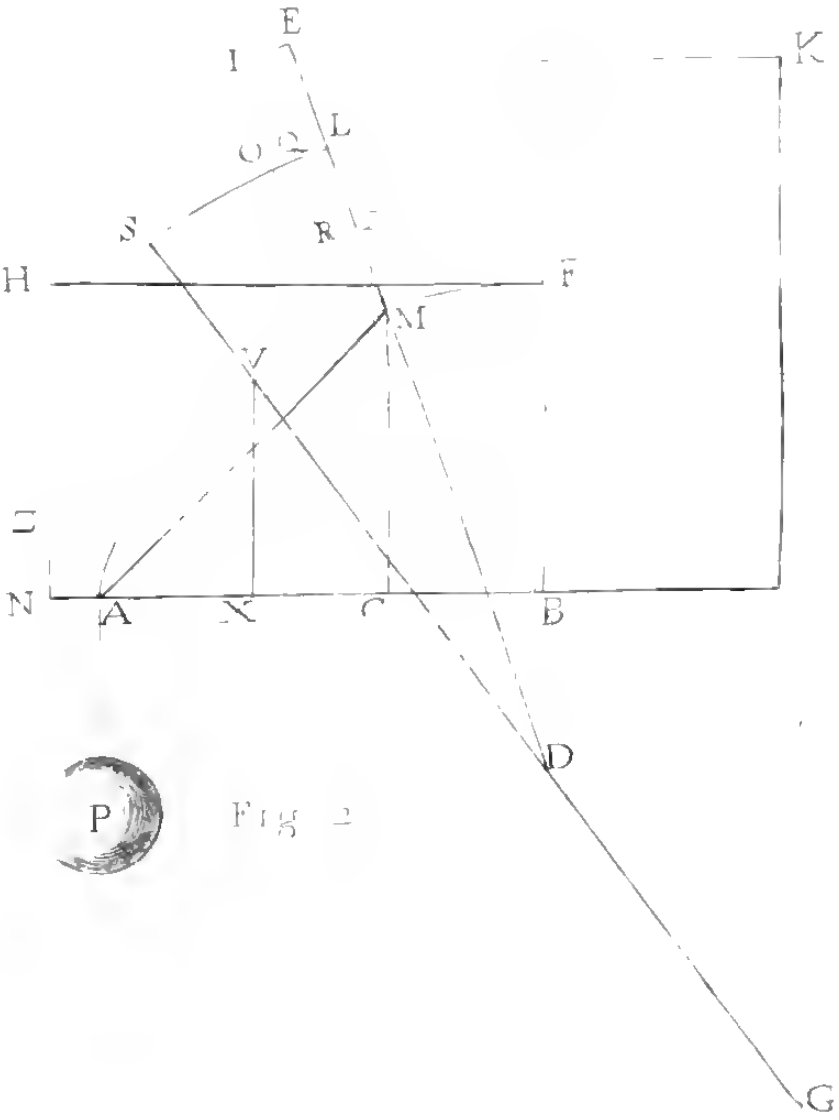


Fig. 2

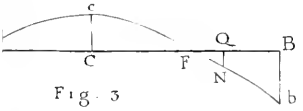


Fig. 3

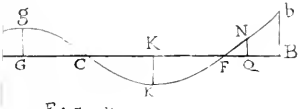


Fig. 4

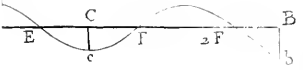


Fig. 5

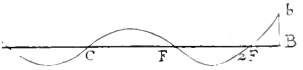


Fig. 6

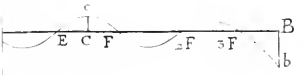


Fig. 7

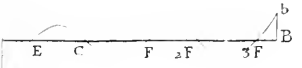


Fig. 8.

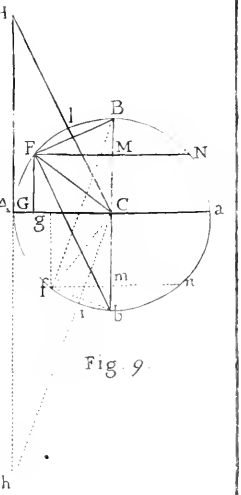


Fig. 9

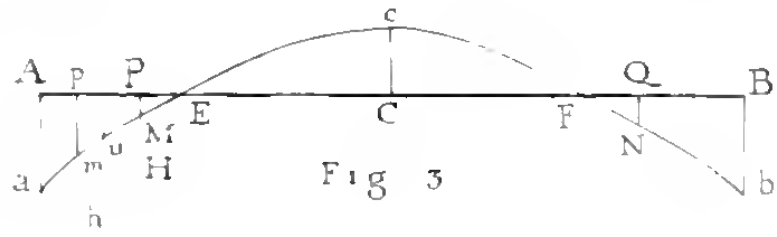


Fig 3

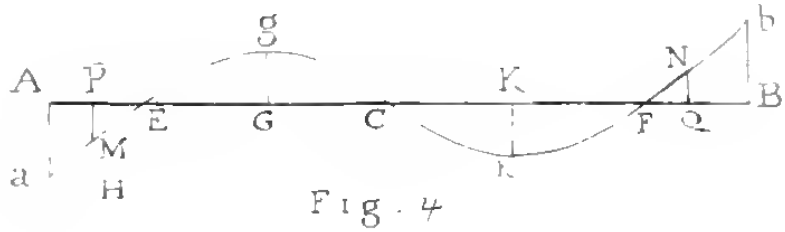


Fig 4

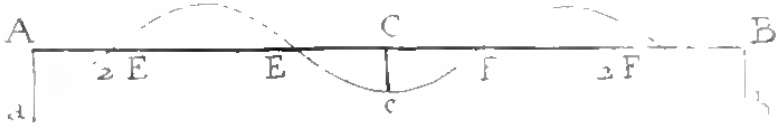


Fig 5

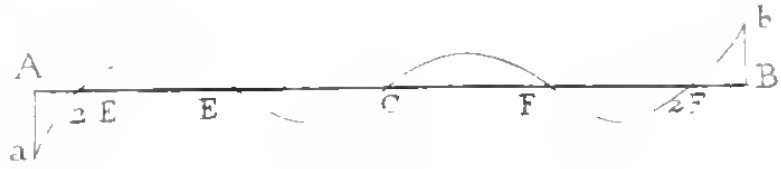


Fig 6

Fig 7

Fig 8

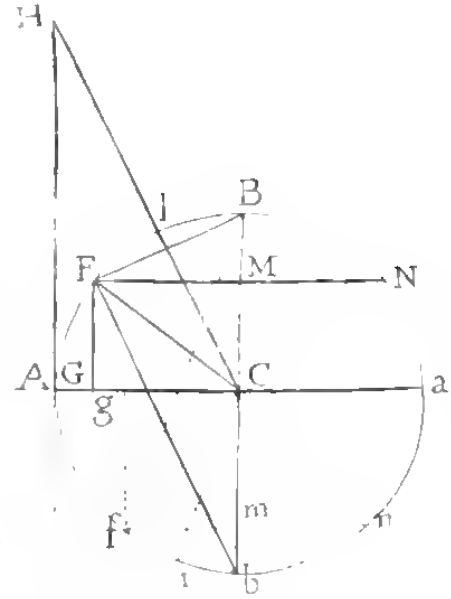


Fig 9

h

Lunghezze, e diametri dei cilindri per l' estensione di due Ottave temperate giusta il mio metodo.

	Logaritmi dei suoni.	Log. delle lunghezze dei cilindri	Lunghezze dei cilindri.	Log. dei diametri dei cilin.	Diametri dei cilindri.
C	0,0000000	4,0000000	10000	3,0000000	1000
C♯	0,0227556	3,9840711	9640 —	2,9908978	979 +
D	0,0492448	3,9655261	9237 —	2,9803006	956 —
E♭	0,0757412	3,9469812	8851 —	2,9697035	933 —
E	0,0984968	3,9310522	8532 +	2,9606013	913 +
F	0,1258908	3,9118764	8163 $\frac{1}{2}$	2,9496437	891 —
F♯	0,1481958	3,8962629	7875 +	2,9407217	872 +
G	0,1751392	3,8774026	7540 $\frac{1}{2}$	2,9299443	851 +
G♯	0,1983454	3,8611582	7264 —	2,9206618	833 +
A	0,2243876	3,8429287	6965 +	2,9102450	813 +
B♭	0,2513310	3,8240683	6669 +	2,8994676	793 +
B	0,2736360	3,8084548	6434 —	2,8905456	777 +
C	0,3010300	3,7892790	6156 —	2,8795880	758 —
C♯	0,3237856	3,7733501	5934 +	2,8705650	742 +
D	0,3502784	3,7548051	5636 —	2,8598886	724 +
E♭	0,3767712	3,7362602	5448 +	2,8492915	707 —
E	0,3995268	3,7203312	5252 +	2,8401893	692 +
F	0,4269208	3,7011554	5025 +	2,8292317	675 —
F♯	0,4492258	3,6855419	4848 —	2,8203097	661 +
G	0,4761692	3,6666816	4642 —	2,8095323	645 —
G♯	0,4993754	3,6504372	4471 +	2,8002498	631 +
A	0,5254176	3,6322077	4288 —	2,7898330	616 +
B♭	0,5523610	3,6133473	4105 +	2,7790556	601 +
B	0,5746660	3,5977338	3961 —	2,7701336	589 +
C	0,6020600	3,5785580	3789 +	2,7591760	574 +

OSSERVAZIONI
ED ESPERIMENTI

Sopra la Scompoſizione del Sale ammoniaco per mezzo della Calce terrea.

Del Sig. CONTE DI SALUZZO.

1. SOno a tutti note le ſingolari alterazioni, che arreca la calce al ſale ammoniaco, cioè la coſtante forma fluida, in cui s' ottiene l' alcali volatile; la riguardevole ſua cauſticità; la ſua ineſſerveſcibilità cogli acidi; ed un abbondantiſſimo ſviluppamento di vapori, che accompagnano queſta ſcompoſizione, dotati di tanta elaſticità, che ſe non ſi uſino le maggiori cautele, ne ſegue lo ſcoppio de' vaſi, ne' quali ſi fa l' operazione.

2. Varie ſin qui ſono ſtate le opinioni intorno alla cauſa de' riferiti fenomeni; ma quella dell' inſigne Sig. *Duhamel* era fra tutte la più diſtinta, perchè appoggiata ad una diligente ſerie di ben inteſi eſperimenti. Avea queſto valoroſo Accademico riuniti a ſuo favore i ſuffragi de' più illuminati coltivatori della naturale Filoſofia, ed erano attribuiti queſti effetti alla ſofferta modificazione della parte infiammabile di queſta ſoſtanza ſalina dall' azione cauſtica della calce, e dalla diſſoluzione dell' alcali volatile nell' acqua contenuta in queſta combinazione.

3. Prevale però al dì d' oggi una nuova dottrina, ch' è dipendente da quella che fa il fondamento della

teoria della causticità ingegnosamente prodotta dal celebre Sig. *Black*.

4. Mio assunto è pertanto l' esaminare di nuovo la vera causa delle sopraccennate alterazioni, e dovrà l' esperienza decidere una così importante ed intricata quistione.

5. Il valente Chimico Sig. *Bucquet* entrato anch' esso in sospetto contro l' azione esclusivamente in questo sistema ascritta alla privazione totale d' aria fissa nella calce viva per produrre i narrati effetti sul sale ammoniaco, ha fatto varj ingegnosi esperimenti. Mi sono singolarmente con esso incontrato in quello, con cui direttamente ha esplorata l' influenza da assegnarsi alla presenza dell' aria fissa suddetta, al dì d' oggi conosciuta e compresa sagacissimamente nella classe dei gaz (*a*) dal celebre Autore del Dizionario di Chimica Sig. *Macquer*; ma non pertanto può fondatamente dirsi appieno esausto l' argomento, mentre senza verun esperimento diretto passa a conchiudere a favore d' una causa mista, cioè dell' azione combinata del principio acquoso coll' aria fissa o gaz cretaceo (*gàs crayeux*) o mofetico.

6. Era questa parte d' un mio lavoro molto più esteso su questo soggetto rimodernato già compiuta da molto tempo, allorchè mi venne alle mani il IX. Vol. *delle Mem. presentate all' Accademia di Parigi*, nel quale trovasi la bellissima dissertazione del Sig. *Bucquet*; ma quantunque vi abbia incontrato una piacevole conformità d' idee su varj punti, ho avuta la soddisfazione di vedere, ch' era io avanzato assai più oltre proccurando di sviluppare l' oscura causa delle effervescenze, e di altri punti molto interessanti.

7. Sono le effervescenze generalmente attribuite allo

(*a*) Questo valorosissimo chimico ha ordinato sotto il vocabolo generale di gaz tutti i fluidi aeriformi sinqui conosciuti per meglio distinguerli, e contrassegnarne i caratteri specifici.

ſprigionamento d' un fluido elaſtico ; ma ſi riconoſcerà evidentemente che l' eſpulſione dei gaz non è che un effetto, il quale rende manifeſta la cauſa di quanto ſuccede in quelle circoſtanze ; cioè allor quando da una forza eſterna alla ſoſtanza paſſiva ſi giunge a ſuperare la forza di contatto, che trovaſi tra le parti della medeſima ſoſtanza, e ſe ne proccura la diviſione, e l' uniforme diſtribuzione colle parti del fluido , che eſercita la ſua attività: ſe dunque trovanſi de' principj volatili nelle ſoſtanze di cui ſi proccura la combinazione, dovranno eſſi neceſſariamente venire eſpulſi in ragione dell' attività, colla quale opera il menſtruo, e della reazione delle forze particolari, di cui ſono dotate le parti della ſoſtanza; e queſta eſpulſione non ſarà che un effetto neceſſario, e concomitante delle alterazioni prodotte reciprocamente nelle parti delle materie combinate.

8. Non mi eſtenderò anticipatamente in teoriche riflеſſioni ; e per iſchivare una faſtidioſa ripetizione degli apparecchj onde ſoglio far uſo da più di venticinque anni in tutte le operazioni, nelle quali ſi ſviluppano vapori di grande elaſticità, ne deſcriverò (*Tav. I. fig. I*) qui uno de' principali; quello di cui mi ſono ſempre ſervito per la ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce, il quale non molto differiſce dall' apparecchio che ſoglio impiegare per l' acido nitroſo fumante (*fig. II*) e per lo ſpirito di ſale, e che avuti i debiti riguardi ſerve ottimamente in tutte le ſperienze della produzione de' fluidi aeriformi, oſſia gaz . Debbo però confeſſare, che non m'è mai venuto in mente che la combinazione, che ſi trova negli apparecchj di queſta ſpecie, poteſſe far epoca nella ſtoria de' progreſſi delle umane cognizioni , e che doveſſe un dì fiſſare l' attenzione de' Filoſofi , parendomi che da qualunque Fiſico avvezzo ad oſſervare e ſperimentare , ſe ne poteſſe facilmente immaginare, e promovere l' uſo; dalla deſcri-

zione

zione de' miei si potrà raccogliere, considerandoli con imparzialità, se debbo anch'io attribuirne l'idea al Sig. *Woulfe*, come fa il Sig. *Prieſtley*, e qualche altro.

9. Le storte *AA*, che io soglio adoperare per queste sperienze, hanno l'estremità del loro collo *BB* fatto a forma di cono, perchè possano facilmente insinuarsi, ed essere lutate nei tubi di comunicazione *CC*, che per la stessa ragione dalla parte per cui vengono insinuati nei tubetti *H* dei palloni *X* hanno una figura conica.

10. Questi miei palloni *XX* hanno ciascuno diversi di questi tubetti *HH* in differenti ed opposte direzioni; poichè in alcuno di essi v'è adattato con luto un tubo di comunicazione *RR*; in alcun altro evvi solidamente fissato con tenace mastice un cannello a chiave di ottone *Y*, il di cui foro interno è coperto da un tubo di vetro, che difende il sottoposto ottone dall'azione dissolvente dei vapori acidi od alcalini che per esso si traducono. La chiave *K* di un tal cannello è di avorio o di corno, e meglio anche di un metallico serve un cannello tutto di cristallo.

11. Dall'estremità di questo cannello *Y* parte un tubo di cristallo *MM*, il di cui braccio più lungo discende e penetra pel coperchio nel vase cilindrico *SS* fino quasi a toccare il fondo del medesimo, affinchè i fluidi aeriformi che passano per il tubo *MM* abbiano ad attraversare un altro strato di liquore contenuto nel vase *SS*, il quale a questo oggetto deve essere molto alto.

12. Oltre a ciò, questo vase ha un coperchio traforato da più fori, in ciascuno de' quali è insinuato a tenuta d'aria un tubo ricurvo di vetro *OO*, che penetra nel rispettivo vase cilindrico *TT*. Ognuno dei vasi cilindrici, le di cui capacità sono relative alla qualità dei liquori, di cui sono ripieni, ha un coperchio a tenuta d'aria, il quale oltre al foro, per cui s'introduce il tubo *OO*, ha un cannello a chiave, al di cui collo è legata una vescica *P*.

13. Il liquore, di cui faccio uso per questo apparato, e di cui riempio i vasi *TT*, *SS*, è principalmente l' acqua distillata, onde riempio il recipiente più grande *SS*, ch' io chiamo il recipiente principale, poichè questo fluido è il più innocente feltro pe' vapori aeriformi. Negli altri vasi *TT* ecc. soglio versare dell' acido nitroso concentrato, dell' olio di vitriolo, dell' acido marino, dell' acido acetoso concentrato, dell' olio di tartaro, del liquor caustico ecc.

Ne' liquori acidi ho avuto sempre l' avvertenza di porre una foglia d' oro, perchè m' è nato lo scrupolo, che nell' atto della scomposizione del sale ammoniaco colla calce si esali dell' acido marino sotto forma vaporosa per la poca aderenza, ch' egli ha colle terre calcaree, e per la grandissima sua affinità coll' acqua specialmente, perchè la scomposizione suddetta è sempre accompagnata da notabile calore, e dall' elastica espulsione dell' alcali volatile.

Al tubetto superiore *H* del pallone *X* è fissato il tubo di comunicazione *RR*, che si unisce al cannello *G* fissato nella sommità della campana *LL*, la quale ripiena d' acqua è immersa in un vase *II* parimenti ripieno d' acqua (*b*).

(*b*) Siccome in tutte le operazioni, che diremo Chimico-fisiche, sempre si fa un vuoto più o meno notabile nelle capacità principali, cioè in quelle nelle quali debbono seguire le scomposizioni o combinazioni, qualunque sia il modo o per via umida o secca, o finalmente per una via mista, e sia o nò impiegato il sussidio del fuoco; così due condizioni hanno da riempiere gli apparecchi, quella cioè di ammettere l' aria, e gli altri fluidi espulsi; e quella di restituire alle capacità vuote l' aria slatane scacciata. Ma dovendo determinare se il fluido raccolto eccede l' aria espulsa, e giudicare con sicurezza, se siasi fatta produzione di fluido aeriforme costante, sarà il mezzo più sicuro, e più pronto quello di far passare dai recipienti colle dovute cautele il rispettivo gaz entro ad una campana piena d'acqua, la quale abbassandosi fino al livello sia sufficiente a contenerlo tutto; e quindi da questa sia stabilita una comunicazione col pallone al tubo di comunicazione *RR* superiore o altrimenti; sicchè finita l'elastica espulsione, ed aperta questa comunicazione si riassorba dalle capacità vuote il fluido contenuto nel-

L'apparato rappresentato nella fig. II. non è molto diverso da quello della fig. I., ed è pure simile a quello della fig. I. Tav. II., poichè non sono che leggere differenze le modificazioni, che vi si scorgono, talchè stimo inutile il farne minuta descrizione, bastando una semplice osservazione delle tavole, onde comprendere la moltiplicità ed estensione degli usi.

14. Tutte le cose descritte potranno comparire a prima vista minute e soverchie; ma non sarà questo giudizio chi è solito a far frequenti operazioni di tal natura. Premesse pertanto siffatte materiali notizie passerò a dare contezza del seguito esame, rimettendo sotto gli occhi de' rispettabili Accademici, che la privazione d'aria fissa supposta nella calce viene assegnata per unica cagione della sua causticità (poichè si prende dimostrata questa privazione dal non ottenersi effervescenza almeno notabile, nel combinarsi la calce viva cogli acidi, qualvolta sia ella buona e ben cotta); nè altrimenti si spiega la causticità della pietra caustica, dell' alcali fisso caustico in forma fluida, dello spirito volatile caustico ecc.

15. Si potrebbe speditamente troncare la difficoltà per provare l'insussistenza del raziocinio riguardo allo spirito volatile caustico, dicendo, che la calce che deve impiegarsi per ottenerlo non è viva, e perciò in circostanze del tubo diverse dalle supposte: tanto più che effervescente quanto mai è la calce estinta; ma non sarò per prevalermene, e comincerò dall' esame di ciò, che avviene colle accennate sostanze nello stato di massima causticità.

la Campana; e dal riempiersi o nò di nuovo d'acqua la Campana suddetta si abbia sicuro riscontro dell' avvenuto: non essendovi altra differenza fra questi apparecchi, salvo che questo è veramente più dimostrativo: riesce però un po' più fastidioso, ma serve più acconciamente per quelle operazioni nelle quali il gaz è filtrato da' recipienti comunicati insieme, come nelle operazioni degli acidi nitroso e marino. *Tav. II. Fig. I.*

16. Prendasi adunque della miglior calce uscita appena dal fuoco; si lasci raffreddare, ed in un mortajo alcun poco riscaldato la si faccia in pezzi, de' quali fatta scelta de' più grossi s' immergano questi nell' acqua forte; poco o nulla si vedrà uscire di bollicine dalla medesima; e mentre si fa questa osservazione si pestino prestamente alcuni altri pezzi, e se ne getti la polvere a poco a poco nell' acido suddetto. Si vedrà tanto maggiore l' effervescenza quanto più minutamente stritolata e polverizzata è la calce (*c*).

17. Ciò che succede con la calce viva più manifestamente avviene con la pietra caustica, e col vetro siliceo; mentre l' acqua forte stessa, la qual non dà il menomo segno d' azione sopra queste materie, quando sono in grossi pezzi, per poco che sia concentrata, coll' aggiunta a poco a poco d' alcune gocce d' acqua, manifesta una sensibile effervescenza, la quale diventa notabilissima tosto che le materie sopraddette sieno ridotte in fina polvere.

18. Non ostante l' opinione generale dell' inefferveſcenza di queste materie cogli acidi, mi pare che sarebbe stato almeno prudente di diffidarne, ponendo mente che (*d*) in altre circostanze si è dimostrato con esperimenti ingegnosissimi, che i gaz risultano dalla scomposizione degli acidi; così la privazione di gaz in quelle sostanze dovrebbe a mio giudizio essere cagione d' una effervescenza più viva, perchè la tendenza e avidità, per così dire, delle sostanze a ripigliare i principj, onde sono state spogliate, deve essere in ragione dell' affinità,

---

(*c*) Soglio preferire l' acqua forte all' acido più concentrato, e specialmente all' acido vitriolico, perchè sono più sensibili questi effetti.

(*d*) Ecco come si esprime il valoroso Sig. *Lavoisier* in una sua Memoria sopra l' esistenza dell' aria nell' acido nitroso (Mem. dell'Accad. per l' anno 1776. p. 672.) *Non è dal metallo, che provengono queste differenti specie d' aria, come avrò molte occasioni di farlo vedere; esse sono dovute alla scomposizione dell' acido stesso ecc.*

che queſti medeſimi principj avevano colle altre parti del miſto, e della maggior eſpulſione, che ſe n'è fatta.

19. Da queſte ſperienze ſempliciſſime mi pare dimoſtrato che le effervescenze non dipendono dalla preeſiſtenza dei gaz o dell'aria nelle materie, che affettano queſto movimento cogli acidi; ma un nuovo fatto farà riprova della verità di queſto principio. Si prenda del vetro ſiliceo, il quale non contiene alcun gaz; ſi peſti ſottilmente in un mortajo riſcaldato, e vi ſi verſi ſopra dell'alcali volatile cauſtico non effervescente: ſi farà nel momento del contatto un'effervescenza uguale a quella, che può fare il miglior acido coll'alcali fiſſo. Nelle ſteſſe circoſtanze ha luogo lo ſteſſo fenomeno fra queſt'alcali volatile, e la pietra cauſtica; e medeſimamente la calce viva; tutta la differenza conſiſte nel grado di attività, quella col vetro ſiliceo eſſendo la più violenta, e quella con la pietra cauſtica ſuperando quella della maggior calce.

20. Quantunque io ammetta l'eſiſtenza d'un acido nello ſpirito volatile cauſtico, come avrò occaſione di dimoſtrarlo in progreſſo, farà però ſempre vero, che lo ſpirito volatile ben fatto è reputato ineffervescente cogli acidi; e che da tutti ſi crede che la ſua ineffervescibilità ſia dovuta alla mancanza di gaz; che il vetro ſiliceo in groſſi pezzi non è effervescente, e che dal celebre Sig. *Bergmann* ſi dice ſpoglio di gaz; che la pietra cauſtica finalmente e la calce viva ſono riconoſciute per ſoſtanze ineffervescenti cogli acidi. Forz'è dunque conchiudere, che non è allo ſviluppamento dell'aria nè di un gaz pneumatico, che ſi debbono attribuire le effervescenze. Ma ecco ancora nuovi fatti che avvalorano queſta verità.

21. Se ſi combini della calce viva (la quale in groſſi pezzi non è effervescente) con uguale quantità di ſpirito volatile parimenti ineffervescente entro una ſtorta di vetro, e ſe ne faccia la diſtillazione, impiegando un

tubo di barometro col mercurio per accertarsi, che non si fa alcun assorbimento dell'aria contenuta nelle capacità, o qualche altro mezzo per assicurarsene; come pure perchè non resti sospetto sul perfetto suggellamento dell'apparecchio; dopo che saranno passati i vapori elastici nel recipiente, l'aria sarà riassorta, e quando la calce comparirà quasi sfogliata e bianchissima, e non passerà più cosa alcuna, lasciato cadere il fuoco, e raffreddata a vasi chiusi, se la si cimenti cogli acidi, manifesterà ella l'eminente proprietà, ch' avrà acquistato di far effervescenza eziandio collo spirito d'aceto; se invece d'impiegare della calce si coobi lo spirito volatile ineffervescente sopra la pietra caustica o sopra il vetro siliceo pestato, in un simile apparecchio, sarà lo spirito volatile, che sarà divenuto incomparabilmente più potente e più volatile, e fatto sommamente effervescente. Ecco qui altre sostanze reputate prive di gaz perchè non fanno effervescenza cogli acidi, le quali dopo di essere combinate tra di sè sono grandemente effervescenti.

22. Parmi conveniente di osservare, che non ostante che non si faccia altro in queste operazioni, che una concentrazione di liquori, la volatilità de' vapori e l'elasticità loro produce un vuoto nella storta; e non mancherebbe di farsi un assorbimento se s'impiegassero apparecchj a feltro (*e*). Ma in questo caso basterebbe separare la parte dell'apparecchio, la quale è unita al pallone, e adattare al cannello a chiave successivamente le vesciche che sono state riempiute di gaz. Comunque ciò segua, è questo gaz soggetto alle stesse affezioni di tutti gli altri fluidi aeriformi nitroso, marino, e degli altri riferiti dal Sig. *Macquer*; cioè essendo essi ridotti

(*e*) Per apparecchio a feltro intendo qualunque apparecchio, col quale si proccuri il dilavamento dei gaz entro qualche liquore.

al minimo dell'acqua neceſſaria alla loro eſſenza ſalina, e conſeguentemente nel maſſimo grado di concentrazione, acquiſtano l'apparenza aeriforme. Non mi tratterrò per ora ſull' importante ſingolarità delle effervescenze delle riferite ſoſtanze fra loro, baſtandomi di richiamarle dopo di aver reſo conto d'alcuni altri fenomeni, che non ſono ancora ſtati oſſervati, e da' quali ſi ricava la prova della verità di queſti riſultati, ſomminiſtrandoci lo ſcioglimento di molte importantiſſime verità.

23. Ho già oſſervato nel §. 5. che i Fiſici ſull'autorità del dotto Sig. *Black* aſſegnano per cauſa della cauſticità di alcune ſoſtanze la ſola privazione totale dell' aria fiſſa o del gaz mefitico; ed ha per verità queſto valente Ingleſe ſagacemente appoggiata la ſua teorica alle ſperienze, che ha fatto ſulla calce terrea. Il Sig. *Macquer* col Sig. *Lavoiſier* e molti altri Filoſofi del primo ordine hanno abbracciata queſta ſteſſa dottrina; ma raccogliendo e combinando i ſentimenti ſparſi ne' varj articoli del Dizionario di Chimica, ſembra che l'illuminato Autore colla ſolita ſua avvedutezza riguardi l' eſpulſione di queſti fluidi elaſtici, oſſia gaz, come un fenomeno inſeparabile dall'azione, che produce la cauſticità. In fatti egli è fuori di dubbio, che queſta circoſtanza non può non aver luogo nella maniera d' eſſere in cui ſi riduce un corpo, per poter quindi eſercitare quella forza reciproca, da cui prende anima la natura, e che è eſpreſſa in una maniera energica da' varj effetti, che ella ad ogni paſſo ci offeriſce; forza già da gran tempo riferita da' Geometri alla gravitazione univerſale, e che conſiſte nella maggiore o minore omogeneità, che ſi procura tra le parti della materia.

24. Queſto effetto dunque non mi pare che una circoſtanza concomitante da cui può derivare una diſpoſizione più favorevole alla materia per manifeſtare gli ef-

ſetti della cauſticità (*f*), ſempre che le altre circoſtanze vi concorrano; ma la ſerie delle ſperienze, che comincerò a dare in queſto Saggio, mi ſembrano baſtanti per convincerci dell'eſiſtenza d'un principio poſitivo ridotto ad uno ſtato di perfetta inerzia, ſin che non è eccitato dalla reſtituzione del principio acquoſo del quale egli è ſtato intieramente ſpogliato in certa ſpecie di ſoſtanze cauſtiche. (*g*)

25. Sono tanto più diſpoſto a ſeguire queſta mia opinione, da me già annunciata nella prima parte d' una Memoria ſopra il *ſal nitro* (*h*), quanto che eſſa non mi allontana dalle idee luminoſe del Sig. *Macquer*, e da quelle del detto Sig. *Lavoiſier*. Il primo parlando della fuſibilità, che le terre calcaree (*i*) procurano alle ſabbie, e alle argille, ſi ſpiega in queſti termini: *queſto fenomeno, del quale la cauſa è molto oſcura e difficile a rinvenirſi, pare che dipenda da una diſpoſizione particolare del principio infiammabile, e forſe da un' ultima porzione del principio acquoſo;* e la ſua opinione intorno ai gaz aeriformi è, *che le ſoſtanze ſaline* (*l*) *acide o alcaline in queſto ultimo grado di concentrazione hanno una*

(*f*) Dall'eſpulſione di molti principj eterogenei delle materie ſottopoſte a violente operazioni naſce per neceſſaria conſeguenza una più o meno perfetta omogeneità fra le parti, che rimangono, e ſi fa tra eſſe un maggior adattamento. Da queſta più grande ſemplicità riſulta manifeſtamente un'affezione paſſiva, che procura alle ſoſtanze una maggior forza per attrarre e combinarſi co' principj, co' quali ſi mettono in contatto. Laonde può eſſere attiva la tendenza alla combinazione in certe ſoſtanze, ed affatto paſſiva in altre, come appunto nella calce viva, ed altre ſimili, nelle quali tuttavia farei per ſoſpettare non ſenza fondamento, che rimaneſſero ancora alcuni principj eterogenei, ma ridotti per l'eſtrema concentrazione ad uno ſtato di totale inerzia.

(*g*) Non credo di potermi diſpenſare dal diſtinguere i cauſtici in attivi, e paſſivi.

(*h*) Queſta Memoria non ha potuto eſſere ammeſſa al concorſo per eſſere giunta troppo tardi; ma è ſtata però ritenuta.

(*i*) V. queſt' articolo alla p. 71. *Tom.* 4.

(*l*) V. l'artic: gaz alcali volatile alla p. 30.

una tendenza estrema a combinarsi in generale con un gran numero di altre sostanze, e particolarmente coll'acqua: questi punti di vista, convien dirlo, sono grandi, luminosi, e degni della reputazione del loro Autore.

26. Non debbo ommettere di rendere anche la giustizia dovuta alla superiorità de' talenti, ed alle cognizioni del dotto Sig. *Lavoisier*, il cui ingegno si manifesta in tutte le sue opere. Parlando questo Autore dell' aria o del gaz nitroso, dice ch' egli è *l' acido spoglio d' aria e d' acqua*; ch' è quanto dire un acido reso inerte per la massima sua concentrazione (*m*). Egli è vero che un dotto Accademico non pare soddisfatto di questa definizione, e che non ostante la sua arrendevolezza nell' ammettere la possibilità di concentrare quest' acido fino a ridurlo ad uno stato concreto, pensa tuttavia per analogia col zolfo (nel quale il celebre *Stahl* ha dimostrato l' esistenza dell' acqua) che quest' acido così concreto non sarebbe privo d' aria nè d' acqua; ma siccome non reca alcuna esperienza per prova dell' inesattezza di quella opinione, ed io avrò in seguito occasione di riferire de' fatti, che sembrano stabilirne la solidità, non mi estenderò più oltre in queste osservazioni.

27. Intanto per non abbandonarmi alla seduzione, che può eccitare l' amor proprio, e la prevenzione, mi sono determinato a cominciare da una breve analisi delle opinioni de' Fisici, e particolarmente del sistema del Sig. *Black* intorno alla causticità, sperando così di non essere sospettato di abbandonarmi alla ripugnante disposizione di censurare gli altrui sentimenti.

28. Quale è dunque la causa della causticità? Ella è l' intiera espulsione del gaz dalla terra calcarea, risponde il Sig. *Black* e con esso lui un grandissimo numero d' eccellenti Fisici.

(*m*) Mem. dell' Accad. p. 680.

29. Egli è un acido d'una natura particolare associato alle parti del fuoco, il quale non è che una fissazione e concentrazione delle parti della luce, risponde il Sig. *Meyer* seguitato da alcuni rispettabili dotti (*n*).

Ristringendomi per ora al sistema del Sig. *Black* per il rapporto immediato, che egli ha coi gaz, debbo osservare prima d' ogni cosa, ch'egli non è dotato del carattere di generalità, che pur mi pare indispensabile allo stabilimento d' una verità primaria e fondamentale, la cui estensione ed importanza influisce nello sviluppamento di molte verità particolari. In fatti essendo egli limitato a rendere ragione della causticità delle calci terree, e di alcuni prodotti, che vi hanno rapporto, bisogna poi ricorrere ad altra causa, sovente anche contraddittoria, per ispiegare la causticità di molte altre sostanze: come sarebbe per gli acidi, per gli alcali, pe' sali metallici (*o*), pe' fosfori, e pirofori ecc. Ma basti per ora di averne fatto parola.

31. La calce viva è dunque caustica perchè è riputata del tutto priva di gaz, e si è pensato così a cagione di sua creduta inesserveſcenza cogli acidi: ma dopo le sperienze già riferite, non credo che si possa ragionevolmente continuare in questa opinione, perchè abbiamo dimostrato, che l' inesserveſcenza della calce viva e di molte altre sostanze caustiche dipende unicamente dal contatto più perfetto fra la parti in cui sono ridotte, alle quali poi proccurando una divisione anche pu-

---

(*n*) E' stata l' opinione del Sig. *Meyer* diversamente modificata da altri dotti, ed egli stesso non ha fatto che ritufcitare le opinioni degli antichi; ma come oggi è riguardato quest' Autore per capo di questa dottrina, e si possono far entrare in quell'opinione tutte le modificazioni fattevi da altri, credo di potermi dispensare dal farne ulteriore menzione, perchè non è ancora tempo di discuterne la solidità.

(*o*) Penso che si debba far distinzione tra le sostanze saline metalliche, e le calci fatte col fuoco pel carattere di causticità, del quale sono dotate le prime, mentre la stessa proprietà non si manifesta almeno sensibilmente nelle seconde.

ramente meccanica, di modo che presentino una maggior quantità di superficie all' azione dell'acido, si ottengono le effervescenze: fenomeno che parmi stabilire senza restrizione la solidità della teoria della tendenza della materia a combinarsi, teoria spiegata con tanta eleganza dal Sig. *Macquer* (*p*).

32. Il sentimento però de' Fisici par che riceva una forte conferma dal passaggio o trasporto che si pretende di procurare al gaz delle sostanze, che lo contengono in quelle, che ne sono sprovviste; e fra i varj esempj che se ne recano, quello della scomposizione del sale ammoniaco (*q*) colla calce viva sembra somministrare una dimostrazione assai solida a favore di questa teoria. Di fatto, dicesi, togliendoli dalla calce viva il gaz al sale ammoniaco, non è straordinaria cosa il vedere che l'alcali volatile, che ne risulta, sia totalmente ineffervescente cogli acidi, e sia dotato della più potente causticità (*r*): ma nell' atto di cedere alla forza di questi argomenti, altri fatti si presentano, i quali bastano per indurre la maggior diffidenza.

33. Senza entrare per ora nella nojosa discussione di molti fatti implicanti contraddizione evidente coll'assunto principio, e impegnarci in una prolissa enumerazione di fenomeni ripugnanti, li quali non avrebbero un rapporto diretto colla scomposizione del sale ammoniaco in alcali volatile caustico, di cui è attualmente quistione, mi basta di qui richiamare la scomposizione di questo stesso sale, che si ottiene per mezzo delle calci metalliche. L'alcali volatile che se ne ricava è di som-

(*p*) Anch'io ho fatto uso di questa forza di contatto nelle Mem., che ho scritto sul fluido elastico della polvere V. Misc. Taur. *T.* 1. an. 1759.

(*q*) Quello dell' alcali caustico, dal quale si ricava la pietra caustica, è pure un esempio di questo trasporto.

(*r*) V. gli Art. del Dizionario di Chimica (*Alcali volatile ammoniacale*) (*Sale*) (*causticità*) (*calci* ecc.)

ma causticità, ed in forma fluida, colla differenza poi, ch' egli è effervescente cogli acidi (*s*). Ma le calci metalliche si vogliono pur cariche di gaz. Ognun vede pertanto ciò che ne consegue legittimamente.

34. Ora prima di passare più oltre debbo osservare, che le alterazioni, che soffre l'alcali volatile nella scomposizione del sale ammoniaco colla calce, le quali nel sistema del Sig. *Black* sono assegnate all' azione dell' aria fissa, come si esprime il Sig. *Bucquet*, sono, come ho già detto fin da principio, 1°. che l'alcali volatile che se ne ottiene è sempre sotto forma fluida; 2.° ch' egli è potentemente caustico; 3.° ch' egli è ineffervescente cogli acidi; 4.° che questa scomposizione è accompagnata da uno sviluppamento tumultuoso di vapori, riguardato da molti Fisici per una vera produzione d' aria o di gaz, la quale non manca di cagionare la rottura de' vasi se non se gli dà scampo libero opportunamente. Siffatte alterazioni essendo considerate come proprietà, che distinguono quest' alcali volatile da quello che risulta dalla scomposizione del sale ammoniaco colla creta, e coll' alcali fisso, ho creduto di doverne fare l' oggetto di un esame tanto più metodico quanto mi è sembrato egli più proprio a conciliare gradi di fede alla nuova teoria della causticità.

35. Le sperienze delle quali ho reso conto per riguardo all' effervescibilità della calce mi pajono per verità

(*s*) Il Sig. *Bucquet* rispettabilissimo Chimico avea intrapreso l'esame di questo oggetto, e lo pubblicò prima, che fossi determinato di dare alla luce le mie ricerche su questa stessa materia, dovendo elle far parte d' un' opera molto più considerabile. Mi fo pertanto un dovere di rendere qui un giusto tributo di stima alla sua Memoria rimettendo al giudizio de' dotti le cose nostre. E ritornando al mio oggetto mi prevalerò de' termini di questo illustre Fisico Francese nel suo eccellente Scritto su questo sale inserito nel IX. vol. des *Sav. etrang.* p. 572., *nel sistema del dottore Black si attribuiscono* (dice quest' Autore) *all' azione dell' aria fissa le alterazioni che soffre l'alcali volatile nella scomposizione del sale ammoniaco colla calce* ecc.

baſtanti a diſtruggere la ſuppoſizione, alla quale s' appoggiano i Fiſici, cioè ch' ella dimoſtri l' eſiſtenza d' un gaz ; ma dovendoſi ragionevolmente diſtinguere queſti fluidi aeriformi in una maniera più ſpecifica, onde formarne idea meno confuſa, ſtimo bene di dividerli, e conſiderarli generalmente in *gaz pneumatici*, ed in *gaz vaporoſi* ; giudicando conveniente di dichiarare la mia opinione ſu queſto movimento, ottimamente eſpreſſo dal dotto Autore del Dizionario di Chimica, e parendomi altresì indiſpenſabile di diſtinguere la cauſa d' un effetto dalle circoſtanze, che poſſono accompagnarla. E' dunque la mancanza totale del principio acquoſo, a mio parere, e così d' ogni qualunque gaz, una circoſtanza di fatto, oſſia una conſeguenza neceſſaria del tormento ſofferto dalla ſoſtanza terrea. Queſta diſunione promoſſa con una cauſa così violenta non fa che rimettere la materia in uno ſtato di omogeneità, da cui dipende l' accennata forza della tendenza alla combinazione ; forza dipendente dal contatto più o meno eſatto delle parti, il quale riduce le ſoſtanze in uno ſtato di eſtrema aridità, e le rende avide di nuove aſſociazioni, che più o meno perfette, più o meno pronte riuſciranno, in ragione del contatto loro con altre ſoſtanze, e delle proprietà di queſte. Così prontiſſimo ſarà il riaſſorbimento dell' acqua dalla calce, perchè è diffuſo più uniformemente (per la ſua ſemplicità e per la ſua fluidità) e più permeante queſto principio di natura: e ſeco reſtituirà una parte dell' aria, perchè ne contien ſempre in iſtato, dirò col Sig. *Roux*, di diſſoluzione ; come in ſimile ſtato contiene i principj d' acidità negli acidi, e d' alcalinità negli alcali.

Ma appunto dal conflitto che naſce nel combinarſi di queſte materie pel rapimento che fanno le une del principio acquoſo alle altre, e per cui ſegue neceſſariamente la loro ſcompoſizione, naſce il movimento che conoſciamo ſotto il nome di efferveſcenza, nel quale lo

ſprigionamento di qualunque principio volatile è allora unicamente dovuto, come ottimamente penſa il Sig. *Lavoiſier*, alla ſcompoſizione dell' altra ſoſtanza qualunque, il che ha luogo anche più generalmente, non eſſendo riſtretto il caſo al ſolo acido, del quale parla queſto valoroſo Accademico.

36. Molti inſigni Scrittori, fra' quali il Sig. *Bergmann*, dubitano che ſi poſſa confondere queſto movimento delle efferveſcenze con quello che è proſſimamente conforme al moto prodotto dall' ebullizione; ma baſta eſaminare le circoſtanze degli effetti, che ne naſcono, onde non temere di prendere abbaglio: mentre non riſulta dal moto di ebullizione altro effetto, che quello d' un' accelerata diſſipazione del principio evaporabile ſenza che venga prodotta mutazione eſſenziale nelle ſoſtanze, ſalvo che nella diſtribuzione de' principj meno volatili. All' oppoſto le efferveſcenze ſono ſempre un ſicuro riſcontro di alterazione nelle medeſime. E' vero che nell' uno e nell' altro caſo vi può eſſere, e vi farà eſpulſione più o meno compiuta delle parti volatili, e più diſpoſte alla ſvaporazione; ma farà queſto nel caſo dell' ebullizione il maſſimo effetto, che ſi può aſpettare; e nelle efferveſcenze farà ſoltanto una circoſtanza neceſſariamente concomitante. La fermentazione *animata* potrebbe più giuſtamente dar a temere di equivoco, perchè riuniſce le circoſtanze de' due movimenti ſuddetti; ma per la ſua preſſo che uniforme equabilità anch' eſſa va a confonderſi finalmente in quello di putrefazione: moto generato dal concorſo generale delle forze della natura, che reſtituiſce l' equilibrio tra gli elementi nello ſtemperamento delle già logorate combinazioni, per reſtituirle ai puri rudimenti di materia informe; ed è queſto il riſultato di tutti, nè vi s' incontra la debolezza o la violenza ne' mezzi, nè il tumulto negli effetti, onde ſi deve meritamente riguardare come un perfetto temperamento riſerbato alla natu-

ra per produrre, ad onta noſtra, quelle trasformazioni continue, colle quali conſerva un' aſſai equilibrata uniformità nelle coſe ſue; ciò che non ſenza ſondamento ha dato motivo a' noſtri anteceſſori di farne un ſiſtema di dottrina compreſo nel volgare adagio *corruptio unius eſt generatio alterius*. Ma troppo mi ſono ſcoſtato dal mio aſſunto, perlochè troncata ogni ulteriore digreſſione ripiglio l' argomento.

37. Egli è dunque abbaſtanza manifeſto, che ſeguendo l'opinione che l'eſſervèſcenze provino l'eſiſtenza dei gaz, avendo noi dimoſtrato, come è facile a ciaſcheduno di convincerſene, che le ſoſtanze, le quali ſi pretendevano ineſſerveſcenti, preſentano per altro queſto movimento, ogni volta che ſi diſtrugge, anche meccanicamente, la ſorza di tendenza, colla quale i principj ſtavano uniti ſra loro; tutta la teoria della cauſticità dipendente dalla privazione del gaz viene legittimamente confinata ſra gli enti di ſottile ſpeculazione; e perciò intieramente diſtrutta. Ma per non dipendere più la cauſticità delle mentovate ſoſtanze da così comodo principio, non ſiamo diſpenſati dal mettere in opera ogni ſforzo, onde indagarne la vera cagione.

Per accingermi dunque il primo a queſto aſſunto, e per non iſcoſtarmi dall' oggetto in quiſtione, comincerò dall' eſaminare da che dipenda, che queſto alcali è ſempre ſotto forma fluida; perchè queſto liquore è cauſtico; ſe è vero ch'egli ſia e debba eſſere ineſſerveſcente cogli acidi; e finalmente ſe i vapori, che ſi manifeſtano nell'atto della ſcompoſizione, ſieno un gaz pneumatico, che ſi ſviluppi, o ſe debbano ſoltanto attribuirſi ad una eſpulſione contemporanea dell'aria contenuta nelle capacità coi vapori alcali volatili, la cui elaſticità iniziale è ſtrepitoſa e tumultuante.

38. Quantunque la calce viva non foſſe eſſerveſcente cogli acidi, in qualunque modo ella s' impiegaſſe in frammenti più o meno minuti, ſaremmo tuttavia auto-

rizzati a ſoſpettare dell' eſattezza della ſuppoſizione nella circoſtanza particolare di queſto proceſſo; mentre gli ſperimenti irreprenſibili e ſtati ſin qui riſpettati del valoroſiſſimo Sigr. *Duhamel* ci mettono in diritto di dubitare, ſe ſia lecito ſupporre, che la calce la quale dee ſervire alla ſcompoſizione del ſale ammoniaco ſia ſcevra affatto di gaz, avendo queſto celebre Accademico provato deciſivamente, che non ſegue alcuna ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce veramente viva, e che è di tutta neceſſità d' impiegarla eſtinta (*t*): non è poi da dubitare che la calce eſtinta, comunque ſe ne faccia l' eſtinzione, non ſi trovi più nelle circoſtanze in cui era; e dalle ſperienze da me fatte, la ſemplicità delle quali mi diſpenſa da ogni dettaglio, riſulta eſſer certiſſima coſa che la calce eſtinta all' aria o nell' acqua riuniſce ogni condizione, per cui manifeſta cogli acidi un movimento più o meno impetuoſo, e che ſi conoſce ſotto il nome d' efferveſcenza, non di ebullizione.

39. Se otteneſſi dunque di provare la falſità dell' aſſerzione, che la calce, la quale produce la ſcompoſizione del ſale ammoniaco, non è altramente nelle circoſtanze della calce viva, e che non potrebbe ella nè meno effettuarla ſinchè foſſe nelle circoſtanze di queſta, crederei ſoddisfatto il mio aſſunto; ma l' eſattezza dell' analiſi non mi permette d' attenermi alla ſola confutazione del fatto, e mi ſtimo in dovere d' aggiugnere tutto ciò

(*t*) Il Sig. *Fourcroy* nelle ſue Lezioni dice per verità alla p. 282., che la calce eſtinta all' aria ſcompone queſto ſale ugualmente, che la calce viva. Queſta oſſervazione m' è giunta inaſpettata, eſſendo diametralmente oppoſta ai lavori del Sig. *Duhamel*, al ſentimento generale de' Chimici, ed alle mie ſperienze ſteſſe.

Ad onta del mio riſpetto per gli uomini grandi, non mi credo diſpenſato dal ripetere le ſperienze loro, e dall' aſſicurarmi io ſteſſo de' riſultati, come ho fatto ſon già più di vent' anni ſu queſto ſoggetto. Ma ſi vedrà in appreſſo ciò che ho riconoſciuto dalle ſperienze, che queſta nuova opinione mi ha ſuggerite.

to ciò che può essere necessario per dimostrare, che non è nè meno per parte del gaz che ha luogo questa scomposizione,

40. *Sempre*, dice il Sig. *Duhamel*, *che si ottiene l'urinoso ammoniaco sotto forma di spirito, si è perchè è passato nella distillazione coll' acqua contenuta nelle materie, e che invece d' essere unito ad una sostanza solida, la quale gli dia corpo, lo è ad un liquido che lo discioglie.*

41. Questo passo così preciso d' un Fisico tanto rispettabile quanto il Sig. *Duhamel* non m'è sfuggito dalla mente, e già ne ho fatto uso nel lavoro presentato all' Accademia nostra di Torino in principio dell' anno 1760. in seguito di varie sperienze fatte da me sull' istesso argomento, le quali non sono forse conosciute, ed alle quali rimando i Lettori, che ne potessero esser curiosi (*u*) per non appoggiarmi sopra la mia autorità dopo quella del dotto Autore, che ho citato.

42. Quella all' incontro del celebre Autore del Dizionario di Chimica è di troppo gran peso per ommettere di riferirla: *Egli è sensibile che la fluidità dell' alcali volatile dipende dall' acqua contenuta in gran quantità nella calce estinta, in cui l' alcali volatile è disciolto.*

43. Il Sig. *Bucquet* nella sua eccellente Memoria già citata ha cercato d' assicurarsi intorno ai dubbj, ch' egli aveva sull' azione comunemente attribuita alla privazione del gaz nella calce riguardo a questo sale, ed essendosi accertato, che nonostante il soggiorno di questa sostanza nel gaz mofetico non succedeva alcuna differenza in questa scomposizione, ha conchiuso che non si doveva assegnare alla privazione del gaz; e quantunque

(*u*) Trovasi altresì questo opuscolo nel Tom. XIII. dell' eccellente deposito delle scienze fisiche, la Collez. Accademica.

non ſia andato più innanzi nella ricerca del principio, dal quale poſſono dipendere tutti queſti fenomeni, egli ha tuttavia ſtimato di conchiudere, che ſi devono al concorſo del principio acquoſo carico di gaz; concluſione a mio giudizio un poco troppo precipitata, mentre non ha fatto paſſo all' eſame dell' azione del principio acquoſo privo di gaz, prima di permetterſi queſta concluſione, come lo avrebbe richieſto il rigore dell' analiſi, ed i ſuoi riſultati continuando poi ad eſſere negativi; coſa che non gli ſarebbe avvenuta certamente, come ſi vedrà dalla ſerie delle mie ſperienze. Avrebbe per ultimo potuto ſottomettere all' eſame l' azione riunita del gaz e dell' acqua per conchiudere, come ha fatto, ſenza alcuna taccia.

44. Queſto è appunto il piano, che ho ſeguito affine di dare la maggior generalità alle mie ricerche; ma l' infedeltà de' dati avendomi ſempre reſo più diffidente ho creduto di dovermi aſſicurare anche delle più triviali e minute circoſtanze di queſto proceſſo.

45. Ho adunque cominciato dalla ricognizione dell' effervescibilità della calce eſtinta, ed ho oſſervato, che quella ch' è perfettamente eſtinta all' aria è più effervescente di quella che lo è coll' acqua, e che l' eſtinzione fatta dall' acqua induce grandiſſime differenze, eſſendo ſenſibilmente più effervescente, quando è fatta lentamente e con cautela; ciò che conferma, che dipendono le effervescenze della calce cogli acidi dallo ſtato di aridità delle parti della medeſima, e dalla diviſione, che ſi proccura tra le medeſime per mezzo dell' acqua; di modo che per il conflitto che inſorge nell' atto di queſte combinazioni dal rapimento del principio acquoſo, riſulta per neceſſità la ſcompoſizione delle ſoſtanze, da cui ſi ſtrappa. In qualunque maniera però ſia ſtata eſtinta la calce, che s' impiega, non ſuccede alcuna differenza nella ſcompoſizione del ſale ammoniaco, ſe non ſe quella che deve neceſſariamente procedere dal-

la maggiore o minore quantità d' acqua, della quale è pregna la calce; ma ne risultano di assai ragguardevoli nello sviluppamento de' vapori, i quali sono sempre più elastici e tumultuosi a misura che la calce impiegata è meno divisa.

46. La considerazione della poca aderenza dell' acido marino alle terre calcari, dalla quale hanno tratto argomento di spiegare i Maestri dell' arte il fatto avanzato da alcuni Chimici di avere spogliato il sale marino del suo acido colla sola azione del fuoco, avendomi fatto nascere, come dissi, il sospetto che in questa scomposizione, attesa specialmente la grande affinità di quest' acido coi principj volatili, e perciò col principio acquoso, coll' infiammabile, e coll' alcalino volatile, ne potesse sfuggire qualche parte sotto forma gazosa, ho disposto il mio apparecchio in guisa che dopo essersi feltrato attraverso un considerabile strato d' acqua distillata, il fluido sviluppato dovesse quindi attraversarne un altro d' acido nitroso allungato, affinchè si regalizzasse, e sciogliesse la foglia d' oro, che vi era. Siccome da alcuni Chimici poi si è preteso d' aver ottenuta la dissoluzione dell' oro in liquori acidi, diversi dall' acqua regia, mi è perciò venuto in mente di procurare la feltrazione d' una parte del gaz che diremo *ammoniacale* attraverso l' acido vitriolico, l' acido marino, e l' acido vegetale, ne' quali tutti eravi una foglia d' oro, e per ischivare ogni sospetto di scambievole comunicazione tra i vapori nitrosi e marini, avendo accesso nello stesso recipiente dell' acqua, ho fatto comunicare questi due liquori rispettivamente con due altri recipienti, ne' quali vi era pure dell' acqua distillata; e siccome le comunicazioni erano stabilite per mezzo de' tubi di vetro, che si stendevano sin verso il fondo de' recipienti, così non mi restava a temere la reciproca alterazione di questi due acidi: erano inoltre i recipienti tutti di grandissima altezza in proporzione del-

la loro vastità, come ho notato al §. 12., ed ho creduto anche utile bene spesso il proccurare la feltrazione del gaz per l' olio di tartaro, e pel lissivio caustico.

47. Nella moltiplicità delle operazioni fatte su questo oggetto ho stimato bene di ripetere tutti i processi indicati da' diversi Autori riguardo alla proporzione tra il sale ammoniaco, e la calce viva; e così anche di assicurarmi delle varietà che possono dipendere dallo stato delle calci, e dalla maniera di fare le combinazioni delle materie; e mi è risultato che sia preferibile la combinazione sollecita de' fiori di sal ammoniaco ben puri con tre volte il loro peso di calce ben viva e appena raffreddata, coll' aspersione contemporanea e pronta dell' acqua (nella quantità prescritta dal Sig. *Baumè*) entro la stessa storta per mezzo d' un tubo di latta ricurvo, la cui estremità sia fatta a forma d' innaffiatojo. Richiede questo metodo, la cui combinazione risulta dai metodi e dalle osservazioni de' celebri Signori *Rouelle* e *Baumè*, una diligente ed anticipata preparazione di tutte le parti dell' apparecchio; perchè non è appena diffusa l' acqua entro la mistura, che nasce una veemente fermentazione in essa accompagnata da gagliardissimo calore, che la fa bollire, ed accelera rapidissimamente la scomposizione, dalla quale sorge presso che istantanea, e violentissima l' espulsione de' vapori, i quali essendo di sorprendente elasticità non potrebbero più trattenersi se rimanesse altro lutamento da fare, oltre quello della storta col tubo di comunicazione: avvenendo anzi frequentemente, che per la prontezza della calce nell' imbeversi d' acqua si ha appena il tempo d' infonderla tutta, prima che cominci la scomposizione colla copiosa, ed incomoda emissione di vapori soffocanti; ma poco se ne perde, se sia in pronto l' apparecchio qui avanti descritto ai §. §. 10. 11. 12. e 13, e se sieno praticate tutte le suggerite cautele.

48. Queſta operazione così eſeguita baſta per aſſuefare l' occhio d'un diligente oſſervatore a riconoſcere la differenza che paſſa tra i movimenti, che ſi diſtinguono dai Fiſici, cioè di ebullizione, di fermentazione, e di efferveſcenza, mentre le circoſtanze loro ſono abbaſtanza diſtinte da non poterſi confondere: l' ebullizione altro non eſſendo, come diſſi, che un' accelerata evaporazione; la fermentazione ſi ſa da tutti eſſere un moto inteſtino più o meno ſenſibile, da cui riſulta la diſunione delle parti della materia, e conſeguentemente la diſtruzione progreſſiva della forza di coeſione; l' efferveſcenza abbiamo veduto dipendere da un rapimento o ſcambievole o unico di qualche principio nell' atto della compenetrazione delle materie, nel quale ſempre vi è azione e reazione, e perciò ſcompoſizione, e nuova combinazione con diſpendio violento di principj volatili.

49. Ne' primi momenti dello ſconvolgimento dei principj delle ſoſtanze meſſe in eſperienza ſi ottiene un liquore di maſſima volatilità e cauſticità ſenza miniſtero di fuoco; ma ſiccome coi vapori viene rapidamente eſpulſa l' aria dalle capacità ne' primi iſtanti, così per metterſi a coperto da un egualmente rapido aſſorbimento del liquore contenuto nel magazzino o gran recipiente, che comunica col pallone, è coſa opportuna il cominciar a metter del fuoco ſotto il bagno a miſura che ſi vede ſcemare l'elaſticità de' vapori dimoſtrata dal rallentamento delle bolle, che attraverſano l' anzidetto liquore.

50. Egli è vero che ſi potrebbe ſupplire chiudendo la ſola comunicazione tra il pallone ed il magazzino; e per non eſporſi alla frattura della ſtorta pel peſo dell' aria eſterna (coſa più volte accadutami in varie ſperienze, nelle quali erano preſſo che vuote le ſtorte) ſi potrebbe aprire la comunicazione dal tubo ſuperiore *RR* del pallone *X* alla campana *LL*. Ma dovendoſi poi di

nuovo chiudere pel nuovo ſviluppamento del gaz che ſi fa dall' azione del fuoco, ſarà più ſpedito di anticipare l' applicazione del fuoco ſotto il bagno.

51. Non eſſendovi confronto da fare tra il liquore de' primi momenti e quello che ſi ottiene in ſeguito dell' operazione, allorchè voglio procacciarmi liquori concentratiſſimi, ho per coſtume di chiudere il tubetto inferiore, e di mutare il recipiente, toſto che ſono di molto rallentati i vapori del primo periodo, vale a dire di quelli, che ſono eſpulſi ſenza fuoco; e ſurrogato un nuovo recipiente *E* raccolgo un liquore, che ſi produce in tutto il tempo che per l' azione del fuoco ſi fa ſviluppamento di gaz ſino all' iſtante, in cui comincia a manifeſtarſi un' oſcillazione nel tubo comunicante col magazzino, la quale nel ſuo refluſſo ſupera l' altezza dell' acqua dentro al magazzino medeſimo: ſegno infallibile del termine del ſecondo periodo, e di un imminente aſſorbimento. Mutato per l' ultima volta il recipiente *E* ſi dà corſo all' operazione ſino al ſuo fine coll' apertura della campana *LL* immerſa nell' acqua, la quale reſtituiſce l'aria, ch'è ſtata ſcacciata dalle capacità.

52. I riſultati ſono 1.° che il liquore ricavato ſenza fuoco è in uno ſtato di tale concentrazione, che laſciandovi cadere goccia a goccia dell' acido nitroſo ſi fa un ſibilo così veemente, che emula quello d'un acido vitriolico concentratiſſimo nell' acqua, o di un ferro rovente a bianco. Con poche goccie di queſt' acido ottenni 47. gradi di calore nel Termometro a mercurio di *Reaumur*; è ſorprendente la ſua volatilità, e la ſua cauſticità.

53. 2.° quello che ſi raccoglie col fuoco nel tempo dell' eſpulſione è altresì ſommamente effervescente, ma non produce un calore così gagliardo; è per altro conſiderabile del pari la ſua volatilità, e cauſticità.

54. 3.° L' ultimo liquore raccolto parimenti col fuo-

co nel tempo che si fa l' assorbimento non è per verun conto effervescente, ed è assai meno volatile e caustico: che se si mescolino insieme questi tre prodotti, non si ottiene più effervescenza, e si ha il liquore alcali volatile caustico solito a raccogliersi nell' operazione dai Chimici.

55. L' acqua dei magazzini è pregna, come può comprendersi da ognuno, di gaz alcali volatile purissimo; ed è la sua forza ed attività in ragione della quantità de' vapori, e di quella dell' acqua (*v*).

Quanto poi a' liquori che hanno servito alla sfeltrazione del gaz, e ne' quali trovasi l'oro, evvi un precipitato bianco, talora grigio, e talora finalmente oscuro nell' acido vitriolico; e qualche volta vi si trova un poco annerito l'oro. Nello spirito d' aceto si scorgevano alcune volte de' fiocchi bianchi sopranatanti, ed altre volte un poco di simile precipitato, ma sempre senza offesa dell' oro; nell' acido nitroso era sensibile la dissoluzione di questo metallo dal calore, ch' egli acquistava passando dal bianco limpido al giallo più o meno carico; nell' acido marino poi vivissima è la sua azione sull' oro, essendone la dissoluzione più compiuta e più pronta che negli altri (*x*). Quanto poi all' olio di tartaro, sensibile è il precipitato che vi si scorge come pure nel lissivio caustico.

(*v*) Spesso si scorge nel magazzino principale un tenue precipitato più o meno bianco, il quale mi è sembrato essere una finissima terra di natura calcarea stata probabilmente asportata dal gaz nel tumulto de' primi vapori.

(*x*) Non sempre succede la dissoluzione dell' oro in questi acidi nel tempo dell' operazione, almeno in una maniera distinta, eccetto che nel caso che la quantità delle materie impiegate sia molta, dipendendo dalla durata, e dalla quantità de' vapori espulsi, come pure dalla quantità dell' oro per rispetto a quella degli acidi impiegati in qualità di feltro, e dalla maggiore o minore concentrazione. Ma quand' anche non riuscisse contemporanea la dissoluzione, si avrà motivo di riconoscerla col soggiorno dell' oro negli stessi acidi carichi di gaz.

56. Non credo di potermi dispensare dal riferire un fenomeno del tutto straordinario, che mi è più volte riuscito di vedere, cioè la perdita dell'effervescibilità di un liquore alcali fisso da me talvolta impiegato; era questo una dissoluzione carica a tutto potere d'un tartaro che si suole impiegare da varj Artisti nelle tinture, il quale non essendo perfettamente calcinato nè tampoco purificato dalle dissoluzioni, feltrazioni, ed efficcazioni successive e ripetute, può riguardarsi come un alcali impuro, nel quale, oltre a molta materia terrea, vi sono unite molte parti flogistiche, e forse qualcuna ancora delle acide; ad ogni modo però sempre che ho fatto feltrare il gaz alcalino, o vogliam dire *ammoniacale* entro a questo lissivio, passato però per la carta, perdeva intieramente la proprietà di fare effervescenza con qualunque acido, quando era ben carico di vapori alcali volatili caustici: di bianco limpido diventava giallo, e quindi rossigno il liquore; sviluppava una tinta arsiccia nella carta azzurra, divenuta secca dopo di esservi stata immersa; ed insondendovi sopra il sale di tartaro ben purgato e ben secco, pareva eccitarvi uno sviluppamento di bollicine con schiuma alle pareti de' vetri da orologio, de' quali soglio servirmi per siffatte esplorazioni. Succedeva finalmente a questo liquore quello che alle volte accade coll'olio di tartaro per deliquio carico di colore, vale a dire che oltrepassando apparentemente il punto di saturazione si condensa lo spirito volatile in un liquore più chiaro, sopranuota al liquore alcali fisso, galleggiando, come fa l'olio grasso sull'acqua. Ma è degna d'osservazione la corteccia, che distingue la separazione di questi due liquori, mentre s'assomiglia ad una pellicola sottilissima ed arricciata partecipante del colore particolare d'ognuno de' due liquori.

57. Parmi d'aver tutto il fondamento, onde ascrivere la singolarità di questi fenomeni al rapimento dell'acqua dell'olio di tartaro dal gaz ammoniacale, e dalla necessaria

neceſſaria diverſità che ſi produce nella diſtribuzione, aderenza, e tenuità del flogiſto cagionata dalla tendenza del medeſimo a combinarſi collo ſpirito volatile, mentre viene dalla forza di coeſione ritenuto dall' alcali fiſſo. In fatti chiariſſimo ſuol eſſere lo ſpirito alcali volatile cauſtico; chiaro del pari potrà eſſere il liſſivio alcalino; ad ogni modo colorita più o meno riſulterà la combinazione de' medeſimi, lo ſteſſo ſpirito ſopranuotante comparirà tinto in giallo più o meno carico, mentre più roſſiccio ancora rimarrà l' alcali fiſſo. Non è equivoca l' azione dell' alcali volatile cauſtico ſulla parte infiammabile de' liquori, e baſta un ſemplice ſperimento per convincerſene. Si combini un acido concentrato tanto che baſti per mordere l' olio che vi s' infonde; vi ſi getti ſopra dello ſpirito volatile cauſtico concentrato: immediatamente ſi vedrà rapito l' olio all' acido, e ridotto in forma ſaponacea (*y*), baſtando altresì a dimoſtrare queſta attività il colore giallo roſſigno, che acquiſta lo ſpirito volatile più limpido, quando, otturata una boccia con turacciolo di ſughero, s' immerga queſto nel liquore.

Per altro farò nel caſo di far conoſcere un' altra volta che la ſteſſa proprietà, che hanno varie ſoſtanze di poterſi infiammare, dipende non tanto dalla quantità che dalla tenuità, e diſtribuzione del principio infiammabile in eſſe contenuto.

58. Egli è però evidente, che gli errori che poſſono eſſerſi introdotti non ſono che una conſeguenza neceſſaria delle ineſattezze occorſe nello ſtabilire i dati, mentre ſinora non s' era da alcuno de' Fiſici ſoſpetta-

(*y*) Sarebbe forſe troppo ardito il penſare, che l' apparenza ſaponacea foſſe da riguardarſi come un ſegno di antagoniſmo di forze riſultanti dalla cauſticità, che confondendoſi ſoltanto reciprocamente ſenza combinarſi reſtano in ſoſpeſo.

to. 1.° che l' ineſſerveſcenza dello ſpirito volatile cauſtico dipendeſſe dal mero difetto di concentrazione. 2.° Che nella ſcompoſizione del ſale ammoniaco con la calce ſi aſſociaſſe una parte dell' acido marino coi vapori alcalini; anzi a dire il vero concederò, che vi foſſe fondamento per non formare queſto ſoſpetto, giudicandone da ciò che ſuole avvenire nel combinarſi queſte ſoſtanze, poichè ne riſulta la produzione dello ſteſſo ſale ammoniaco: non potendoſi fare argomento in contrario, fuorchè conoſcendo appieno ciò che ſuccede in sì fatte ſcompoſizioni, cioè che ceſſano le forze mutue di tendenza alla combinazione per il difetto del veicolo neceſſario, vale a dire del principio acquoſo, eſſendo ridotto ognuno d' eſſi ad un ſingolare grado di concentrazione; laonde non può aſcriverſi a riprenſibile errore di mente l' aver aſſegnata la cauſa della cauſticità alla privazione dell' aria fiſſa, eſſendo queſta una circoſtanza di fatto, la quale però non è che una conſeguenza neceſſaria e concomitante la vera cauſa, cioè quella della diviſione più o meno violenta delle parti, con ſimultanea eſpulſione di alcuni principj e l' inzeppamento forſe in alcune di un acido ridotto alla ſua maſſima concentrazione, e del flogiſto anche in altre (Y). La dimoſtrazione di queſti effetti in tutte le materie dotate del carattere di cauſticità ſarebbe troppo eſteſa per comprenderla in queſto Saggio, e mi baſti di averli dimoſtrati nel caſo concreto dello ſpirito volatile contro uno di que' punti fiſſi, e fondamentali, ſu' quali ſi è appoggiata l' ingegnoſa dottrina del Sig. *Black*; riſervandomi a darne lo ſviluppamento generale in altra occaſione per non diſcoſtarmi dai riguardi, che

(Y) Avvertaſi che qui s' intende di eſprimere quel grado di concentrazione, cui non può attignere un acido ſenza ceſſare di eſſer tale; gli ulteriori gradi convertendolo probabilmente per ultima metamorfoſi, prima dell' intera riſoluzione, in alcali volatile.

preſcrive il rigore analitico d' un accademico ragionamento. Mi reſtringerò pertanto ad oſſervare che dal non eſſerſi poſto mente al vuoto, che neceſſariamente deve ſuccedere ne' vaſi chiuſi, perchè ſegua una qualſivoglia operazione capace d' aver effetto in tali circoſtanze, poſſono facilmente eſſerſi moltiplicate chimeriche produzioni di nuove arie, grande diverſità paſſando tra ciò che deve intenderſi per aria, e il gaz o fluido aeriforme.

59. Quantunque non intenda di entrare per ora in una più eſteſa dimoſtrazione della concentrazione ed inzeppamento di varj principj, e dell' acido ſingolarmente non meno che della relazione ſtrettiſſima, ch' egli ha col flogiſtico; per poter affermare che l' acido ridotto allo ſtato di maſſima concentrazione, o di privazione eſtrema del principio acquoſo, ſi manifeſta quindi o colle proprietà cauſtiche, o coi ſintomi di flogiſto, e forſe (ſiami permeſſo d' andar più innanzi ancora) con quelli d' alcali volatili, ſecondo che la materia, nella quale trovanſi inzeppati queſti rudimenti, viene modificata dalle nuove aſſociazioni, che ſe le fanno incontrare, onde per mezzo di eſtemporanee aſſociazioni o concordemente o ſoltanto in parte concorrono alla formazione di nuovi prodotti; mi baſti l' accennare alcuni fatti comprovanti queſta manifeſtazione del flogiſto nelle ſoſtanze coll' acquiſtata cauſticità.

60. Il Sig. *Gellert* aſſicura alla p. 170. del ſecondo volume della ſua Chimica metallica eſſer non ſolo poſſibile di ridurre la luna cornea per mezzo dell' alcali fiſſo (oſſervazione altresì fatta dal ſagaciſſimo Sig. Cav. *Landriani* di concerto col dotto Sig. Profeſſore *Moſcati*), ma che ſi può eziandio rivivificare la calce di piombo, e quella d' antimonio per mezzo della creta. Ancorchè da queſto Autore ſi ſparga poi qualche dubbietà ſulla neceſſità del flogiſto nella riduzione delle calci metalliche per la poca quantità, che queſte materie ne con-

tengono, ravvicinando un altro ſperimento riferito dal celebre Sig. *Baumè* nella ſua Chimica ragionata alla p. 33. del Tom. 2°, il quale conſiſte nella precipitazione del ferro d' una diſſoluzione di vitriuolo verde in una ſpecie d' azzurro di Berlino col liſſivio cauſtico, mi pare che più fondato ſia il penſiere del Sig. Cav. *Landriani*, cioè che per mezzo della cauſticità ſegua la flogiſticazione dell'alcali fiſſo, vale a dire, ſecondo l' interpretazione che debbo permettermi, che per queſta operazione diventi manifeſta la preſenza della materia infiammabile, diſtribuita prima e diffuſa in troppo gran numero di parti, riducendoſi così allo ſtato di vero flogiſto; cioè a dire d' un ravvicinamento de' principj infiammabili per mezzo della concentrazione loro, dipendente dalla diſſipazione ſegnatamente del principio acquoſo: non ſolo ho riconoſciuta la verità del fatto accennato dal Sig. *Baumè*, ma l' ho anche moltiplicato combinando colla diſſoluzione del vitriolo marziale lo ſpirito volatile di ſale ammoniaco cauſtico; una diſſoluzione del fegato di zolfo calcareo alcalino nell' aceto; l' alcali volatile ottenuto per mezzo del liſſivio cauſtico del liquore ſiliceo; lo ſteſſo liquore ſiliceo benchè men prontamente, e meno intenſo ſia ſtato il precipitato, e con queſti anche l' alcali volatile concreto ricavato per mezzo dell' alcali fiſſo, oſſervandoſi una ſingolare diverſità dall' eſſere o no ridotte queſte ſoſtanze allo ſtato di cauſticità nella ſegnata precipitazione.

61. Senza ſtendermi più a lungo ſu queſto punto mi ſia ſolamente permeſſo di oſſervare, che proccurandoſi la precipitazione del ferro per mezzo di ſoſtanze volatili, tutto che cauſtiche; non è durevole la tinta azzurra, ſe ſi laſcia libero l' adito all' aria; ſuccedendo il contrario ſe ſe ne interrompa la comunicazione; e tanto è più inſtabile queſta tinta, quanto ſi fa la combinazione in vaſi di maggior apertura; dal che mi naſce il ſoſpetto, che una delle condizioni più eſſenziali alla ſolidità del-

la tinta turchina ſia la totale eſpulſione o la fiſſazione de' principj volatili (z); condizione che appunto parmi compiutamente ottenerſi per mezzo della calcinazione, poichè in virtù della eſpulſione del principio acquoſo ſi giugne al termine della neceſſaria concentrazione del flogiſto, in cui diventa inerte la naturale ſua volatilità, ed eſercita quindi la nuova qualità acquiſtata di cauſtico ſul ferro medeſimo; potendoſi a mio giudizio riguardare queſta proprietà della cauſticità come un attributo generale della materia diſſeminato con diverſa relazione tra le ſoſtanze, ed eſprimente una maſſima forza d'affinità per la tendenza invariabile d'una diſtribuzione equilibrata fra le parti componenti le ſoſtanze combinate; equilibrio che richiede neceſſariamente lo ſtato di fluidità delle medeſime; e mi farò lecito per ultimo di fare una rifleſſione, cioè che ſi conſerva ſempre l'analogia tra il flogiſto ed il principio acquoſo, ſicchè è queſto alle ſoſtanze metalliche, ciò che è l'acqua eſſenziale alla natura de' ſali, mentre un'altra parte ſovrabbondante e meno ardente, che giuſtamente può denominarſi materia infiammabile, corriſponde a quella quantità d'acqua che ſi riguarda come meramente aggregativa, e da cui dipendono le riſpettive forme delle criſtallizzazioni.

62. Un punto importantiſſimo al quale debbo ora rivolgermi ſi è quello della diſſoluzione dell' oro nell' acido marino. Si ſa che il dotto Sig. *Scheele* ha annunciato ai Fiſici la poſſibilità di conferire queſta proprietà a queſt' acido diſtillandolo ſopra la calce del man-

(z) Volgare è l'oſſervazione della volatilità delle diſſoluzioni del ferro, e però ſembra aſſai plauſibile il penſare, che dall'adunamento, e ravvicinamento de' principj infiammabili non ſolo perda il flogiſto gran parte della ſua volatilità, ma che adattandoſi più eſattamente alle parti del ferro ſcemi altresì la volatilità di queſto.

ganese ; e deduce col Sig. *Bergman* essere la medesima dipendente dalla flogisticazione, che si fa di quest' acido per tal mezzo , e che lo stesso succeda nella combinazione dell' acido nitroso col marino conosciuta sotto il nome di acqua regia.

63. Volentieri consento coi medesimi su questo punto di teoria riguardo all' acido marino, perchè contro il comune sentimento credo che l' acido nitroso sia intieramente sprovvisto di flogistico, ed appunto per questo sia più d' ogni altro acido avido di rapirlo alle sostanze che ne contengono. Oserò dire anche di più, che non sia la sua natura compatibile colla combinazione della materia infiammabile, e che sia dovuta al sommo grado di concentrazione de' due principj la debole associazione del flogisto nello spirito fumante; ma che sia assai probabile che non possa a meno di seguire la reciproca loro scomposizione, quando nasca quel rapporto tra i loro principj constituenti da potersi combinare in una maniera più stretta ed aderente; di modo che non ostante l' attività sua per istrapparlo dalle materie, non gli conferisca però la facoltà di seco contrarre un' unione veramente intima ed esplorabile. Quantunque la mia scoperta confermi in parte il pensiero de' suddetti Fisici, la considerazione però dell' associamento de' vapori di quest' acido con gli alcalini nella segnata scomposizione del sale ammoniaco per la calce mi ha lasciata qualche dubbiezza intorno alla modificazione, che si vorrebbe recata esclusivamente sul flogisto. Laonde per procedere più cautamente mi sono proposto di moltiplicare gli sperimenti relativi a quest' acido. Ho pertanto combinato 4. onc. di sale ammoniaco purgato con 12. onc. d' olio di tartaro , nel quale ho disciolto 3. onc. di sale di tartaro secco in un mattraccio *A* (*fig. III. tav. II*) alto onc. 22. di Piemonte compresa la boccia del diametro d' un po' più di 3. onc., il di cui orifizio *B* fatto in forma conica combaciava esattamente

con quello d' un capitello tubulato *E* a cono roveſcio, e col becco ripiegato ad angolo, perchè poteſſe diſtenderſi con l' eſtremità ſin verſo il fondo d' un recipiente del diametro di circa 1. onc., e 5. in circa d' altezza, nel quale contenevaſi dell' acido marino allungato con acqua diſtillata, e dell' oro; ſtendevaſi poi di là un tubetto a forma d' imbuto, onde portare l' olio di tartaro nel mattraccio ſenza pericolo di ſpanderſi nel capitello. Furono diligentemente otturate tutte le aperture, e fu adattata la veſcica al tubo a chiave, di cui era guernito il recipiente; e ſi poſe il fuoco ſotto la boccia del mattraccio non eſſendo inſorta coſa alcuna prima dell' applicazione del medeſimo.

64. In un ſimile apparecchio fu combinato il ſale ammoniaco al peſo di 4. onc. con 12. di liſcivio cauſtico; ed in un altro quantità pari di ſale ammoniaco con 12. onc. di liquore ſiliceo. Nè queſto pure produſſe alcun fenomeno prima dell' applicazione del fuoco; ma all' oppoſto divenne ſpumante la miſtura del ſale col liſcivio cauſtico *(aa)*, e s' ebbe appena il tempo di chiudere, che cominciò lo ſviluppamento del gaz.

65. I riſultati della ſcompoſizione coll' olio di tartaro furono il ſolito ſviluppamento del gaz, e la formazione del ſale concreto nel primo tempo; ma divenne preſſo che floſcia la veſcica, e ſeguì l' aſſorbimento del liquore, nel quale era immerſo il becco del capitello.

66. Queſto periodo è un ſegno infallibile che non ſarà per accreſcerſi la quantità del ſale volatile concreto; ma che dalla eſpulſione del medeſimo dipende la maggior energia de' vapori, mentre diventa indiſpenſabile un continuo accreſcimento di calore a miſura che

(*aa*) Era fatto queſto liſcivio ſecondo il metodo del ſu Sig. *Bucquet* deſcritto dal Sig *Fourcroy* nelle ſue Lezioni alla p. 264. Tom. 1.

egli si aduna alle pareti del vetro, per cui si riduce l' acqua in vapori, e si discioglie nuovamente il sale. Questa dissoluzione è altresì degna d' osservazione, perchè ricade il liquore in istriscie spirali con un' apparenza oliosa; dalla continuata coobazione però si riduce la materia allo stato di siccità, con un colore oscuro e fosco, esalando pochissimo odore d' alcali volatile dall' apparecchio aperto, come pure dal recipiente, in cui si contiene il liquore, nel quale si fa un precipitato purpureo sporco, che tuttavia dimostra la dissoluzione dell' oro, ch' è singolare, perchè precipitato in oro di Cassio senza il concorso dello stagno; ma per verità non mi è riuscito di fondatamente assicurarmene, ancorchè abbia ottenuto per mezzo di una dissoluzione di stagno nell' acqua regia combinata con questo liquore una tintura turchina leggermente violacea (*bb*).

67. La scomposizione poi col liscivio caustico sviluppa, come dissi, dai primi istanti e senza fuoco quantità di gaz, diventando spumante la materia, la quale prende una tinta gialla, e feltrandosi i vapori pel liquore, tosto si vede piena di fumi bianchi la parte vuota del recipiente, cominciando a manifestarsi prima dell' applicazione del fuoco gonfia poi moltissimo la materia riscaldandosi col fuoco applicato, e rapido diventa lo sviluppamento del gaz: ciò che ne rende assai fastidiosa l' amministrazione. Il liquore del recipiente *HH* è carico di vapori alcalini, mentre non ostante l' esistenza dello spirito di sale probabilmente neutralizzato da una parte di questi vapori, ne usciva tuttavia fortissima esalazione, ed avendo voluto saturare d' acqua forte

(*bb*) Più manifesta comparisce col tempo la dissoluzione dell' oro nell' acido del recipiente.

forte queſto liquore, fu grande la quantità, che ſe ne richieſe. Non ebbi indizio alcuno di diſſoluzione dell' oro; non ſo però ſe doveſſe ciò attribuirſi alla debolezza grande dell' acido marino contenuto nel recipiente *HH*.

68. La ſcompoſizione ottenuta dal liquore ſiliceo manifeſtò un po' di ſchiuma alle pareti del vetro prima dell' applicazione del fuoco; ma appena ſeguita la medeſima, fu aſſai impetuoſo lo ſviluppamento del gaz, e ſi diſciolſe gran parte dell' oro nel tempo dell' operazione; quindi avvenuto il ſolito aſſorbimento, per cui ho dovuto accreſcere il fuoco, i vapori che paſſavano nel recipiente vi cagionavano una notabile efferveſcenza; ciò che ſervirebbe di forte indizio, che coi primi vi foſſe l' acido marino, e ſolo alcalini foſſero quelli ſucceduti all' aſſorbimento; coſa che concorderebbe aſſai bene colle notizie correnti della ſomma elaſticità de' vapori acido marini, e che mi parrebbe dimoſtrata dalla poca forza del liquore ſuddetto, tramandando appena qualche ſentore di vapori alcali-volatili.

69. Sempre più manifeſta parendomi l' azione dell' acido marino, ho creduto giovevole di aſſicurarmene direttamente per mezzo della ſcompoſizione del ſale marino ſteſſo alla maniera di *Glaubero*, ed ho perciò eſeguita la ſcompoſizione di 2. onc. di queſto ſale ben puro, e decrepitato con 5. onc. e $\frac{1}{2}$ circa d' olio di vitriolo nell' apparecchio poc' anzi deſcritto, e colla ſola avvertenza di far cadere il ſale marino ben peſto poco per volta nell' olio di vitriolo per mezzo d'un turacciolo bucato obbliquamente, nel quale ho incaſtrato un fiaſchetto di vetro col ſale, il di cui orifizio era alquanto riſtretto, e per tal modo rimaneva eſattamente chiuſo ogni adito tra il mattraccio e l' aria eſterna

(*cc*). Veemente fu la produzione de' vapori ogni volta che percuotendo il fiasco cadeva del sale nell' acido: e non ostante ogni diligenza usata per l' assicurazione delle lutature, con tutto ciò or qua or là uscivano fumi bianchi, i quali venivano però prontamente ritenuti applicandovi della cera carica di trementina; cessato finalmente il tumulto de' vapori, e la rapida produzione gazosa, fu continuata l' operazione col soccorso del fuoco, e condotta sintanto che fu piena carica di fumi bianchi la parte vuota del recipiente, nel quale vi era l' oro coll' acido marino debolissimo.

70. In questa operazione segnatamente hanno luogo rapidissimi e ripetuti assorbimenti, perchè si replica il vuoto sempre che cade del sale nell' acido, ed è questo vuoto tanto più esatto, quanto più lo scoppio de' vapori è forte e rapido; laonde non vi si può rimediare fuorchè traforando con un ago il buco, che si sarà lasciato nel turacciolo a questo fine, o aprendo la comunicazione, che per mezzo del medesimo si sarà stabilita da principio col tubo a chiave applicato alla parte superiore d' una campana immersa nell' acqua.

71. Prese l' acido del recipiente una tinta gialla vie più carica fino a pareggiare quella d' un bellissimo colore d' oro; e scemò notabilmente la quantità dell' oro; ma non fu già così precipitosa nè compiuta la dissolu-

---

(*cc*) E' opportuno il far osservare, che per le sperienze di questa natura l' imbuto rovescio, che sta annesso al capitello, dee essere di grande altezza, e coll' orifizio esterno cosiderabile, affinchè si possa dare una conveniente obbliquità al fiasco, nel quale si mette una delle materie, specialmente se è in forma concreta; il mio sistema di tubi è per questo effetto alto 2. in 3. oncie, e circa di un' oncia e mezza d' orifizio esterno: ancorchè sembri più comodo di mettere il sale nella boccia del mattraccio, e l' olio di vitriolo nel fiasco, preferisco ciò non ostante di fare il contrario per non espormi alla quasi infallibile rottura della boccia, facendo cadere questo acido particolarmente concentrato sopra una materia concreta; accidente però che non m' è mai avvenuto cogli altri acidi.

zione, come mi è avvenuto nella ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce, e col vetro ſiliceo nella maniera, e colle avvertenze indicate; dalla qual differenza parmi di poter conchiudere, che quanto la calce ed il vetro cauſtico ſono materie totalmente aride e più ſemplici, ſono altrettanto avide del principio acquoſo flogiſticato, e più radicalmente ne impoveriſcono l' acido marino, di cui s' accreſce l'efficacia. Per lo contrario l' acido vitriolico ha maggior affinità colla parte infiammabile quando è più concentrata che non è nelle ſoſtanze ſuddette; dunque non tanto dalla flogiſticazione, quanto dal rapimento ſimultaneo del principio acquoſo deeſi ripetere queſta proprietà.

72. Un fenomeno coſtante, il quale ſerve a dichiarare l'eſiſtenza dell' acido marino, e perciò degno d' attenzione, ſi è l' efflorescenza fumoſa di cui ſono principalmente ricoperte le pareti eſterne delle bocce che racchiudono un qualche liquore, nel quale egli ſi trovi o ſotto forma gazoſa, o ritenuto ſoltanto dalla ſemplice forza d' aggregazione; ſi vede pur anche la medeſima efflorescenza intorno alle pareti interne della parte vota de' recipienti; ed è tanto più bianca, e tanto più aderente, quanto è più ſcarſa l' umidità; ella è acida e ſalſa al guſto. Ma ciò che vi è di più ſingolare ſi è, che non ſolo ſono manifeſtamente diſtinte queſte due ſenſazioni al palato, ma diſtinto è l' ardore ch' ella eccita ſulle parti nervoſe della lingua, e ſingolarmente dello ſtomaco: ſegno caratteriſtico della forte ſua cauſticità; e ſiccome ſi ſente il guſto acido e cauſtico prima del ſalino, convien dire, che ſia queſta efflorescenza il riſultato d' una ſoſtanza ſalina con eſuberanza d' acido; e ſono tanto più diſpoſto a perſuadermene, che nelle bocce in cui ſi conſerva la ſpirito di ſale, ſe qualche poco di queſti fumi può trapelare, ſi forma al margine eſterno del collo una efflorescenza concreta, diſtintamente ſali-forme, comechè opaca, la quale è gen-

tilissimamente figurata a forma di piccoli cespugli frascati regolarmente.

73. Ho facilmente riconosciuta la dissolubilità dell' oro dalla sola combinazione dello spirito volatile caustico coll' acido marino, purchè s' impieghino l' uno e l' altro, e principalmente il primo, in istato di massima concentrazione, benchè però ognuno di questi liquori separatamente non manifesti la menoma azione sopra questo metallo; ciò che darebbe a divedere, che l' accennata proprietà è il risultato d' una combinazione dell' acido marino con altri principj, i quali devono incontrarsi nello spirito volatile caustico.

74. Considerando però la natura di questo fluido, nel quale si trovano oltre ai principj alcalini volatili quelli ancora dell' acido marino spogliato notabilmente di umidità, e inzeppato per contrario di parti flogistiche; avuto riguardo al costante fenomeno della riferita efflorescenza, sempre che vi abbia evaporazione, ed allo sviluppamento de' fumi bianchi ogni qualvolta si promove la separazione delle parti più volatili dell' acido marino da quelle che sono più fisse; parmi ragionevole l' attribuire questa proprietà di disciogliere l' oro alle alterazioni provenienti dal difetto di principio acquoso nell' acido marino, dal quale, oltre all' accrescimento di concentrazione, viene indotta probabilmente una maggiore attenuazione, ed una differente distribuzione delle parti infiammabili, piuttosto che di riconoscerla unicamente dall' impoverimento delle stesse parti infiammabili, come si vorrebbe dai rispettabili Accademici di *Upsal*.

75. Questa efflorescenza sembrami identica co' fumi bianchi, che spande l' acido marino al suo contatto coll' aria libera, e se male non m' appongo risulta medesima dalla svaporazione che si promove in questa circostanza d' una parte del flogisto, non altrimenti che nel gaz nitroso, e come succede all' acido sulfureo; laon-

de ſono queſti vapori per riſpetto all'acido marino quello che ſono i vapori roſſi dell'acido nitroſo conoſciuti ſotto il nome di gaz nitroſo per riſpetto a queſto acido, colla differenza che baſta l'umidità, contenuta nell'aria atmoſferica, al gaz nitroſo per condenſarſi e preſentarſi ſotto forma d'acido, ed all'incontro richiedeſi maggior quantità d'umido per la condenſazione del gaz marino; il che ſembrerebbe dimoſtrare, che queſto è in uno ſtato di maggior concentrazione, ch'egli è meno aderente al principio acquoſo, e che in virtù di queſta minore affinità egli ne può contrarre un'aſſai maggiore in queſte circoſtanze col principio infiammabile; di modo che ſembrami molto meno da attribuirſi alla ſflogiſticazione, che alla maggior concentrazione dell'acido marino, la proprietà ch'egli acquiſta in queſte operazioni di diſciogliere l'oro (*cc*).

76. Queſte ſperienze dimoſtrano finalmente colla più deſiderabile evidenza, che lo ſtato di fluidità, nel quale ſi ottiene l'alcali volatile cauſtico per mezzo della calce, non dipende unicamente dalla quantità dell'acqua impiegata nel proceſſo; mentre ſe queſta foſſe di ciò la

(*cc*) Dalla aderenza del principio acquoſo dell'acido del nitro, maggiore che non è nel marino, nel vitriolico, e nel vegetale medeſimo, parmi che ſi poſſa ripetere quella che ſi manifeſta nel colore de' fumi, che eſalano, ſembrandomi la tinta roſſa de' vapori nitroſi un ſegno manifeſto dello ſtato di concentrazione della materia infiammabile, la quale tende a diſguarſi colla volatilizzazione, afferrando con avidità l'umido ſpirſo nell'atmoſfera. Le calci metalliche altresì non acquiſtano il colore roſſo, ſe non dopo una grandiſſima diſſipazione del principio acquoſo, dalla quale dipende quella d'una proporzionata quantità di flogiſto; vale a dire di quella che non ha avuto tempo di combinarſi colle parti metalliche fiſſe, e di trasformarſi col carattere di cauſticità. Per altro il gaz marino prodotto dalla combinazione di queſt'acido col vitriolico, il quale è ſommamente elaſtico, non conſerviſce almeno ſenſibilmente la proprietà diſſolvente dell'oro all'acido marino, entro il quale ſi fa feltrare per mezzo de' ſopraleſcritti apparecchi; laonde ſempre meno probabile diventa l'opinione che aſcrive la diſſolubilità alla ſola ſflogiſticazione.

cagione esclusiva, non avrei dovuto ottenere che pochissima quantità d'alcali volatile concreto dalle testè riferite scomposizioni del sale ammoniaco coll' olio di tartaro, col liscivio caustico, e col liquore siliceo; mentre il rapporto dell' umidità, che si trovava in questi processi, colle parti concrete era di gran lunga superiore all'acqua, che soglio impiegare nella combinazione di questo sale colla calce viva; onde parmi attribuibile in gran parte alla differenza dell'azione del principio caustico contenuto nella calce da quella, che ha luogo nell' alcali fisso sul flogisto disseminato nel sale; di modo che la calce viva alterando con maggior energia questo principio, e ritenendone una più notabile quantità l'avanzo che passa associato coi vapori dell'acido, ripiglia lo stato, e il carattere di materia infiammabile, cioè si carica di nuovo delle parti acquose state espulse, e col mezzo delle acide passando ad uno stato saponaceo, resta agevolata la loro dissoluzione nell'acqua.

77. Questa teoria concilia ottimamente l'effetto, che si ottiene dalle sostanze metalliche, o dalle loro calci combinate collo stesso sale ammoniaco, senza che s'incontri la ripugnante contraddizione, che presenta quella del Sig. *Black*, nella quale si vedrebbe la privazione, e l'abbondanza d'uno stesso principio (cioè del gaz mefitico) produrre un medesimo effetto; poichè le parti metalliche, e specialmente le calci nell' impadronirsi d'una grandissima parte della materia infiammabile contenuta nel sale ammoniaco favoriscono le espulsioni dell'acqua di cristallizzazione del sale medesimo, non avendo alcuna disposizione a seco combinarsi; e mentre procurano la dissoluzione dell'alcali volatile si fa altresì l'unione delle parti acide sommamente concentrate colle parti metalliche; di fatto si ottiene il piombo corneo, se siasi impiegata la calce di piombo; un zafferano marziale, se sia stata usata la limatura di ferro, della quale si volatilizza però una parte; e si osserva che la scom-

posizione riesce sempre molto imperfetta colle sostanze sotto forma metallica, e per contrario molto più compiuta colle calci; e che per ultimo lo spirito volatile caustico che si raccoglie è sommamente penetrante, ed efferveſcente ad un tempo con quello che si ottiene colla calce viva nel modo da me divisato.

78. Non debbo abbandonare questo soggetto senza riferire ciò, che ho osservato intorno ad un metodo, che trovasi descritto alla p. 282. del tom. 1.° delle Lezioni di Chimica del Sig. *Fourcroy* sotto l'autorità del dotto Accademico Sig. *Bucquet*. Con la scorta di numerose sperienze s'era egli assicurato, che la miglior proporzione da seguire per il processo dello spirito volatile caustico era quella di una parte e mezza di calce contro una di sale ammoniaco; soggiugnendo, che la calce estinta all' aria scompone questo sale non altrimenti che la calce viva (*dd*): asserzioni affatto contrarie al sentimento unanime de' Fisici, e segnatamente contraddittorie alle sperienze ingegnosissime del Sig. *Duhamel*, e se m'è permesso farne menzione, anche alle mie stampate nel tom. 2.° degli Atti dell' Accademia di Torino. Tuttavia non dovendosi rigettare fatti positivi senza sicuro fondamento, ho creduto di doverne fare sperimento.

79. Ho pertanto meschiato accuratamente 18. onc. di calce ben viva e grossamente pesta con 12. onc. di sale ammoniaco pestato minutamente, e su questa mistura introdotta con prestezza nella storta *A* di vetro (*fig. I. II. tav. I. II.*), il cui orisizio introdotto nel tubo di comunicazione *CC* è stato diligentemente lutato. Pochissime furono le bolle, che attraversarono l'acqua del

(*dd*) Il Sig. *Bucquet* si è inoltre assicurato con molte esperienze, che non vi vuole ordinariamente, che una parte e mezza di calce, invece di tre che solevano impiegarsi, per iscomporre una parte di sal ammoniaco. La calce estinta all' aria scompone questo sale ugualmente che la calce viva.

recipiente, che comunicava col pallone *X*, ed erano lontane le une dalle altre. Non vedendo comparire addensamento di vapori fu messo il fuoco sotto il bagno di sabbia, il quale essendo assai riscaldato diede luogo alla distillazione debolissima di qualche goccia di liquore, che di tanto in tanto si vedeva cadere dall'orifizio del tubo *CC* nel pallone *X*. Quando ad un tratto, cresciuta l' intensità del calore, ho veduto succedersi sempre più prossimamente le gocce di liquore; e siccome era il pallone tubulato inferiormente per comunicare con una boccia di vetro *E*, nella quale precipitava questo liquore, cominciò a formarsi al margine del tubulamento una concrezione saliforme, la quale andò crescendo perpendicolarmente in grossezza di circa 2. linee di diametro in forma di stalattite, e si vedeva il fondo del recipiente pieno di minuti pezzi di questa sostanza concreta.

80. Fu l' operazione molto più lunga delle conosciute sinora, e non ebbi gran difficoltà a riconoscere, che erasi fusa la storta, come aveva sospettato dall' osservata accelerazione dello sviluppamento de' vapori; indotto a formare questo sospetto dall' essermi accaduto altra volta di ottenere del sale ammoniaco fluido invece di fiori, distillando questo sale entro a cucurbite di creta guernite di capitello di vetro, o anche in cucurbite di vetro, nelle quali erasi fatta qualche accidentale fessura nel tempo dell' operazione; essendomi occorso altresì di veder fuse le storte prima dell' intiera operazione, allorchè per moltiplicare la superficie della materia, ed impedirne l' eccessivo addensamento ho mescolato dell' arena colla calce, ed il sale ammoniaco. Laonde cessa ogni singolarità ne' fenomeni di questo processo, da che si riscontra stabilita la comunicazione tra la calce, il sale, l' arena del bagno, e conseguentemente coll' aria esterna.

81. Il seguente sperimento somministra finalmente una prova convincente dell' esclusione del principio generalmente

mente adottato per ispiegare i fenomeni di questa scomposizione; quantunque ella sia assai uniforme a quella del Sig. *Bucquet*, credo tuttavia di dover dare la preferenza a ciò, che fu da me fatto, perchè forma in 1.° luogo un anello nella catena delle mie prove, ed in 2.° luogo perchè ho usata ogni più scrupolosa diligenza per escludere l' influenza dell' acqua nell' apparecchio, acciò che non rimanesse equivoca l' azione che risulterebbe del gaz sopra la calce viva. Ho dunque messo della calce viva polverizzata sopra un setaccio, e l' ho sospeso in mezzo ad una gran campana di cristallo agglutinata con cera molle ad un piattellino, che si adattava per mezzo d' un tubo a chiave alla macchina pneumatica, ond' estraervi l' aria, e quindi riempierla d' aria fissa prodotta dalla combinazione del sale di tartaro coll' acido vitriolico, e seltrata entro ad un tubo pieno di sale di tartaro ben secco prima di passare nelle vesciche, in cui veniva raccolta pel fine suddetto.

82. Un tubo ricurvo con entro argento vivo serviva d' indice a questo apparecchio, ed ogni volta che scorgevali diminuita l' elasticità del gaz mefitico, se ne somministrava una nuova quantità. Benchè non possa esattamente dire quanto tempo sia rimasta esposta questa calce all' atmosfera gazosa, posso però assicurare, che vi fu dimenticata lungo tempo al di là di quello che ne ritenne in circostanze somiglianti il Sig. *Bucquet*. Non ho però trovato gran variazione di peso nella medesima; ma la superficie mi parve meno arida, ed il gaz avea fatta una notabile impressione sul piattellino a segno che stimerei prudente, dovendo ripetere sì fatte esperienze, di rivestire il medesimo di qualche invernicciatura, quale è quella che si usa dagl' Incisori in rame.

83. Questa calce combinata con un terzo del suo peso di sale ammoniaco, e di acqua in quantità sufficiente somministrò gli stessi prodotti, che ho ottenuto da

altrettanta calce pesta della stessa qualità, che aveva custodito in un recipiente chiuso, perchè non avesse comunicazione coll' aria; erano perciò ineffervescenti i liquori, e non mi fu possibile di riconoscere il più piccolo segnale, che questa calce avesse operata la scomposizione del sale ammoniaco in qualche maniera analoga a quella delle terre calcaree. Il Sig. *Bucquet* ha altresì osservato questa perfetta uniformità, non altrimenti che colla crosta saliforme dell' acqua di calce, e colla calce estinta da circa sei anni, e finalmente colla calce lavata: di modo che sembrami fuori d' ogni sospetto la prova, che ne deduco, della niuna influenza del gaz mefitico in queste scomposizioni.

84. I risultati della coobazione dello spirito volatile caustico sopra la calce viva riferiti al §. 21., ed avvalorati da quelli dello stesso liquore sulla pietra caustica, sopra il vetro siliceo, sembrerebbero dimostrare, che le effervescenze non altrimenti che le alterazioni recate dalla calce al sale ammoniaco, delle quali s' è fatta menzione al §. 34., fossero dovute al solo impoverimento del principio acquoso di queste sostanze; ma essendomi assicurato, che dall' aggiunta che si fa dell' acqua distillata a queste materie non risulta il menomo movimento, il quale possa veramente indicare un principio di vera effervescenza, parmi di essere sempre più fondato nel conchiudere, che non debbono attribuirsi al solo difetto di questo principio i mentovati fenomeni, ma che dipendono veramente dall' azione, e reazione de' principj costituenti le sostanze, le quali scomposte reciprocamente somministrano nuovi prodotti; e quanto maggiore sarà la forza originale di contatto tra i principj, che compongono ciascheduna sostanza, tanto più cospicui risulteranno gli effetti nello sforzo energico, che mutuamente si farà per una distribuzione equilibrata entro la massa totale; dove che sminuita notabilmente l' aderenza de' principj più volatili, se ne fa-

rà una diſſipazione proporzionata all'antagoniſmo delle forze ſuddette. Le diviſate ſoſtanze cauſtiche ancorchè peſtate non producono finalmente il menomo moto di effervescenza collo ſpirito di vino nè coll' olio di tartaro. Siccome però il principio acquoſo è il veicolo, che favoriſce la diſtribuzione, e l'equilibrio tra i principj conſtituenti; così più evidente appariſce non ſolo la neceſſità della reſtituzione del medeſimo; ma dalla eſpulſione ſi può eziandio fondatamente ripetere l' origine de' ſin qui riferiti effetti.

85. Ravvicinando pertanto le già fatte oſſervazioni, ſembrami di avere tutto il fondamento di conchiudere, che il gaz ammoniacale non è altro che un inzeppamento dell' aria comune eſpulſa dalle parti acide flogiſtiche alcali volatili, e di qualche piccola porzione della terra calcarea più tenue, diſſeminate tra le parti acquoſe ridotte in vapori dal calore; ciò che ſempre più convince dell' inſuſſiſtenza della teoria dipendente dalla privazione d' un principio pneumatico per dedurre l' inefferveſcenza delle materie cauſtiche cogli acidi, e della coſtante fluidità, e cauſticità dello ſpirito volatile cauſtico.

86. Non ſarà forſe eſtraneo al mio oggetto di notare alcune differenze importanti, che ſi trovano tra l' alcali volatile concreto, e l' alcali volatile cauſtico, o per meglio dire ſpirito volatile prodotto dalla calce: nè ſarà inutile l' oſſervare prima d' ogni coſa, che l'alcali fiſſo e la creta non eſſendo materie così ſemplici e ridotte ad uno ſtato di eſtrema aridità, quanto lo è la calce, da queſto difetto appunto totale di principj di diverſa natura ſi dee ripetere la perfetta inazione di queſta ſopra le ſoſtanze compoſte, quando non ſia prima caricata d' altro principio ſemplice, fra' quali domina ſempre l' acquoſo. In queſte circoſtanze diventa poi l' azione ſua d' una energia ſuperiore a quella d' altre ſoſtanze meno ſemplici; e quanto ſi dimoſtra iner-

te, ed incapace alla ſcompoſizione del ſale ammoniaco, allor quando è nello ſtato di maſſima parità, altrettanto efficacemente diſcioglie e ſcompone queſto ſale, ogni volta che carico di principio acquoſo dà anſa alla calce, ond' eſercitare la ſua cauſticità ſopra la materia infiammabile nel medeſimo contenuta; e da queſta originale operazione ſuccedendo il rapido indebolimento della forza di contatto tra l' acido, e l' alcali volatile, ſi riduce in gran parte l' acido ſimultaneamente ſotto forma gazoſa per la ſua combinazione eſtemporanea colle parti flogiſtiche, alle quali imprime un carattere ſaponaceo, ed eſtricandoſi in vapori coll' alcali volatile ſi ſcioglie entro una parte notabile dell'acqua impiegata, e la invola e rapiſce con sè.

87. Laonde non è ſtrano, che ſia in queſta ſcompoſizione neceſſaria l' acqua, ſenza che ſe ne richieda per quella che ſi ſa coll' alcali fiſſo, e colla creta; e parmi altresì di poter dedurre in 1.° luogo, che la reciprocità dell' azione di varie ſoſtanze ſarà in ragione della moltitudine de' principj conſtituenti, di natura tra di loro differente; e però in 2.° luogo quanto più s' accoſteranno allo ſtato di perfetta omogeneità, altrettanto maggiore ſarà la difficoltà che ſi avrà a ſuperare per alterarle, e verrà riſtretta a principj, e parimenti ſemplici, la facoltà di agire ſopra le medeſime; e potrà perciò in 3.° luogo riguardarſi queſta reſiſtenza alla ſcompoſizione come una miſura del grado di ſemplicità di ciaſcuna ſoſtanza, e ſervirà a rilevare la forza di contatto tra le ſue parti conſtituenti.

88. L' alcali volatile concreto acquiſta un accreſcimento di peſo maggiore di quello che fa lo ſpirito volatile, ed è altrettanto diſpoſto, anzi debbo dire aſſai più, a caricarſi del ſuo intermezzo, di quello che ſia lo ſpirito volatile; di fatto ripetendo la coobazione d' una data quantità d' alcali volatile ſopra nuovo alcali

fisso, cresce di peso il prodotto (*ee*); ed al contrario va sempre scemando quello dello spirito volatile sopra nuova calce ben viva.

89. Non è così penetrante nè causticò l' alcali volatile concreto, come lo è lo spirito volatile tratto dalla calce, e continua ad essere effervescente cogli acidi quantunque sciolto nell' acqua; e per contrario molto più stimolante è lo spirito volatile, e diventa ineffervescente quando si trova diffuso in conveniente quantità d' acqua.

90. L' alcali volatile concreto non è infiammabile quantunque ridotto in vapori anche coll' azione del fuoco, ed infiammabile si riscontra lo spirito volatile caustico, come già è stato riferito dal celebre Sig. *Cigna* mio Amico, e Collega nell' eccellente suo Opuscolo: *de causa extinctionis flammæ, & animalium in aere intercluso rum*, stampato nel 2.° vol. degli *Atti dell' Accademia di Torino* per gli anni 1760. 1761. p. 194. §. 40. succedendo però in questo una singolare anomalia, mentre dipende l' infiammabilità da un certo rapporto tra i principj dello spirito volatile, e la quantità dell' acqua, nella quale si trovano distribuiti; avendo più volte osservato, che lo spirito volatile sommamente concentrato non è suscettibile d' infiammazione, almeno in quelle stesse capacità chiuse, nelle quali diventa infiammabile, diluendolo solamente con una data quantità di

(*ee*) Ho ripetuta quattro volte questa coobazione, e sempre l' alcali volatile ricavato si è accresciuto di peso: se avessi avuto ozio avrei proccurato di assicurarmi del limite, cui può estendersi quest' aumento; ma intanto mi sia permesso di osservare che succede lo stesso come del sublimato corrosivo col mercurio, il quale va caricandosi di questa sostanza metallica, com' è a tutti noto; e però sembra dovuto alla presenza dell' acido muriato contenuto in queste materie il successivo rapimento di queste sostanze.

acqua distillata (*ff*). Egli è però altresì vero che lo stesso spirito volatile riconosciuto infiammabile entro grandi capacità o non s' infiamma, o a stento può infiammarsi entro capacità meno alte e meno spaziose; non dovendo neppure ommettere di riferire che in una campana, nella quale i vapori d' uno spirito volatile caustico concentrato non possono essere infiammati dall' introduzione d' un cerino acceso pel buco praticato nel piattellino, sul quale ella s' appoggia, se si apre la comunicazione superiore della medesima, e vi si presenti un altro cerino parimenti acceso, s' infiamma la corrente de' vapori; e finalmente succede non di rado, che i rimanenti nella campana stessa prendano fuoco dalla fiamma inferiore. Dal che parmi potersi raccogliere, che il troppo ravvicinamento delle parti infiammabili sia nocevole alla stessa infiammabilità, e perciò dipenda la proprietà dell' infiammazione piuttosto dalla maniera d' essere, che dalla quantità della materia infiammabile, come già ho osservato. Siccome però in queste circostanze spegnesi la fiamma del cerino nell' atto della sua introduzione, anche dopo alcuni momenti della libera comunicazione de' vapori alcali volatili coll' aria comune, sembra dimostrare questo effetto, che l' eccessiva condensazione del flogisto riduca questi vapori allo stato mofetico.

91. Questa osservazione accostata a quelle che sono riportate dal Sig. *Priestley* nella copiosa sua raccolta di sperimenti sulle diverse specie d' aria, e segnatamente nella terza Sezione della prima Parte, e nella quinta della seconda Parte del primo Volume, eccita un son-

---

(*ff*) Costante osservazione (della quale mi verrà forse in acconcio di far uso in progresso) si è, che tra il grado d' infiammabilità e quelli delle opposte metificità, singolarmente in quella parte, ove ha luogo una somma concentrazione, la fiamma riceve uno straordinario allungamento, e s' ingrossa notabilmente nell' altra.

dato ſoſpetto, che il gaz infiammabile poſſa riſolverſi unicamente in gaz mefitico tanto per un eccesſo di concentrazione delle parti flogiſtiche, quanto per una ſoverchia loro aſſociazione col principio acquoſo; onde ſembrerebbe poſſibile che un gaz mefitico per difetto d' umidità poteſſe paſſare all' infiammabilità, e quindi di nuovo al mefitiſmo mediante una proccurata combinazione di parti acquoſe, e viceverſa.

92. Dall' aſſeveranza poi di queſto inſtancabile Scrittore, che il gaz infiammabile prima di paſſare allo ſtato mefitico ſi riduca al caſo di ſervire alla conſervazione della fiamma, ſembra naturale il dedurre la confermazione di quanto ho eſpoſto intorno alla natura di queſti fluidi aeriformi; di modo che il rapporto di quantità che trovaſi tra' principj volatili, de' quali s' imbevono le parti dell' aria contemporaneamente eſpulſe, coſtituiſce le varietà d' una medeſima ſpecie; e l' eſcluſione o la ſoſtituzione di alcuni principj di diverſa natura ed indole coſtituiſce la differenza ne' generi di queſti fluidi aeriformi; così dall' aſſociazione del flogiſto ſtrappato alle materie infiammabili ſi raccoglie un gaz infiammabile, perchè appunto nelle ſoſtanze metalliche ſono le parti infiammabili in uno ſtato di maſſima concentrazione, e di vero flogiſto, il quale, come ho oſſervato, è alterabile da due cauſe affatto oppoſte; e forſe per ragione appunto della eccesſiva concentrazione e volatilità, e della poca aderenza non ſi può ottenere infiammabile il gaz prodotto dall' acido nitroſo; mefitico per contrario ſi ottiene il gaz dalle terre, e dalle ſoſtanze ſaline, probabilmente in virtù della ſeconda circoſtanza rilevata, cioè perchè la materia infiammabile involta ne' ſali e nelle terre trovaſi ſempre più carica di principj acquoſi, e non mai in iſtato di flogiſto; laonde nel caſo de' metalli i vapori acquoſi che s' inalzano dalla ſcompoſizione degli acidi proccurano l' infiammabilità alle parti del flogiſto, che in queſto ſtato non ſarebbero capaci d' infiammazio-

ne; e nel caso delle sostanze saline, o terree i vapori che si elevano sono in una proporzione troppo grande, perchè possa aver luogo questa proprietà nelle parti infiammabili già saziate di principio acquoso.

93. Nè è fuori di probabilità il congietturare, che in questi gaz non segua scomposizione degli acidi, o non sia almeno così intima, come avviene colle sostanze metalliche, e ad ogni modo affatto contrarj sono gli effetti di queste combinazioni. Di fatto se nel tempo che si fa del gaz infiammabile coll' acido vitriolico sul ferro, si procuri l' associamento d' un alcali fisso, come dell' olio di tartaro, non solo cessa la produzione del gaz infiammabile, ma si fa un repentino, e cospicuo assorbimento, e molto più sensibilmente si manifesta la parte che ha il principio acquoso in queste produzioni gazose; laonde il difetto e l' eccesso del principio acquoso toglieranno l' infiammabilità, e sarà affatto opposto il mezzo da tentarsi, onde rendere infiammabili i gaz mefitici, dovendo procurarsi la concentrazione di quelli che abbondano di principio acquoso, e per contrario diluirsi quelli ne' quali vi è eccesso di concentrazione delle parti infiammabili. Uno de' segni caratteristici di questi è l' instantanea, e totale estinzione della fiamma al solo accostarla al gaz; mentre è meno pronta, e men compiuta ne' gaz mefitici vaporosi.

94. Quantunque sia vero, che seguono alterazioni negli acidi dietro alla loro combinazione con altre materie, sulle quali esercitano le loro proprietà, non potrei però concedere che generalmente ne risultasse un acido assolutamente identico; ancorchè su le prime anch' io avessi formato lo stesso concetto. Il sentimento del celebre Sig. *Bergman*, e l' ingegnoso lavoro del dottissimo Sig. Cav. *Landriani* sono per verità di troppo gran peso, perchè possa dissimularmi il merito de' loro ingegnosi argomenti; ma appunto perchè l' apparenza e certi caratteri generali sembrano favorire questa opinione, ho

ho creduto di doverne fare l'oggetto d'una ſcrupoloſa ricerca, e mi è riſultato che ciaſcuno di queſti fluidi non ſolo conſerva veſtigj deciſivi, e caratteriſtici dell'acido, che ha ſervito al loro ſviluppamento, ma dimoſtrano alterazioni diverſe e dipendenti dalle ſoſtanze paſſive che vi hanno dato luogo.

95. Troppo vaſta ſarebbe la materia, e troppo forſe mi ſono già fatto lecito di dilungarmi, sì che non mi ſtenderò più oltre per ora ſu queſto punto, baſtandomi d'indicare il mezzo, che mi è riuſcito più acconciamente per queſte eſplorazioni, il quale conſiſte nell'acidulare quanto più ſi può dell'acqua diſtillata colla filtrazione de' gaz, e quindi valerſene ſpezialmente ſopra de' ſali metallici (*gg*).

96. Mi reſta per ultimo da oſſervare che molte ineſattezze, nelle quali poſſono aver inciampato alcuni Fiſici, dipendono dalla inſufficienza de' mezzi creduti coercenti, e che generalmente s'impiegano per ritenere queſti fluidi elaſtici: avviſo da me dato, riguardo all'acqua ſpecialmente, per determinare l'aſſorbimento ſino dall'anno 1759. ſulle premure fattemene dal medeſimo celebre Sig. *Hales*, e che trovaſi nel 2.° vol. degli Atti dell'Accademia di Torino per gli anni 1760. e 1761. alla p. 133, e ſeguenti, e che ho creduto di dover confidenzialmente rinnovare a qualche valente Fiſico, col quale ebbi a trattare di queſti fluidi; ragion dunque vuole che ſi cominci dall'oſſervare, che non può farſi operazione alcuna in vaſi chiuſi ſenza che ſegua una dilatazione più o meno riguardevole dell'aria contenuta nelle capacità, e conſeguentemente un traſporto del-

(*gg*) Tra' ſali metallici credo di dover annoverare le calci metalliche fatte cogli acidi, e queſte principalmente ſono atte a dimoſtrare le accennate differenze.

la medesima nelle parti più distanti dalla causa di queste rarefazioni, di modo che non proccurandosi una circolazione d' aria per restituire liberamente la quantità che ne' è espulsa, e che non può retrocedere per causa de' mezzi coercenti, che si sono impiegati, non può a meno di succedere che riesca minore la quantità d'aria di quello che era nelle capacità principali, nelle quali si fanno le operazioni: ora l'aria espulsa può giugnere fino ad un certo grado di condensazione, e farsi luogo per mezzo della compressione dell' acqua; ma ogni qualvolta segua questa composizione di forze, cioè del peso dell' aria con quello d'una quantità d' acqua, per istabilire l'equilibrio tra l' aria esterna, e l'atmosfera contenuta dalle capacità, sempre succede un' espulsione progressiva dell' aria o del fluido elastico alla superficie dell' acqua che supera il livello in ragione della superficie medesima, e probabilmente del maggiore inalzamento dell' acqua, sintanto che ripigli la medesima il suo livello; così anderà scarcerandosi l' aria contenuta nell' acqua entro la campana, mentre dalla superficie esterna ne succhierà dall' atmosfera se l' acqua entro la campana si trovi inalzata sopra il livello; e per contrario si svilupperà dalla superficie esterna per passare nell' atmosferà libera, allorchè per la condensazione del fluido contenuto sarà nella campana l' acqua sotto il livello, e anderà assorbendo quest' acqua altrettanto fluido, quanta è la dissipazione che si fa dall' esterna superficie.

97. Non ho fin qui considerato che la rarefazione dell' aria in una parte dell' apparecchio, ed il suo addensamento nell' altra; ma se si rifletta alla complicazione di cause che debbono rendere difettosi questi apparecchj, si vedrà colla maggior evidenza l' impossibilità di rimediarvi per la moltitudine delle incognite, ond' è intrecciato il problema; ed un abbozzo alla sfuggita basterà, come spero, a convincere di questa verità. Risulta egli dall' esame de' medesimi, e dalle operazioni

che vi si fanno per lo sviluppamento de' diversi gaz, i quali sono sempre prodotti o dalle effervescenze senza sussidio di fuoco, o dalle scompositioni risultanti dall' azione del medesimo, o finalmente dal concorso di entrambi questi mezzi. Oltre il di già osservato sbilanciamento di equilibrio nelle parti dell' aria contenuta nelle capacità, dee per necessità risultare dalle accennate operazioni uno sviluppamento o di esalazioni in istato di siccità, o di vapori più o meno pregni d'umido. Se saranno in uno stato di perfetta privazione di principio acquoso, è naturale che involeranno l'umidità, che accompagna la parte dell' aria contenuta nelle stesse capacità, ed a quel punto l'aria stessa spogliata dell'umidità sua essenziale per essere respirabile, dee di necessità soffrire alterazioni più o meno essenziali nelle sue proprietà; e perciò si può fondatamente far quistione, se non sieno alterate le leggi ordinarie e cognite, e per lo meno, se non sia notabilmente variata la sua elasticità; e se continui ad essere atta alla conservazione della fiamma.

98. Se al contrario sono le esalazioni accompagnate da vapori umidi, quale sarà la quantità di cui potranno caricarsi le parti dell' aria in questo stato di dilatazione? quali modificazioni riceveranno da questo accoppiamento tanto nell'essenza loro, quanto nelle loro proprietà? Saranno le une e le altre della stessa natura ed indole, tanto le umide quanto le aride? In somma chi potrà lusingarsi di giugnere a determinare individuatamente il rapporto, che vi può essere tra la forza di tanti principj differenti più sospettati che noti, onde fissare con qualche esattezza il grado di forza del rispettivo loro contatto?

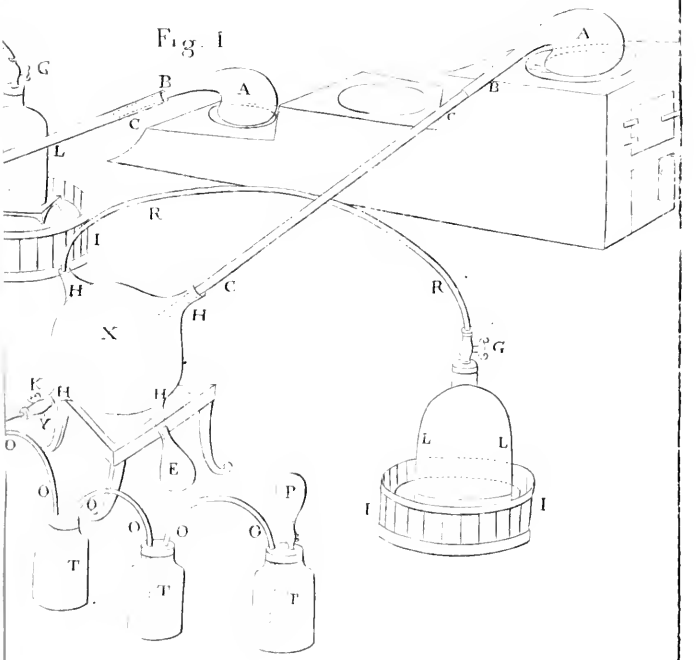
99. Se poi si rifletta alle differenze, ed alle indispensabili alterazioni, che debbono essere prodotte dal solo combaciamento di questi fluidi colla superficie dell' acqua, o dalla feltrazione loro più o meno cospicua en-

tro la medeſima, diffondendoviſi per mezzo d' una più o meno violenta agitazione, neſſuno potrà diſſimularſi le molte dubbietà, in cui dovrà involgerſi, non potendo aſſicurarſi nè della qualità, nè della quantità de' principj che ſaranno ſtati ritenuti per mezzo della diſſoluzione, o di nuove combinazioni; e niente meno ſoſpette potranno riuſcire le induzioni, che ſi farebbero coll' uſo dell' argento vivo medeſimo, poichè in molte circoſtanze può dimoſtrarſi inſufficiente al propoſto oggetto di ſervire di mezzo veramente coercitivo, venendo viſibilmente alterato non ſolo nella ſuperficie comunicante colle capacità, ma eziandio lungo le colonne rinchiuſe ne' tubi barometrici; ed in alcune altre eſſendo evidente l' alterazione prodotta eſcluſivamente ſulla parte comunicante coll' atmoſfera.

100. La natura di queſte diſcuſſioni richiederebbe una ſerie di rigoroſi ſperimenti per ricevere quel grado di evidenza, che merita l' importanza del ſoggetto, e che volentieri avrei preſentato come un giuſto tributo alla nuova *Società Italiana*, ſe un giuſto ſentimento di riverente ſtima per tanti riſpettabili Accademici non mi tratteneſſe dall' eccedere i confini di un Opuſcolo, come già ho detto, forſe anche troppo diffuſo.

Fig. II

Fig. I



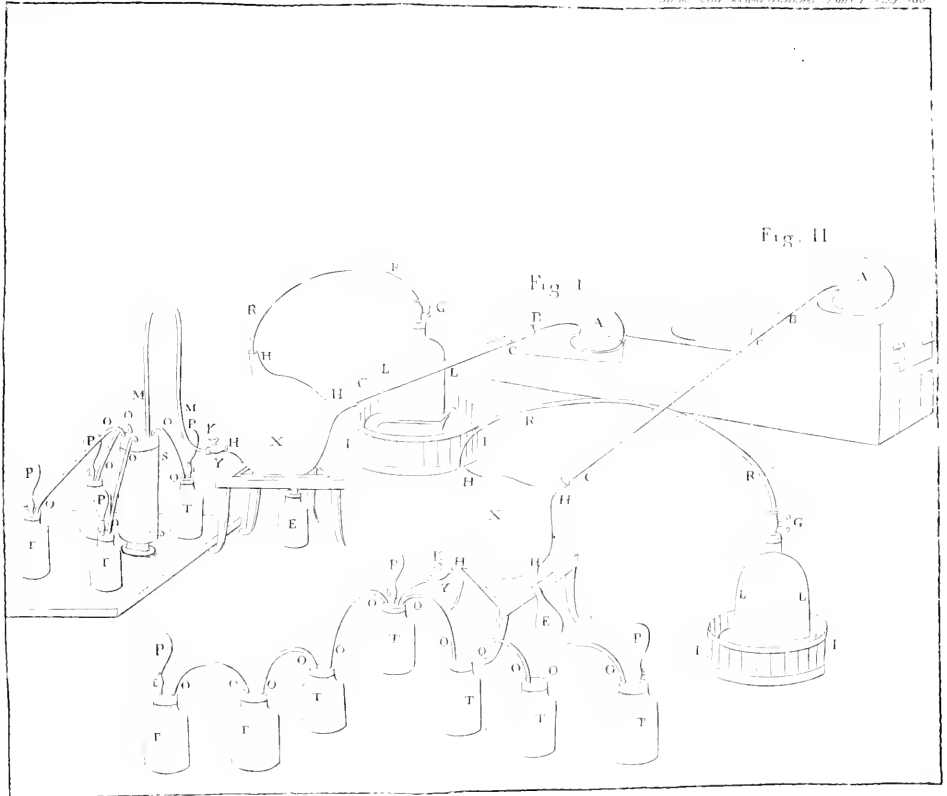
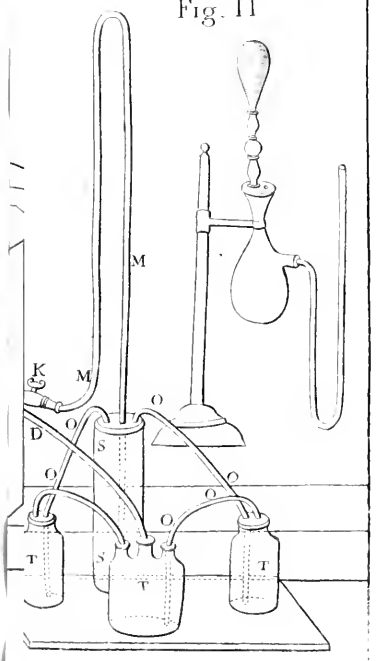


Fig. I
Fig. II

Fig. II



T I

E

nache

Regio
fità di

che.

niranda
rà gio-
rigene-
la vec-
prima
izione
le ter-
lo che
a uno

Tavo-
ie per
esimo.

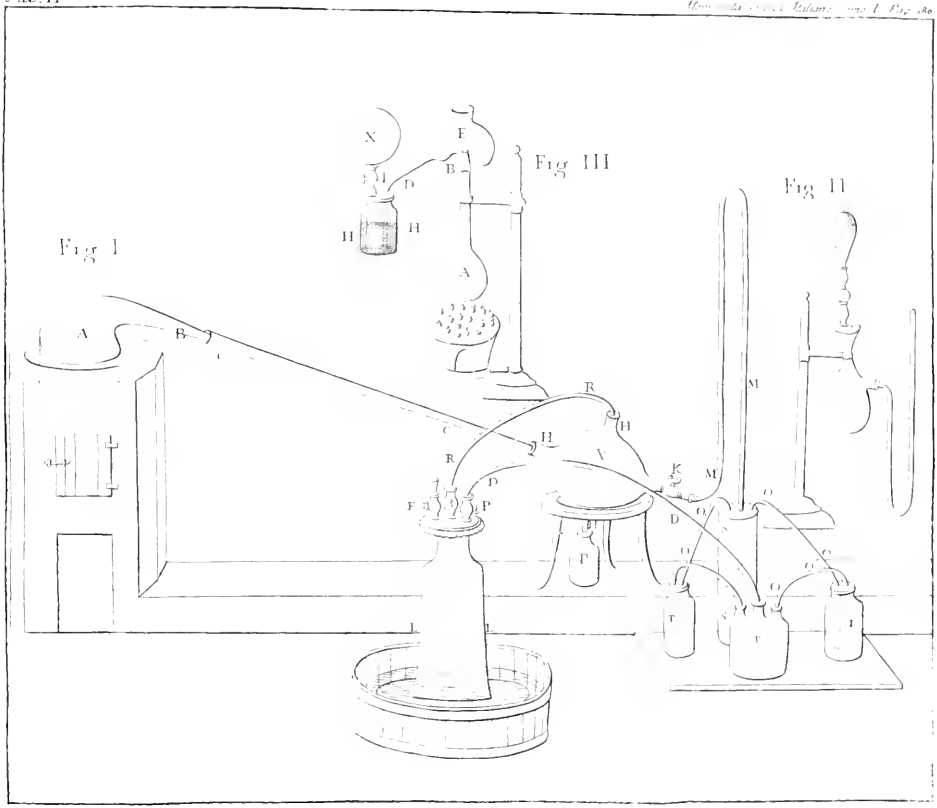


Fig I
Fig III
Fig II
A
B
C
D
E
F
G
H
K
L
M
N
O
P
R
S
T
V
X

RISULTATI
DI ESPERIENZE

Sopra la Riproduzione della Testa nelle Lumache terrestri (a)

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore di Storia naturale nell' Università di Pavia.

ARTICOLO I.

Descrizione anatomica della testa delle Lumache.

A Persuadere più facilmente di questa ammiranda riproduzione il dotto e curioso Lettore sarà giovevolissimo il far vedere che la novella testa rigenerata non differisce punto ne' suoi componenti dalla vecchia recisa. Ma ciò conseguir non possiamo se prima col lume dell' anatomia non venghiamo in cognizione delle parti onde è formata la testa delle lumache terrestri, la quale trovasi assai più composta di quello che a prima giunta si sarebbe creduto. Ogni qualvolta uno

(a) La presente Memoria è tratta dal mio Libro sopra le *Riproduzioni Animali*, che a quest' ora sarebbe già pubblicato, se non restassero da ultimarsi alcune Tavole di Figure troppo necessarie per la piena intelligenza del medesimo.

di queſti rettili (*b*) è quanto lo può eſſere fuori del guſcio nativo, mette in viſta tutta la lunghezza del collo, e del capo, dal quale ultimo ſpuntano nella parte d' avanti le quattro corna, cioè a dire le due maggiori per di ſopra, e le due minori per di ſotto; le quali quattro corna, allungate pienamente che ſieno, finiſcono in un globettino portante nelle due maggiori un punto nero che comunemente ſi crede eſſer l' occhio. Al di ſotto immediatamente delle due corna minori appariſcono i labbri, che quando ſi aprono, e che mangia l' animale, manifeſtano i piccioli denti. Coteſte parti, compreſo anche il collo, ſono tutte quante ſeminate di picciole glandoloſe granella ſomiglianti in certo modo a quelle d' una fragola, o fatte, come diremmo noi, a *fagrino*. Solamente queſto ſagrino alle corna, e alle labbra è più fino che ſu la teſta, e ſul collo. Per l' oppoſito la parte inferiore della lumaca non è niente granelloſa, ma affatto liſcia, e ſfuggevole, quella cioè che da alcuni Naturaliſti non impropriamente chiamaſi *piede*, per appoggiarſi ad eſſa l' animale quando ſi ſtraſcica. E queſto è ciò che può eſpiare la viſta ſenza il ſoccorſo del coltello anatomico, al quale però ſiamo aſtretti di ricorrere, volendo noi penetrare l' interno della teſta, che è l' oggetto delle noſtre ricerche. Ma noi non poſſiamo notomizzare la lumaca viva. Al ſolo lievemente toccarla, di allungata che era, ſi contrae tutta, ſi ritira precipitoſamente nella ſua caſetta, e vi ſi naſconde. Che ſe rompaſi eſſa caſetta per eſaminarla, il capo, e le corna trovanſi allo-

(*b*) Chieggo perdono ai Signori Linneani ſe non mi ſento diſpoſto di annoverar le lumache tra i *Vermi*, ſiccome vuole il loro venerato Maeſtro. Non è di queſto luogo il moſtrare quanto ſiffatto penſamento poco ſi accorda con la Natura. Piuttoſto cadrà il deſtro di farlo in un mio ſcritto omai compiuto, nel quale tra l' altre coſe ſi ventilerà ſe alla Storia Naturale ſieno ſtati più ſvantaggioſi che utili i moderni Siſtematici, e Nomenclatori.

ra rannicchiate dentro del corpo in maniera, che riesce difficilissimo l' esplorarle come conviene . Il mezzo più acconcio a conseguire l' intento si è quello che suggerito viene dal grande *Swammerdamio* nell' eccellente suo Trattatello su le lumache, voglio dire di farle morire lentamente dentro dell' acqua . Allora dunque si trovano quasi sempre col collo , e col capo fuori interamente del guscio , e spuntano altresì più o meno le corna. Tagliata longitudinalmente per di sopra in tal vantaggiosa situazione con sottili affilate forficette la pelle del capo, si presenta subito all' occhio il cervello della lumaca diviso in due lobi , i quali nella parte inferiore danno origine alla midolla allungata, e nella superiore a dieci nervi , quattro de' quali s' impiantano dentro alle quattro corna , ed estendonsi fino alla loro sommità , e gli altri sei vanno a mettere , e a diramarsi in varie parti del capo, come ai muscoli della pelle, alla bocca , alla gola , al palato.

Lo *Swammerdamio* è stato il primo , per quanto io mi sappia, ad osservare che il cervello della lumaca è mobile; e la sua mobilità nasce in grazia di alcuni muscoli, cui resta attaccato, mercè i quali ora si accosta alle parti anteriori della testa, ora da esse allontanasi, secondo i diversi movimenti del corpo. Quando poi la lumaca è sporta assai bene del nicchio, poggia il cervello ordinariamente sopra l' esofago.

Dicea più sopra che quel punto nero , che trapela alla cima delle corna maggiori , viene comunemente creduto esser l' occhio della lumaca ; e tal credenza a me sembra ragionevolissima. Di fatto l' inarrivabile sagacità del più volte nominato Naturalista Ollandese , secondata dal vantaggioso mezzo di buone lenti, ha saputo trovare in questo punto le parti più principali che lo caratterizzano per l' organo della visione , cioè a dire l' uvea, i tre umori , e l' aracnoide involgente il cristallino. A me pure è riuscito di scoprire con sufficiente chiarezza queste parti, a riserva dell' umore ac-

queo, e del vitreo, che non potetti ſcernere nettamente; quantunque poi la non apparenza di queſti due umori io la rifonda più preſto nella mia poca perizia nel diſcoprire tai minutezze, che nella non eſiſtenza delle medeſime. Dei quattro nervi, che dal cervello vanno a piantarſi dentro alle corna, due, che chiameremo gli *ottici*, ſi attaccano agli occhi, allargandoſi ſotto di eſſi in una ſpecie di bulbo fatto a zucchetta oſſia a pera. Ma queſti quattro nervi ſono accompagnati dai loro muſcoli, dall' azione de' quali a beneplacito dell' animale ſi arroveſciano le corna sì grandi, che picciole, e ſi occultano dentro del corpo: ed in grazia di queſto arroveſciamento e ſucceſſivo occultamento vengono gli occhi a guarentirſi, e a metterſi in ſalvo dalle eſtrinſeche ingiurie.

Levato il cervello, appariſce l'eſofago membranoſo, lavorato a ſottili creſpe longitudinali, di un livido cenerino, e di pareti graciliſſime, il quale ſi va reſtringnendo a proporzione che ſi accoſta alla bocca. Queſt' apertura, con cui la lumaca prende l' alimento, è corredata del ſuo palato nella parte ſuperiore, e di una calloſa maſcella, a cui è tenacemente attacato un dente di ſoſtanza quaſi cornea, di colore caſtagno, ſoggiato a mezza luna, e terminato da più punte taglienti, ed acute, formanti in certa guiſa altrettanti picciolifſimi denti, quantunque propriamente non ne ſia che uno; e queſto è anzi quel ſolo dente che ha la lumaca. Nel piano inferiore della bocca è ſituata la lingua fornita alla ſua eſtremità di un corpiccino come corneo, e radicata con la baſe in una incavata cartilagine ſemicircolare. E queſte ſono le parti più precipue del capo, preſcindendo da una quantità di muſcoli movitori di eſſe, la deſcrizione de' quali non ſembrandomi neceſſaria, ho creduto, ſenza commettere un peccato d' ommiſſione, di poterla laſciare.

ARTICOLO

ARTICOLO II.

Riproduzione delle Corna o Antenne.

Quando io ſcoperſi il primo che le lumache rigenerano le corna, e la teſta reciſa, più d' un Curioſo mi ricercò da quai motivi o ragioni io era ſtato indotto a penſare che queſte parti poteſſero per ventura riprodurſi, ogni qualvolta venivano eſſe a mancare. E non è difficile che ad alcuno de' miei dotti Lettori venga in mente la medeſima inchieſta, ai quali farò io brevemente quella riſpoſta, che fu da me fatta altra volta. Prima di dar opera alla riproduzione delle lumache eſſendo io occupato in quella de' lombrichi terreſtri, di cui ritrovaſi un Capo nel mio *Prodromo ſopra le Riproduzioni Animali*, più fiate ebbi occaſion di oſſervare quanto alla riproduzione di queſti vermi contribuiſca l' eſſere i medeſimi diſeſi dagli urti dell' aria sfogata, e libera, col reſtare appiattati dentro alla morbida terra, oppure al concime. Queſta facile oſſervazione mi richiamò alla memoria lo ſtato delle lumache mutilate in qualche parte del corpo, le quali io aveva veduto rinſerrarſi per molti giorni nella propria portatile caſetta, e chiuderne la porta con quel loro coperchio formato dal viſchioſo ſugo che geme dal corpo, in grazia del qual coperchio difficilmente concedeſi l' ingreſſo all' aria. Riflettei allora che una lumaca mutilata nelle corna o nel capo, e chiuſa col coperchio dentro al ſuo nicchio, ſi trovava in circoſtanze ſimili a quelle d' un lombrico ripoſto dentro alla terra bagnata, o al concime, al quale ſia ſtata tagliata la teſta. A quel modo adunque che un lombrico ripara queſta parte perduta, volli vedere ſe ſuccedeva lo ſteſſo nelle lumache, cominciando le mie ſperienze dalla reciſion delle corna, eſſendo eſſe, come ognun ſa, un' appartenenza del capo.

Affinchè rieſca bene il taglio delle corna, egli è d'uopo che ſieno interamente uſcite del capo, il che ſuccede ogni qualvolta la lumaca è conſiderabilmente fuori del guſcio. Allora tutte quattro eſſendo pienamente ſviluppate, ſi poſſono ſino alle radici comodamente recidere. Tagliatene due, per eſempio le maggiori, la lumaca ritira di preſente dentro al capo le minori, ed anche ſi naſconde in parte nel guſcio, ma d'ordinario poco appreſſo ritorna fuori, facendo ricomparire eſſe corna minori; quindi è che l'une dopo l'altre ſi poſſono bene ſpeſſo recider tutte quattro, ſe così aggrada all'Eſperimentatore. E ciò non oſtante la lumaca così mutilata non laſcia ſovente di ritornare col collo, e con la teſta fuori del guſcio, come facea quando era intatta.

In quel che la forbice tronca le corna, eſce dalle parti troncate una gocciolina, e talvolta ſchizza un zampilletto di liquor traſparente che tira al ceruleo, che non è che quello che albergava ne' corpi glandoloſi delle corna, rotti allora dal tagliente metallo. Facendo oſſervazione alle teſte private allora delle corna, ſi veggono i quattro tronconi all' eſtremità ſuperiore appuntati, e la punta ci accorgiam che deriva dalla corrugazione, e dal riſtringimento della radice delle corna, ſeguíto nel luogo dove ſi è fatto il taglio. Se poſcia rivolgeremo lo ſguardo alle corna ſeparate dal capo, e che tante volte rimangono aderenti al piano delle forbici, ſi oſſervano le ſeguenti coſe. Eſſe corna immediatamente dopo l'eſſere ſtate ſtaccate dalla lumaca, s'ingroſſano, a motivo di farſi conſiderabilmente più corte; la pelle nel ſito, ove è ſeguita la reciſione, o ſi corruga a ſegno che quaſi non appariſce più il piano del taglio, oppure ſi allarga in maniera che ne laſcia uſcir fuora il nervo ottico, e i muſcoli movitori del corno. Se il corno reciſo è dei maggiori, ſeguita a manifeſtare alla ſua ſommità l'occhio nereggiante; qualche volta però queſt'occhio ſi perde, non già perchè ſi ab-

bia a temere che reſtato non ſia nel corno reciſo, ma per eſſerſi internato, e ſepolto nel medeſimo, ſiccome lo fa vedere il coltello anatomico.

Sappiamo che alcune parti di diverſi animali ſeguitano a vivere, e a muoverſi per un dato tempo dopo l'eſſere ſtate ſeparate dal loro tutto. Così fanno le ſcolopendre, e i lombrichi terreſtri, ed acquatici reciſi a brani, ma ſopra tutto le code delle lucertole, e dei ramarri, le quali, malgrado l'eſſer rotte in più pezzi, ſeguono per qualche tempo a muoverſi, a divincolarſi, e a ſaltellare. Ma ci è noto altresì che in un numero immenſo di altri animali ſuccede tutto il contrario, talmente che le loro membra, ſeparate che ſieno dal corpo, perdono quaſi ſubito ogni apparenza di vita, e di moto. Le noſtre lumache partecipano di queſti ultimi viventi. Appena che le corna ſono ſtaccate dal capo, ſi rendono immobili, o tutt'alpiù leggeriſſimamente ſi contorcono per alcuni ſecondi, indi non danno più verun ſegno di vita o di moto, eziandio con punta irritate.

Se le lumache così mutilate ſi viſitino dopo 20. oppur 25. giorni, non è rado il trovare un principio di riproduzion nelle corna. Ma tal riproduzione è aſſai diverſa da quella che ſi oſſerva in altri animali; e queſto ſi è uno di que' molti utiliſſimi caſi che c'inſegnano a diffidare degli argomenti analogici. L'illuſtre *Reaumur* è ſtato il primo a far vedere, che comincia a manifeſtarſi il principio della riproduzione delle gambe nei granchi d'acqua dolce, coll'apparire al centro del troncone un picciol cono, la cui baſe è ſenza paragone più picciola di quella del troncone, e che ſolo in proceder di tempo ſi fa grande al pari di lui. Un ſomigliante fenomeno è ſtato oſſervato dal celebre *Bonnet* ne'lombrichi terreſtri, e ne' ſuoi vermi d'acqua dolce. Le medeſime apparenze ſono ſtate a me pure manifeſtate dai girini delle rane, e dalle ſalamandre acquajuole nel rifabbricare

la coda, e le gambe (*a*). I raggi delle ſtelle di mare, ſe o caſualmente o dal morſo di qualche animale, oppure dagli uomini vengano in parte tronchi, e ſeparati dal corpo, mettono eſſi pure ſul mezzo del troncone un tenue cono o linguetta, che non è che il germe ſviluppanteſi della mancante porzione: ed io nel mio Viaggio ſul Mediterraneo nella State del 1781. ho veduto più ſtelle, da' cui raggi reciſi pullularono coteſti coni più o meno creſciuti, in quella ſpecie ſegnatamente detta dal Linneo *aſterias rubens*; alcune delle quali conſervo in queſto grandioſo Muſeo d'Iſtoria Naturale della Regia Univerſità di Pavia. Ma ſu le corna troncate delle lumache la faccenda non va così. Il troncone ſteſſo rotondaſi in un bottoncino di colore alquanto sbiadato. Il bottoncino in ſeguito ſi fa più grande, il colore più carico, e in cima al bottoncino, ſe ſi parli delle corna maggiori, ſalta fuori un punto nero, che non è che l'occhio della lumaca. Intanto la parte riprodotta ſi allunga, e dopo un tempo diſcreto il corno novello pareggia l'altro compagno non mutilato. La riproduzione accade in ſimil guiſa nelle corna minori.

Che ſe invece di levar via le interne corna, ſiccome fin qui è ſtato per me ſuppoſto, ſe ne levi una metà, un terzo, un quarto ecc. ſe ne ottiene per egual modo la riproduzione con l'accompagnamento ſteſſo di circoſtanze di ſopra indicato. E queſto è l'andamento che il più tiene la natura nella riproduzion delle corna. Talvolta però interviene che in vece di ritondarſi il troncone, ſi appunta, e ſi allunga. La punta però in progreſſo di tempo ſi allarga, e ſi conforma in globetto, e il reſtante ſi eſeguiſce poſcia nella maniera teſtè accennata.

La lumaca fa quell'uſo ſteſſo delle corna nuove, che

(*a*) Prodr. cit.

facea delle vecchie, o ſi riguardi lo ſpingerle fuori del capo, e l'allungarle, o il ritirarle dentro di eſſo, e il naſconderle, o il manifeſtare in loro quel ſenſo vividiſſimo e pronto, per cui ad ogni picciol tocco le arroveſcia ſubitamente, e le mette in ſalvo.

Tutti queſti fatti ſembravano aſſicurarmi che il numero dei componenti la porzione tagliata ſi trovaſſe nè più nè meno nella porzione riprodotta. Volli tuttavia accertarmene maggiormente co' più minuti anatomici eſami. Si ſono adunque da me aperte per lo lungo con ſottile ferruzzo tagliente più corna riprodotteſi, ma non ho ſaputo trovare in che il nuovo rigenerato poteſſe differire dal vecchio reciſo. La medeſima pelle fatta eſteriormente a ſagrino, e internamente ripiena di ghiandoline, i medeſimi muſcoli moventi le corna, i medeſimi nervi andanti alle loro eſtremità, e quivi allargantiſi in un bulbo ovale, le medeſime parti in fine onde riſulta l'occhio ſteſſo; talmente che ſarebbe ſtato impoſſibile il diſtinguere le corna nuove dalle vecchie, ſe quelle vedute non ſi foſſero naſcere e creſcere, e ſe dove avevano cominciato a pullulare reſtato non foſſe talvolta ſu la pelle un leggiere affoſſamento, e tal' altra un picciolo ſporto o rilevato, per cui ſi conoſceva il ſito preciſo, dove aveva avuto principio il corno novello.

Ad ottenere queſta riproduzione vi ſi richiede un ſufficiente calore. Il temperato non baſta, ma vi vuol per lo meno il grado decimo terzo nel Termometro del *Reaumur*. Quindi è che nella Lombardia, e in diverſe altre parti dell'Italia ſi devono cominciar le eſperienze a primavera ſpiegata, e quel ch'io dico del calore in riguardo al riſacimento delle corna, lo dico in riguardo a quello della teſta, di cui or ora a ragionare intraprendo. Venendo poi la ſtate, le corna ſi rifanno più prontamente. E ſe mi foſſe chieſto il tempo preſſo a poco neceſſario per queſta completa riproduzione, di-

rei ch' essa d' ordinario addimanda quasi due mesi, poca o molta che sia la parte delle corna, che dee ripararsi. Dirò in oltre che quantunque tal riparazione frequentemente non manchi, pure evvi stata qualche rara volta che non mi è riuscito di ottenerla, malgrado lo aver conservate per anni intieri le lumache così mutilate.

ARTICOLO III.

Riproduzione della testa dimezzata.

Una pelle fatta a sagrino, due labbra, e due mandibole con un dente lunare attaccato alla superiore, la lingua impiantata in una cartilagine semilunare, una porzione di esofago, il cervello diviso in due lobi, e pullulante in dieci nervetti, oltre a quattro corna di grandezza diversa, veduto abbiamo essere questi i componenti precipui della testa delle lumache. Queste pratiche notizie però non bastano per andar sicuri che le nostre esperienze intorno alla decapitazione di questi rettili sieno state rettamente instituite. Se cotestе parti venissero a formare una testa simile a quella dei più degl' insetti, voglio dire fatta a globo, o conformata in un corpo facilmente distinguibile dall' altre parti dell' animale; si vedrebbe subito dov' ella comincia, e dove finisce, e conseguentemente sapremmo senza equivoco dove precisamente la forbice, o il coltello, per la recisione di essa passar dovesse. Ma la testa nelle lumache non è foggiata così: allorchè queste sono fuori del guscio, il loro corpo (se si prescinda dalle corna) imita rozzamente un cono, che è di minor diametro nella parte anteriore, e di maggiore nella deretana, che confina con l'apertura del guscio. E' cosa certa che la testa risiede nell' anterior parte del cono, ma la difficoltà consiste nel sapere quanto essa precisamente ne oc-

cupa, per ſapere quanto ſe ne poſſa con ſicurezza tagliare. A dir vero non ſi può dar regola certa per lo continuo allungarſi e reſtrignerſi, ingroſſarſi e impicciolirſi dello ſteſſo cono quando la lumaca è in moto. Pure allorchè la medeſima è quanto lo può eſſere fuori del guſcio, ho trovato che ordinariamente ſi eſtende dalla punta ottuſa del cono fino al di là della radice delle corna maggiori per il breve intervallo di una linea all' incirca; e fin lì è conceduto il taglio, con ſicurezza di avere per lo più reciſa ſoltanto la teſta. Ma ſe ſi oltrepaſſano queſti limiti, ſiccome allora in un con la teſta vengono a reciderſi altre parti del corpo, così ſiamo preſſochè certi della morte dell' animale. Le lumache da me con felice ſucceſſo ſperimentate ſono ſtate di tre ſpecie, l'*helix pomatia*, *nemoralis*, *lucorum*, per valermi de' vocaboli del Nomenclatore Linneo. Più individui di una di queſte ſpecie ſono al naturale eſpreſſi nella Tavola anneſſa.

La figura I. rappreſenta queſta lumaca chiuſa ancora nel guſcio, diſponenteſi però ad uſcirne.

La II. quando comincia a mettere in viſta il capo, e le corna.

La III. allorchè ha allungate le corna di più, ma poſta in ſituazione contraria.

La IV. quando è quaſi fuori del guſcio quanto lo può eſſere.

La V. fa vedere la porzione di cono comprendente unicamente la teſta, la qual porzione, per dare ad intendere meglio la coſa, ſi rappreſenta già ſpiccata dal collo.

La figura VI. moſtra la lumaca, cui è ſtata levata queſta porzione, apparendo ſul tronco ne' quattro punti che denotano il luogo delle quattro corna.

Dopo l' aver ottenuto nelle lumache la riproduzion delle corna, mi nacque in penſiero di vedere coſa foſſe per accadere recidendo loro la teſta. Ma dubitando

che dal levarla tutta, anzi che rifarla, periſſero, cominciai i miei tentativi col troncarne una porzione ſoltanto, quella cioè che ſi eſtende eſcluſivamente ſino alle corna maggiori, e che comprende le labbra, le mandibole col dente, la lingua, e le due corna minori oltre gl' invogli muſculoſi, o integumenti, che vogliam nominarli, la qual porzione per ſervire alla brevità chiamerò quindinnanzi *teſta dimezzata*. Viene eſſa rappreſentata nella figura IV. per le lettere *a*, *c*. Per reciderla a dovere facea che la lumaca l' aveſſe ſpinta in fuori quanto più può, e allora procurava di levarla di netto con la forbice, facendo la ſezione perpendicolare all' aſſe del cono. Ma l'operazione non veniva ſempre a bene, ſiccome avrei deſiderato. La teſta della lumaca, ſiccome abbiam detto, è mobiliſſima, e appena che ſe la ſente toccare l' accorcia di ſubito, e la ritira: di più allorchè l' allunga, la piega ſovente in diverſi ſenſi, a deſtra, a ſiniſtra, in alto, al baſſo. Quindi è che il taglio riuſcendo male talvolta, cioè a dire fatto obliquamente, la teſta dimezzata non recidevaſi preciſamente. Ma perchè io riputava dell' ultima importanza per l'eſattezza dell'eſperienze il ſapere quali parti unicamente venivan reciſe, per vedere ſe in ſeguito ſi riproducevano tutte (in evento che tal riproduzione aveſſe avuto luogo in natura); però in queſti tentativi io dovetti pigliarmi una fatica, che pigliata non m'era nelle riproduzioni di più altri animali, e queſta fu di anatomicamente eſaminare ogni teſta dimezzata, ſubito che era ſtata reciſa, e di riporre in altrettanti piccioli vaſi le lumache decapitate, facendone toccar una a ciaſcheduno col ſuo numero affiſſo, che trovandoſi il medeſimo nel mio Giornale, veniva quivi accompagnato da una breve anatomica deſcrizione dei componenti ciaſcuna teſta levata. Così tolto reſtava qualunque ſoſpetto di prendere equivoci nelle mie eſperienze; e d' altronde io poteva venire in cognizione, ſe le parti rifabbricate

fabbricate corrispondevano precisamente nel numero, nella forma, e nella grandezza alle parti recise. Dietro a queste notizie che ho creduto bene il far conte, perchè nota sia la maniera da me praticata nelle sperienze, passo alla narrazione dei risultati.

Seguita l'amputazione, la lumaca immediatamente appresso si ritira con somma rapidità, e nascondesi dentro del guscio, e soventemente nell'atto del ritirarsi mette un sottil fischio, proveniente dalla difficoltà che trova l'aria nel venir fuora del canale della respirazione per esserle allora in parte conteso il varco dalla subita contrazione del corpo. Malgrado questo enorme taglio egli accade talvolta che la lumaca ritorna poco dopo fuora del guscio, e comincia a strascinarsi da luogo a luogo, siccome facea quando era intatta. La figura VII. ci fa vedere una lumaca, alla quale è stata tagliata la testa a metà, e che dopo il taglio è uscita volontariamente del guscio. I due punti *R*, *S* denotano il sito dov'erano le corna minori. Le maggiori sono più picciole del solito, per non averle questo rettile spinte fuori abbastanza. Ma il più delle volte succede il contrario. Vi è però un mezzo assai facile per obbligar la lumaca ad uscire, ad oggetto di poter vedere, ed esaminare il taglio prodotto, e questo mezzo consiste nel rompere a leggerissimi colpi d' una chiave, o della costola d' un coltello una picciola parte del guscio di dietro, giacchè allora la lumaca da quella viva impressione irritata si determina a spuntar per d'avanti, poca o molta che sia stata la recisione del capo. E qui noterò in passando per evitar le inutili ripetizioni, che di un tal espediente mi sono valuto ogni qualvolta le lumache ricusavano di comparire, e che a me premeva di osservare o la recisione fatta di fresco, ovvero i principj, e i progressi della testa riproducentesi. Esaminato adunque il troncone, dopo l'aver recisa la testa dimezzata, si scorge uscire da esso una porzione di quel liquore, che nel-

la lumaca tien luogo di ſangue ; il qual liquore però ceſſa ben preſto, a motivo del troncone che non indugia a corrugarſi, e ad impicciolirſi, anzi qualche volta ſino in apparenza a perderſi, entrando in ſuo luogo un picciolo incavo o affoſſamento, dove non appariſce indizio del taglio. Intanto le lumache così decapitate ſi attaccano per lo più ai vaſi dentro cui ſono ripoſte, ſi naſcondono nella loro caſetta, otturandone la bocca con quel ſottile e bianco coperchio prodotto dal tegnente umore che ſtilla dal corpo, e quivi entro immobilmente quetano per più ſettimane e talvolta per meſi intieri.

Facendole uſcire dopo 30 ovvero 40 giorni, alcune moſtrano il nudo troncone ſenza apparenza di riproducimento ; ma altre, ſe la ſtagione ſia piuttoſto calda, cominciano a far vedere verſo il mezzo del troncone un globettino in apparenza carnoſo, aſſai tenero, e di un bianco cenerognolo, che eſaminato però sì eſternamente, che al di dentro, non laſcia ſcorgere all'occhio niente di organizzato. L'organizzazione però dopo altri 8 oppur 10 giorni principia a manifeſtarſi in eſſo globettino già di molto accreſciuto, apparendo i rudimenti delle labbra, delle corna minori, della bocca, e della lingua, con di più un corpicello membranoſo di colore oſcuro, che per eſſere attaccato alla mandibola ſuperiore, e ſraſtagliato ai lombi, induce l'Oſſervatore nella facile credenza che ſia il dente rigenerante ſi della lumaca. Trattanto ne' giorni conſecutivi queſte parti ſi vanno ſvolgendo, e manifeſtando di più, occupando ſucceſſivamente ſpazio maggiore nel troncone; e dopo due o tre meſi al più la teſta dimezzata ſi è rifatta in guiſa, che a riſerva del colore alquanto più tenero non ſi diſtingue punto dalla vecchia. Oltre l'iſpezione eſterna, ce lo perſuade, e fa chiaro la notomia. Concioſſiachè aperta, ed eſplorata per di dentro la teſta novella, ſi ravviſano in lei quelle parti, corriſpondenti appuntino nel numero, nella forma, nella grandezza, che preeſi-

ſtevano nella vecchia teſta, e che erano ſtate da me ſcrupoloſamente ſu' miei Giornali notate in ciaſcuna decollazione. Io non ſaprei porgere a' miei Lettori un' idea più ſenſibile di queſta riproduzione, che con l'eſempio d'un fiore per ancor non aperto. Conſiderato ne' ſuoi principj egli è un bocciuolo, o picciol globo riſultante da membrane sì avviluppate fra loro, e sì aggrovigliate, che non arriviamo punto a diſtinguere la forma delle foglie o come diciamo dei petali. Queſti petali ſoltanto in progreſſo ſi diſaſcondono, dapprima con qualche oſcurità, e confuſione, poi diſtintamente, e con tale chiarezza, che chicheſſia lo riconoſce per un bottone d'un fiore: in quella guiſa perappunto che il compleſſo delle parti ſviluppantiſi nelle lumache arriviamo finalmente a ravviſarlo per una verace teſta rigenerata.

Queſta rigenerazione però così compiuta e tutta d'un pezzo è ben lungi dall'ottenerſi in tutte le lumache; ma in diverſe ſpuntano dal troncone due piccioliſſimi globi, che in taluna ſono i principj delle due corna minori, in tal altra l'uno di eſſi abbraccia di più i rudimenti delle labbra, della bocca, del dente, della lingua, i quali due piccioliſſimi globi in progreſſo di tempo però ſi uniſcono inſieme, e ſi conformano in un ſolo, che ſvoltoſi in ſeguito di vantaggio viene compiutamente a formare la teſta dimezzata. Non è raro che l'uno delle due corna riprodotte non aggiunga alla naturale lunghezza, o che ſia biſtorto, ovveramente che un labbro ſia dell'altro più picciolo, od anco che la teſta rifabbricata pieghi tutta da un lato, o che abbia tra il nuovo e il vecchio un incavo o foſſetta, od in fine che la teſta non ſiaſi punto rifatta, e ciò dopo ſei meſi, ed anche un anno, apparendo tuttavia il troncone nudo, allorchè la lumaca eſce del guſcio. Ho oſſervato quaſi coſtantemente, che quando il taglio è ſtato fatto perpendicolarmente all'aſſe del cono, la ripro-

duzion della testa succede perfettamente: e che quelle mostruosità, e quelle anomalie hanno frequentemente luogo, allorchè la recisione è accaduta obliquamente, ovver che le forbici, per non esser talora troppo taglienti, non hanno recisa in un colpo la testa dimezzata.

Le lumache in più tempi decapitate a metà sono ascese al numero di 322. La testa si è ottimamente rifatta in 126. Si è fatta vedere più o meno mostruosa o deforme in 31 lumache; 14 non hanno punto riprodotto, e il restante è perito (*a*). E però mi sono accorto che la recisione della testa, benchè dimezzata, a più lumache è fatale. Tutte quelle che hanno riprodotto si sono servite della testa novella come facean della vecchia, tanto nei moltiplici, e bizzarri movimenti, che proprj sono di questa parte, quanto nel prendere quegli alimenti che loro somministrava, come pane, insalata, e simili, mercè cui di magrissime che eran venute pria del rifacimento del capo, acquistata avevano la primiera carnosa pienezza.

ARTICOLO IV.

Riproduzione della Testa intiera.

Nel terzo Articolo si è veduto che i componenti l'intiera testa delle lumache giungono fino al di là della radice delle corna maggiori pel tenue spazio di una linea all'incirca. Il perchè determinato avendo io in questo corso novel di esperienze di sradicar per intiero la testa, nel mentovato sito precisamente si è cercato di fare il taglio, e si è procurato sempre che fosse perpendicolare all'asse del cono carnoso formato dalla testa, e dal collo. Ma le difficoltà incontrate nell'amputazione

(*a*) La scoperta della riproduzione delle corna, e della testa così dimezzata, che intiera nelle lumache è stata da me fatta nella primavera, e nella state del 1766.

della testa dimezzata trovate ti sono le stesse nell' amputazione della testa intiera; e quindi il taglio per l'agitarsi delle lumache non si è sempre potuto fare nel sito prefisso, ma talvolta ha mancato o per difetto, col levar meno dell' intiera testa, o per eccesso, col levarne di più. Quindi ad osservare la dovuta esattezza nelle esperienze, e ad esser sicuro delle conseguenze delle medesime, mi è convenuto ad ogni decapitazione l' intraprendere quegli esami anatomici, che intrapreso avea nelle teste dimezzate, custodendo medesimamente in vasi appartati singole le lumache, e tenendo un esatto conto di ciò che elleno nell' amputazione perduto aveano. Le mutilate a testa intiera sono state 423, ed eccone i risultati.

Quelle lumache, a cui oltre la testa era stata recisa una porzione di collo, tutte quante sono perite. Nè è punto a stupirsene, mentre che allora venivano in parte tagliati gli organi della generazione, che appunto sappiamo avere la loro origine interiormente in un lato del collo, di dove per un forame escon fuora, allorchè questi rettili vogliano dar opera alla propagazion della specie. Le mutilate poi per l' intiera testa precisamente, o che lo erano state alcun poco di meno, morivano bensì in qualche numero, ma le più sopravvivevano a quel taglio enorme, anzi assai di queste rifacevano compiutamente la testa. Tal rifacimento per venire in molti individui accompagnato da circostanze diverse, e tutte degnissime da saperli, merita d' essere alcun poco particolarizzato. Se ad una salamandra acquajuola ti recida una gamba, o ad un lombrico terrestre la testa, e la coda, la riproduzione che ne nasce è un *tutto organico* intero, o vogliam dire una gamba in miniatura, una testa, una coda, similissima alla recisa, a cui null' altro manca che uno sviluppamento ulteriore. Pel contrario sul troncone delle lumache nel modo esposto decapitate non salta già fuori un tutto

organico intero, comprendente quelle parti tutte, che componevano la testa tagliata; ma queste parti a principio sono spesse fiate fra lor separate, anzi talvolta pullulano le une qualche tempo appresso che hanno pullulato le altre, e solamente dopo uno spazio più o men lungo si attaccano tutte insieme, si consolidano, e vengono a formare un tutto organico, poco o niente dissimile dall' antica testa. Da alcuni esempii che recherò in mezzo s' intenderà più agevolmente la cosa.

Talora dunque la nascente riproduzione è una carnosa pallottolina aderente in pochi punti al mezzo del troncone, e come spiccata da esso, la qual contiene i rudimenti delle due labbra e delle corna minori unitamente alla bocca, alla lingua, e al dente già rifattosi della lumaca. Le altre parti, come le corna maggiori, e il restante del capo mancano interamente. Il troncone d' altra lumaca mostra un corno maggiore già fornito del suo occhio, e al di sotto in rimota parte e isolata spuntano i primi lineamenti delle labbra. La riproduzione in altre è un gruppo di tre corna, due già arrivate alla naturale lunghezza, e grossezza, il terzo giacente ancora a fior di pelle. Chi non riproduce da principio che un bottoncino, che attentamente spiato, si scorge esser le labbra in sestesse ravviluppate e ristrette. Chi è già fornita dell' intiera testa, a riserva d' uno o più corna mancanti. Chi finalmente lascia apparir sul troncone le due sole corna maggiori, oppur le minori, ovveramente un maggiore, e un minore.

Tutti questi parziali riproducimenti però, congiunti ad altri che apparisconо in seguito, coll' andar del tempo concorrono insieme, siccome io diceva, ed unisconsi, e formano una sola riproduzione, cioè a dire una testa novella, in molte lumache in nulla dissomigliante dalla vecchia, a riserva del colore men carico, in grazia del qual colore anche i meno veggen-

ti fanno riconoſcere la porzion riprodotta, ſiccome più d' una volta ho praticamente veduto. La figura VIII moſtra una di queſte lumache, che hanno rifatta compiutamente la teſta, non però ancora adombrata del naturale colore. E lo ſteſſo ſi è della figura IX, fuor ſolamente il non aver rifatte queſta lumaca le due corna maggiori, ſiccome qualche volta ſuccede. Per altro a tempo più inoltrato anche la teſta novella prende la tinta medeſima della vecchia, e la prima ſoltanto ſeguita a diſtinguerſi dalla ſeconda per una linea cenerognola perpendicolare all' aſſe del collo, la quale fedelmente indica il ſito dove paſsò la forbice nel mutilar le lumache. Sebbene l' indizio di un tal ſito non è coſtantemente una ſemplice linea. Egli è talora un incavo profondo, di colore però ſempre bianchiccio, perpendicolare all' aſſe del collo, ſe perpendicolare ne ſia ſtato il taglio, ed obliquo, ſe con obliquità ſiaſi reciſa la teſta. Anzi in queſt' ultimo caſo qualche volta accade che dalla parte dove è ſtata tagliata più teſta, l' incavo ſia maggiore: ed in qualche lumaca vedeſi un enorme ſquarcio da un lato, niente non apparendo nell' altro, o ſolamente l' accennato indizio della linea di color cenericcio. E quantunque la diuturnità del tempo cancelli gl' incavi, pure il ſegno del taglio, cioè la nominata linea, ſi appaleſa ſul collo di alcune lumache eziandio dopo due anni. Dirò di più. Dopo sì lungo intervallo la riproduzione della teſta in qualche lumaca non è completiſſima, o perchè mancante di uno o più corna, o perchè le corna giunte non ſono, almen tutte, al neceſſario ingrandimento, ovveramente perchè ſono bernoccolute, e moſtruoſe. E di queſte apparenti moſtruoſità ne ho riſcontrato non rade volte, le quali ſoſpetterei volentieri che traeſſer l' origine dalla condizione del taglio più o meno obliquo, più o meno avanzato.

Il cibarſi che facevano le teſte riprodotte ſembrava

un argomento ſicuro della rigenerazione veriſſima delle parti, onde è compoſta la teſta; pure ho voluto vie maggiormente accertarmene con l'infallibile ſcorta dell' anatomia, la quale mi ha inſegnato che le teſte nuove (almen quelle che all' eſterno ſembravano riprodotte interiſſimamente) erano corredate di tutti que' componenti che trovati avea nelle teſte vecchie, e che in ciaſcheduna decapitazione erano ſtati da me marcati, per non ſoggiacere ad equivoci, o errori in queſti fiſici eſami. Aggiugnerò che ciaſcuna parte nuova ſi univa, e ſi combaciava sì eſattamente ne' più ſottili ſuoi ſtami colla vecchia, che le lumache che avean riprodotto non avremmo mai giudicato che foſſero ſtate mutilate, ſe indicato non lo aveſſe la linea cenericcia, che loro correva attraverſo del collo.

Qui non debbo però laſciar di avvertire, che a quel modo che alcune lumache, cui levato avea la teſta dimezzata, non hanno riprodotto mai nulla, eziandio dopo un tempo lunghiſſimo, lo ſteſſo è avvenuto a diverſe di quelle, cui era ſtata reciſa l'intiera teſta. Di fatto delle 423 mutilate a teſta intera, ne ho contato 32, che dopo un anno non manifeſtavano il più picciol principio di riproduzione; 93 non potevano aver riprodotto meglio. La teſta di 145 ſi era rigenerata con moſtroſità, e le reſtanti lumache erano morte. La teſta intiera per riprodurſi eſige preſſo a poco quel tempo che la teſta dimezzata.

Che ſe chieſto mi foſſe, donde ſia che in diverſe lumache la riproduzione è nulla, tanto del capo, che delle corna; confeſſerei ingenuamente di non avere intorno a ciò che ſemplici conghietture. Eſſendo così le riproducenti lumache, come le non riproducenti della medeſima ſpecie, dir non poſſiamo che altre abbiano il dono di riprodurre, ed altre no. Opinerei piuttoſto che la virtù riproduttrice non poteſſe ſortire in alcune il ſuo effetto per lo ſtato ſoverchiamente morboſo di queſte

ſte lumache, avendo quaſi ſempre oſſervato, che oltre al notabiliſſimo dimagramento di eſſe, l'eſteriore del corpo prende una ſfumatura giallognola, che ſembra inſeparabil compagna delle lumache affette da malattia, e bene ſpeſſo ſoggette a perire.

Avutaſi la riproduzione della teſta, era troppo naturale il penſare che le lumache riprodurrebbono altre parti meno di quella eſſenziali. Tali ſono quell' eminente collare che cinge e adorna la ſchiena delle lumache, quando ſono fuora del guſcio, e quel piano, e largo piede, ſu cui appoggiaſi il lor corpo, quando ſi muovono. Queſte due parti reciſe ſi reſtaurano ottimamente, rifabbricando la natura molto o quel poco, che dalla forbice era ſtato levato.

Riunendo in un ſol punto di viſta quanto ſinora abbiam detto intorno alla riproduzione delle lumache, chiaro appariſce che eſſe ſanno primamente riparare le corna, o queſte in parte ſoltanto, o per intiero vengan reciſe. Secondo che riſanno la teſta quando è ſtata loro reciſa a metà. Terzo che la riſanno egualmente, ove tutta quanta ſtata ſia loro troncata. Quarto che riproducono il collare, ed il piede, poco o molto che lor venga tolto. Dal che ſi fa chiaro che queſti rettili ricuperano quelle parti preciſamente, che avean perdute, la qual coſa non è però sì propria di eſſi, che non s'eſtenda eziandio ad altri animali riproducenti. Se ad una ſalamandra venga a mancare un terzo, oppure un quarto di coda, non ne riſa che un terzo, od un quarto. E lo ſteſſo vuol dirſi della metà, anzi di tutta quanta la coda. Un fenomeno ſomigliantiſſimo ha pur luogo così nelle gambe anteriori, che nelle poſteriori di queſto anfibio. (*a*). E cotal tenore di rigenerare le parti ſol-

(*a*) Prodr. cit.

tanto mancanti si estende invariabilmente ai lombrichi terrestri, ed aquatici, come altresì alle rane aventi ancora la maschera di verme o girino (*b*). Anzi consultando gli Autori che parlato hanno della riproduzion delle membra in altri animali, trovo aver luogo la medesima inalterabil legge: di maniera che stabilir possiamo qual canone generalissimo (se prescinder vogliasi da alcune accidentali anomalie) che negli animali forniti della prerogativa di riprodurre la natura non rimette mai se non se quelle parti, o quegli organi, che per qualunque cagione o accidente erano stati lor tolti.

ARTICOLO V.

Cose relative alla riproduzione della testa nelle Lumache.

Diam compimento alla presente Memoria col riferire alcune nuove esperienze, accompagnate da varie riflessioncelle, le quali per risguardar davvicino, e per mettere in maggior luce questo interessante soggetto, non riusciranno forse discare, siccome spero, ai lettori.

Si è veduto tre essere state le specie di lumache da me cimentate, *pomatia*, *nemoralis*, *lucorum*. Ma sono elleno queste tre specie sole, che godono della riproduttrice virtù? Per le sperienze fatte da alcuni Naturalisti d'oltremonti veggo esservene altre partecipi di tal privilegio. Dirò io però con amica ingenuità di averne sperimentate altre specie, ma pressochè con inutilità di successo, conciossiachè o non hanno punto rifatto la testa, nè le corna, o hanno soltanto manifestato un primo principio di riproduzione, che in seguito è andato a finire con la morte dell'animale.

(*b*) L. c.

Ma donde è mai che alcune qualità di lumache hanno il potere di riprodurre, ed altre no? Se fatto mi foſſe ſimil queſito, candidamente confeſſerei di non aver tanto in mano, onde ſciorlo. Se le riproducenti aveſſero ſtruttura organica aſſai diverſa dalle non riproducenti, aſſegnar potrebbeſi qualche ragione, o a parlare più filoſoficamente qualche diſparità tra le une e le altre; ma tale diverſità, nelle parti almeno conſtitutive del capo, non ho certamente ſaputo trovarla nelle varie ſpecie di lumache con eſito così buono, che cattivo da me cimentate.

Queſta quaſi medeſimezza di organiſmo in lumache ſpecificamente diverſe, la quale ciò non pertanto ci guida a riſultati affatto contrarj, quali ſono il riprodurre, e il non riprodurre, ci ammoniſce utilmente che qui non poſſiamo punto valerci dell'analogia, coll'argomentare da ſpecie a ſpecie, ma che per aver dati ſicuri ſiamo aſtretti d'intraprendere tanti eſperimenti, quanti ſono gli animali ſpecificamente diverſi. E la forza di queſta per noi umiliante verità ſi rende anche più paleſe, e più chiara, volendo noi gittare una fuggitiva occhiata ſopra diverſi di quegli animali, che in varj tempi ſi è ſcoperto da' Naturaliſti eſſer dotati di riproduttrice virtù. Quando per la prima volta ſvelati furono al filoſofico mondo dall' immortale *Trembley* i prodigj del polipo, ſi pensò che la ſempliciſſima ſtruttura ſua concorſa foſſe maſſimamente a crearli. Di fatto l'eſſere cotal verme privo di cuore, di vene, di arterie, e per conſeguenza di vera circolazione di umori, il non trovarſi in lui nè cervello, nè ſpinale midollo, nè nervi, nè verun altro accompagnamento di quelle parti, che ſi riſcontrano in una infinità d'altri animali, ma l'apparir tutto formato d'una ſoſtanza gelatinoſa, e omogenea, ſeminata per ogni dove non d'altro che d'una quantità di granellini, tutto ciò dava a penſare, che la ſemplicità della ſtruttura concorreſſe a far sì che ogni

particella tagliata dal polipo si conformasse in un polipo intiero; a quel modo che prima della scoperta del citato Ginevrino Filosofo si era pensato, che stante la semplicissima loro struttura succedessero nelle piante que' maravigliosi fenomeni, che si sono in seguito osservati ne' polipi. E il riparamento delle parti perdute in altri esseri animati di struttura assai semplici, quali sono le ortiche, e le stelle di mare, e diciam anche i gamberi di fiume, avvalorava cotal pensamento. Ma l'essersi trovato dappoi che certi vermi d'acqua dolce malgrado l'essere di molto più composti dei polipi, tagliandoli a pezzi, rigermogliano in altrettanti vermi completi (*a*), ha dato a vedere, che la semplicità dell'organizzazione non è una condizion necessaria al riparamento delle parti perdute. E ciò si è anche verificato in modo più luminoso ne' lombrichi terrestri, dappoichè il *Reaumaur* ha trovato che recisi a brani moltiplicano come le piante, verità fisiologica negata da alcuni Naturalisti, e che verrà da me posta fuor d'ogni dubbio, e considerabilmente ampliata nelle mie *Riproduzioni Animali*. E quando io nomino il lombrico terrestre intendo parlar di un vivente a mille doppj più composto del polipo nell'organismo, per trovarsi in lui circolazione di sangue, e in conseguenza vasi arteriosi, e venosi, e canale degli alimenti, e spinal midolla, e nervi, e unione dei due sessi, per essere ermafrodito (*a*). Della qual complicata struttura va pur fornito il mio lombrico d'acqua dolce *a batello*, non ostante che non ceda punto al lombrico terrestre, e ai vermi d'acqua dolce per la facoltà del riprodurre (*b*).

Sebbene dei surriferiti vermi quanto sono situati più alto nella scala dell'animalità per l'organica loro strut-

---

(*a*) Bonnet *Traitè d'Insectologie*.
(*a*) Prodr. cit.
(*b*) L. c.

tura e la lumaca terreſtre, e la ſalamandra acquajuola? Laſciando a parte la prima, per averne già parlato abbaſtanza, fermiamci per un momento a contemplar la ſeconda. Quantunque la ſalamandra acquajuola meritamente ſi annoveri dai Naturaliſti tra gli amfibj, per queſto però non laſcia d'eſſere un vero quadrupede, avendo in piccolo moltiſſime di quelle parti che hanno i quadrupedi in grande. Aſſaiſſimi di queſti ſi trovano avere corredata la coda di vertebre oſſee, incaſtrate le une dentro alle altre, e ſucceſſivamente più picciole in ragione dell'aſſottigliarſi della coda. E di vertebre medeſimamente oſſee, e in ſimil guiſa conformate va provveduta la coda delle ſalamandre, oltre le parti ſolide molli, cioè a dire il midollo allungato che fora ciaſcuna vertebra, e arriva fino alla più ſottile, i nervi, i muſcoli, le vene, le arterie, il cuore, e una numeroſa famiglia di glandole, da cui ſcappa quel liquore lattato, ed acre, che ſi ſparge ſu la pelle, quando la ſalamandra viene irritata. Similmente le gambe così anteriori, che poſteriori hanno preſſo a poco quella ricchezza di parti ſolide molli, e di parti ſolide dure, oſſia di oſſa, che ſi oſſerva ne' grandi quadrupedi, e preſſo a poco anche in noi. Finalmente come queſti le mandibole del noſtro amfibio vanno armate d'un oſſo rozzamente circolare, che le circonda, e le termina, da cui riſalta una ſelvetta regolare di acutiſſimi denti. Trovato queſto apparato di tante parti, e tanto fra loro diverſe, chi creduto avrebbe che tal quadrupede abbia il dono di ripararle tutte, ogni qualvolta tutte vengan reciſe? Eppure non evvi niente più vero di queſto, ſiccome ho ſcoperto io il primo aſſaiſſime volte. Il perder le quattro gambe ad un colpo è per la ſalamandra quaſi un nulla, giacchè ſa ripararle tutte quattro, e ripararle perfettamente. Sonomi preſo la pena di numerar tutte le oſſa, che entrano in eſſe quattro gambe; ed ho veduto che aſcendono a 99: e 99 ſi ſono pure da me tro-

vate nelle quattro gambe riprodotte, allora quando tutte quattro erano ſtate diſarticolate dal tronco. Che più? Levate per intiero le quattro gambe, e inſiememente tutta la coda, e le due mandibole, la ſalamandra oltre al reſtauramento delle gambe, riſa nel tempo ſteſſo e mandibole, e coda. Queſta verità, che ha tutta l' aria di paradoſſo, e che anzi a prima giunta ci ſembra più favoloſa della famoſa idra di Lerna, l' ho io replicatamente veduta, e fatta vedere a più miei Amici, non ſenza ſorprendimento di tutti. E tanto più la ſalamandra acquajuola è oggetto di maraviglia, quantochè non defrauda mai delle moltiplici ſue riproduzioni l' avido Sperimentatore, la qual coſa ſi è veduto non ſucceder ſempre nelle lumache, alcune delle quali ricuſano di riprodurre.

Ecco adunque come cominciando dal polipo, indi paſſando a più vermi, poi alle lumache, e da ultimo alle ſalamandre, che è quanto dire progredendo da animali ſempliciſſimi ad altri men ſemplici, e da queſti ad altri eziandio più compoſti, chiaro appariſce aver luogo la riproduzione, ſenza che l' organiſmo più o meno ſemplice, e più o meno compoſto produca verun divario eſſenziale.

Queſti fatti provan del pari che la tenerezza della fibra, o delicatezza che vogliam nominarla, non è altrimenti una condizion neceſſaria per le riproduzioni animali. Qual divario nella mollezza tra il corpo d' un polipo, e la coda, o le gambe d' una Salamandra? Eppure sì l' uno che l' altra non riproducon del pari? Senza che quanti animaletti teneriſſimi quanto il polipo, ed anche di più, ed eſſi pure acquatici come lui, invece di riprodurre, ſe vengan tagliati, vanno a perire, ſiccome ho io ſteſſo potuto accertarmene per replicati tentativi ſopra loro intrapreſi?

Conviemmi però l' avvertire che quegli animali, che atti eſſendo per lor natura al riprodurre, dotati ſono

nel tempo ſteſſo di fibra più tenera, hanno ſopra gli altri più d'una notabile prerogativa. Primieramente le loro mancanti membra cominciano a ripararſi più prontamente. Un polipo tagliato per lo traverſo in molte parti, principia a moltiplicarſi in altrettanti polipi in poche ore. Un verme, ſia di terra, ſia d'acqua, eſige più giorni per la ſua iniziale riparazione. Una lumaca all' oppoſito, e una ſalamandra addimandano più ſettimane. Secondamente il completo riproducimento nei primi ſi ottiene in un tempo conſiderabilmente men lungo, che nei ſecondi. Pochi giorni pel conſeguimento di queſto ſi richieggon dal polipo: i ſuddetti vermi eſigono il corſo d' intiere ſettimane; più meſi vuole la lumaca per rifare la teſta, e un anno intero non baſta alle ſalamandre perchè le gambe novelle acquiſtino la naturale grandezza delle vecchie. In terzo luogo lo ſteſſo animale dotato della qualità riproduttiva, quanto più è giovane, e in conſeguenza di fibra più cedente, più tenera, tanto più preſto rimette perfettamente le parti perdute. Oltre l' averlo io toccato con mano nelle ſalamandre, ho avuto l' agio di vederlo nelle lumache, le quali decollate rimettono il capo in meno d'un meſe e mezzo, e lo rimettono molto prima, ſe mutilate ſieno più giovani ancora. Da ultimo la fibra in qualche animale ſe venga a ſminuire la nativa mollezza, la riproduzione vien meno. Ne abbiamo un parlante eſempio ne' ranocchj. Quando ſono ancora girini, ma che cominciano però a metter le gambe, ſe loro vengan reciſe coteſte gambe, certa coſa è per le oſſervazioni mie ſteſſe, che le rifanno interiſſimamente. Ma la coſa non va così ogni qualvolta le medeſime vengano tronche, acquiſtato che abbia il girino le ſembianze di rana. Allora dunque non è mai o quaſi mai che il troncone rimetta una gamba novella. Ma donde un fatto tanto diverſo nelle medeſime membra di queſto amfibio? Diremo noi che quella virtù, quella potenza

di riprodurre, che avea l'animale essendo girino, l'abbia egli perduta, facendosi rana? Siccome ad onta di tal metamorfosi seguita egli ad essere lo stesso animale (*a*), questa idea sembrami poco filosofica. Trovo più consacente al vero il pensare, che nella rana continui ad aversi la potenza riproduttrice; ma che laddove tal potenza nel girino veniva all'atto, a motivo della tenerezza grande della fibra, le sia in seguito ciò conteso per l'induramento di questa. Tentiamo di schiarire di più tal pensiero. La rana sotto forma di girino non esce mai fuori dell'acqua: che anzi uscendone perirebbe. Solamente a quando a quando dal fondo si lancia alla superficie, e per un momento mette fuora il muso per espellere dai polmoni l'aria vecchia, e per assorbirne della nuova. Il troncone adunque delle gambe recise rimane in quel tempo in uno stato di somma mollezza, per trovarsi sempre immerso nell'acqua, e da essa in ogni punto bagnato. La gambina adunque sotto forma di germe potrà forare, diciam così, il troncone, ed uscirne, e svolgersi liberamente. Non così le accaderà, ove la rana acquistato abbia le proprie, e permanenti fattezze; giacchè allora restando il più fuori dell'acqua, e per poco d'ora attuffandovisi solamente alle presenza di qualche insidia, o pericolo, il troncone dovrà soggiacere alle vive impressioni dell'aria, e quindi si cicatrizzerà, e in grazia della cicatrice contratta non permetterà al germe riproduttore di rompere, e svilupparsi.

La mutilazione delle lumache, di cui ho fin qui ragionato, è stata per lo più da me fatta a primavera alquanto inoltrata, veduto avendo che per ottenersi in esse la riproduzione non vi vuol meno del grado decimo

(*a*) Dissertaz. di Fisic. Animal. e vegetab. T. II.

mo terzo del termometro del Reaumur, il qual grado nelle contrade di Lombardia non ſuole averſi prima di detta ſtagione. E fatta allora la decapitazione ſi è ſicuro che prima del verno le lumache, almen molte, rifanno perfettamente la teſta. Ma che accaderà egli adunque fatto il taglio verſo la metà di Settembre o in quel torno, quando cioè il mentovato grado di calore non ſuole eſtenderſi preſſo di noi al di là d'un meſe, per le ſopravvegnenti pioggie autunnali? Ho inſtituito più eſperimenti per lo ſvolgimento di queſta curioſa queſtione, e ne ho ottenuto i ſeguenti riſultati. Se le lumache già mutilate io le faceva ſtare nel tepor d' una ſtufa, eguale o ſuperiore al grado ſuddetto, era ſicuro di una perfetta riproduzione aſſai prima del finir dell' inverno. Se le cuſtodiva in una ſtanza, il cui freddo per alcuni giorni giunto foſſe al grado della congelazione, la più parte andava a perire. Se poi il freddo era minore, riſtavano per tutta quanta l' avverſa ſtagione di riprodurre, e ricomparita la primavera, il capo o le corna, già cominciate ſopra inverno a ſvilupparſi, ſeguitavano a farlo fino all' intiero loro compimento. Che ſe da ultimo la decollazione ſeguiva nel principio del verno, e d' altronde ſi aveva l'avvertenza che non periſſer di freddo, ſenza però tenerle dentro a una ſtufa, in tal circoſtanza ſul piano del troncone non appariva mai durante l'inverno verun principio riproduttore, e ſolamente queſto cominciava a farſi paleſe in Maggio, e proſeguía poi a ſvilupparſi, e ad ingrandirſi ne' meſi eſtivi.

E queſto tenor di procedere, che pratica la natura nelle riproduzioni delle lumache, lo pratica in quelle del pari delle ſalamandre, e de' lombrichi terreſtri, ed acquatici, con tal differenza però che queſto genere di vermi riproduce anche, ſebben lentamente, nel grado del temperato: queſto poi derivi o per la mollezza gran-

de della fibra, onde ſono compoſti, o a cagione della ſingolare loro natura.

Quando era occupato ſu la riproduzione dei lombrichi, mi preſe voglia di ſapere, ſe la forza riproduttrice veniva ad eſaurirſi nella prima riproduzione: e trovai il contrario. Anzi alla ſeconda riproduzione tagliata ne ſuccedeva una terza, levata queſta ne ſottentrava una quarta, indi una quinta ecc. Nè ſolamente ſi ottenevano tali ſucceſſive riproduzioni levata via unicamente la porzione di mano in mano riprodotta, ma fatto il taglio la ſeconda volta entro la riproduzione prima, la terza entro la riproduzione ſeconda, la quarta entro la riproduzione terza, ecc. Quindi io veniva ad avere come una ſcala di riproduzioni unite al vecchio troncone, ſempre più giovani, più ſottili, e di colore a mano a mano più aperto.

Queſte riproduzioni di riproduzioni ſi ottenevano egualmente nella coda de' girini, e ciò che è più ſorprendente in quella delle ſalamandre, e nelle loro gambe, malgrado l'andar fornite queſte due qualità di membra di parti tanto fra loro diſſomiglianti. Se adunque la coda, e le quattro gambe riprodotte ſi ritagliavano ad una ſalamandra, rigermogliavano per la ſeconda volta altre quattro gambe, ed un' altra coda, e un tal giuoco ſi poteva tirare avanti per molto tempo. Di fatto nelle ſalamandre giovani, in cui la riproduzione è prontiſſima, nei meſi di Giugno, Luglio, ed Agoſto furono da me ottenute ſei ſucceſſive riproduzioni delle quattro gambe, oltre ſei riproduzioni della coda. E in una di queſte ſalamandre tra le oſſa della coda riprodotte, e quelle delle gambe, nei tre meſi accennati giunſi a contare 687 oſſa rifatte.

In virtù adunque di queſte riproduzioni di riproduzioni ne' lombrichi terreſtri, ne' girini, e nelle ſalamandre, fui voglioſo di ſapere, ſe altrettanto ſi otteneva dalle lumache. Il perchè avendone io mutilate diverſe,

parte con la recisíon delle corna, parte con quella del capo, quando levato a metà, quando tolto per intiero, subito che queste parti si erano rinnovate, io le recideva in quel sito precisamente, dove erano state troncate le vecchie. Questa seconda riproduzione non lasciò di aversi, e nella maniera stessa con cui si era avuta la prima, e lo stesso fu di una terza riproduzione, ma la morte sopraggiunta alle lumache mi vietò spinger più oltre questo curioso genere di tentativi.

Per altro lo scioglimento di questa questione me ne fece nascere un' altra, e questa fu, se l' esaurimento nelle riproduzioni veniva in fine ad aversi, oppure se esso non succedeva giammai, di modo che gli animali seguissero a riprodurre finchè seguivano a vivere. E questo saggio di esperienze poteva instituirsi per preferenza nelle salamandre, sceltene delle più giovani, per essere questo genere di amfibj e più facile a mutilarsi delle lumache, e di vita più dura, e di più agevole riproduzione. Ma mi è mancato l' ozio per questi ultimi tentativi, i quali, se venissero da qualche sperto Naturalista intrapresi, non sarebbero sicuramente vuoti di utili conseguenze, e potrebbero forse valere un novel Capitolo di Fisiologia.

In tutto il decorso di questa Memoria ho riferito i risultati delle mie sperienze, sopprimendone quasi sempre i dettagli. Se avessi voluto esporli partitamente, e come si trovano su' miei Giornali, nato sarebbe un volume, non che una Memoria. Ma premeva a me troppo di cercar d' istruire il lettore, senza punto annojarlo per lunghi dettagliati racconti. Spero tuttavia di essermi procacciato tanta confidenza presso del Pubblico, per esser creduto. D' altronde pressochè tutti questi risultati ho la compiacenza di vederli confermati da diversi insigni Naturalisti, come apparirà da una seconda Memoria su la Riproduzione della testa delle lumache, nella quale si darà un compendio degli scritti

pubblicati a favore della mia scoperta, e nel tempo stesso un altro di tutti quelli, per cui si è cercato d'impugnarla. I confermatori, a mia notizia, sono i Signori *Turgot*, *Lavoisier*, *Tenon*, *Herissant*, *Bonnet*, *Senebier*, *Schaeffer*, *Roos*, *Muller*, *Scarella*, *Troilo*, oltre a tre altri Italiani pubblici rinnomati Professori di Notomia, i quali recentemente ripetute hanno queste mie sperienze, e trovate avendole veracissime, si affrettano di comunicarmene graziosamente le loro Memorie. Gl' Impugnatori sono i Signori *Murray*, *Wartel*, *Cotte*, *Bomare*, *Adanson*, *Schroeter*, *Argenville*, *Presciani*. In questo secondo mio Scritto esaminerò con filosofica imparzialità quale sia il valore di queste impugnazioni, senza lasciar di pesare quale sia il merito degl' Impugnatori. Io sono ben lungi dal pensare che questo mio scoprimento sia per far epoca nella naturale Filosofia. Piuttosto potrebbe far epoca nella Storia dello spirito umano il vedere come in una esperienza sì comoda, sì facile, quale si è quella di conseguire la riproduzione del capo nelle lumache, fallita l' abbiano tanti Fisici, e ciò che più sorprende in un Secolo sì illuminato, sì cauto, e che sembra esser quello delle Osservazioni, e delle Esperienze, se d' altra parte non fosse notissimo, che lo sperimentare comunque è mestiere di tutti, lo sperimentare a dovere è sempre stato, e sarà sempre di pochi.

Fig. VIII

Fig. II

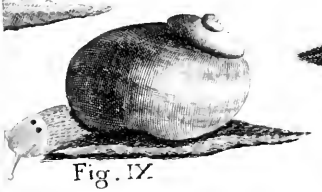


Fig. IX.

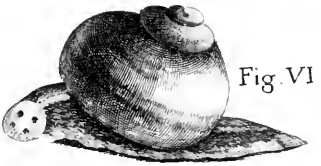


Fig. VI

Fig. IV

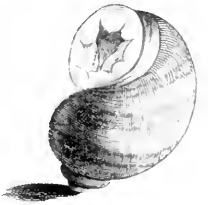


Fig. I

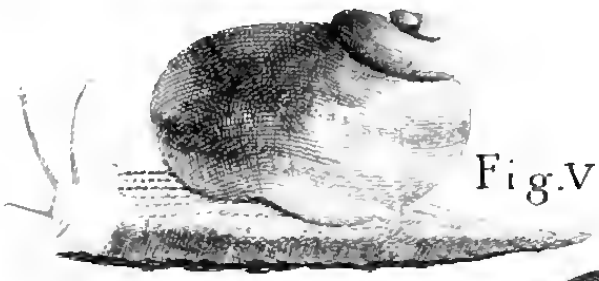


Fig.VIII

Fig.II

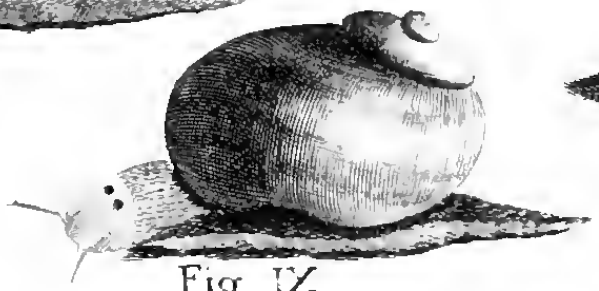


Fig. IX.

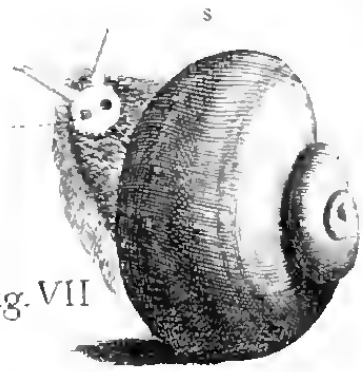


Fig. VII

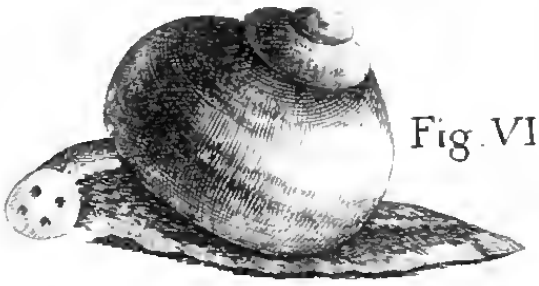


Fig. VI

Fig.V

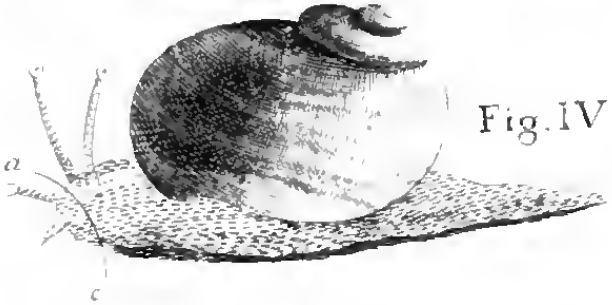


Fig.IV

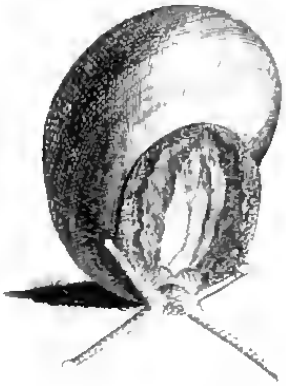


Fig.III

Fig.I

MEMORIA

INTORNO ALLA MAGGIOR PERFEZIONE

DELL' ARGANO

Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di S. A. R. il Granduca di Toſcana.

NOn vi è macchina più comune, e più ovvia dell' argano, del quale ſi fa uſo quotidiano nell' Architettura civile, nella Militare, e nella Nautica. Qualunque peſo conſiderabile, che debba elevarſi per decorare con ornato pietrame le fabbriche civili, qualunque reſiſtenza, che debba ſuperarſi per traſportare le macchine militari ancora per l' erto delle montagne, qualunque peſantiſſima áncora, che un vaſcello da guerra debba ritirare dal fondo del mare, in una parola qualunque operazione ſi faccia, che ſia di qualche rilievo, per tutto chiamaſi in ajuto l'energia dell'argano. L' importanza però di tale ordigno non corriſponde alla ſua perfezione. Pareva ben naturale, che già da gran tempo ſi foſſe ſtudiato da' Meccanici per condurlo alla ultima ſua perfezione. Ma egli è accaduto tutto al contrario, che le perſone di talento rivolte tutte alle più ſublimi teorie, hanno abbandonata sì importante macchina alle più baſſe maeſtranze, le quali col natural talento l' hanno condotta a quello ſtato, in cui eſſa ſi trova, non eſſendo eſſe capaci di conoſcere, ſe ſiano grandi, o piccole le ſue reſiſtenze, ſe vi ſia argomento di ſcemarle, e quali ſieno le maniere per un oggetto così rilevante.

Quando l'anno 1739. la *Reale Accademia delle Scienze di Parigi*, per lo zelo che essa fomenta non solo per le Scienze più sublimi, ma ancora per le arti le più comunali, propose il premio in favore di chi *ritrovasse un Argano, il quale avesse il vantaggio dell' antico senza averne i difetti*. Ma non avendo trovato nelle Memorie, che le furono inviate, quelle condizioni, che essa esiggeva, sospese per allora il suo giudizio, e ripropose il premio doppio per l' anno 1741 per il medesimo Problema. Fra le nuove Memorie, che in detto anno furono all' Accademia trasmesse, niuna in realtà potè soddisfare alle dotte mire della medesima. Ma ritrovandosi in esse delle nuove teorie, ed insieme de' notabili miglioramenti nella macchina proposta, fu ripartito il premio a quattro Memorie, e le altre tre furono pubblicate sotto il titolo di *accessit*. Tanto è vero, che ancora negli ordigni più semplici, e più dozzinali s' incontrano gravissime difficoltà per emendarli, e migliorarli, e che non servono gli studj più indefessi di Meccanici accreditati.

La ragione, per cui questa macchina ha ricevuto un assai mediocre miglioramento, consiste secondo il mio parere nel piccol progresso, che ha fatto dalla fine del passato secolo fino agli anni correnti l'altra non meno importante ricerca intorno alle resistenze degli attriti, alle quali sono soggetti tutti i nostri solidi. In qualunque modo si modifichi un argano, sempre però dee con esso superarsi non solo la resistenza del grave peso, che dee salire contro la direzione de' gravi, ma ancora quella degli attriti, che l'argano dee risentire nell'elevare il detto peso. Questa estranea resistenza si è sempre valutata di $\frac{1}{4}$ del peso da elevarsi. E qualche volta le circostanze son tali, che essa giugne ancora alla metà. Sicchè la forza motrice era destinata a superare la metà di più della resistenza della pura gravità. Anzi quando ancora la resistenza semplice si supponesse di $\frac{1}{7}$ se-

condo il ſentimento del Sig. d' *Amontons* (*a*), reſterà però da aumentare la potenza non ſolo del terzo, ma di una ſerie di frazioni, che ſi eſporranno a ſuo luogo, per le quali poi alla fine la vera miſura della potenza eſſer doveva la metà di più, che non eſigeſſe il peſo del grave ſenza le reſiſtenze. Poichè per ſuperare quell' $\frac{1}{9}$ vi voleva una nuova forza, che è di $\frac{1}{9}$, e per ſuperare queſto $\frac{1}{9}$ ve ne voleva un' altra, che è di $\frac{1}{27}$, e così diſcorrendo all' infinito; indi è, che i cambiamenti immaginati in favore dell' argano, incontrando tutti così ſenſibili reſiſtenze, ſempre reſtava la potenza motrice ſoggetta ad eſſer troppo aggravata. Che ſe poi ſi voleſſe diminuire la detta reſiſtenza con aumentare aſſai la proporzione tra 'l vette dell'argano, ed il raggio del ſuo cilindro, allora potrebbe certamente alleggerirſi indefinitamente la potenza motrice; ma tale alleggerimento cagiona un nuovo inconveniente, che conſiſte nel gran conſumo del tempo, che allora ſarebbe neceſſario, giacchè ſempre tra' tempi e le potenze vi deve eſſere una determinata proporzione, dimoſtrandoſi nella Meccanica, che il viaggio del peſo reſiſtente al viaggio della potenza motrice ſtia come il valore di queſta al valore del peſo, cioè che ſtia il tempo al tempo, come il viaggio al viaggio, cioè come il valore al valore. Per il diſpendio delle operazioni meccaniche è la ſteſſa coſa, che un lavorante impieghi due ore di tempo per alzare un dato peſo, o per vincere una qualunque reſiſtenza, ovvero che due lavoranti ve ne conſumino un' ora ſola. E perciò l'aumentare la ragione del vette al ſemidiametro del cilindro non porta quel vantaggio, che alle prime apparenze ſi crederebbe.

Conveniva adunque alla ricerca dell' argano perfetto premetterne un' altra ſulle *minime reſiſtenze degli attriti*,

(*a*) *Memorie dell' Accademia Reale di Parigi* anno 1699.

ſenza di cui poco vantaggioſi ſempre ſaranno i concetti, e compenſi de' più valenti Meccanici.

Eſſendomi io applicato da tre anni in qua a fare gran numero di eſperienze appunto ſulla reſiſtenza degli attriti, ed avendo già ritrovato, che in alcune combinazioni di ſolido con ſolido, di ſuperficie con ſuperficie, di peſo con peſo, tali reſiſtenze potevano aſſaiſſimo diminuirſi, fino a ridurle dalle centeſime 33 per cento alle ſole 3 centeſime, ed ancora aſſai meno (come ſi trova dimoſtrato in un mio Trattato ſu queſta materia); indi è che mi ſi è aperto così un campo per poter perfezionare aſſai più, che non è ſtato fatto fin' ora, la macchina dell' argano. Queſto è ciò, che io dimoſtrerò nella preſente Memoria. E per venirne a capo la dividerò in quattro parti.

La prima racchiuderà la deſcrizione dell' argano ordinario, ed il ſuo ſolito maneggio, cogl' inconvenienti che eſſo racchiude.

La ſeconda eſporrà la teoria di detto argano tanto ſenza la reſiſtenza degli attriti, quanto con la conſiderazione de' medeſimi.

Nella terza deſcriverò, come, ed in qual modo poſſa perfezionarſi l' argano in ciaſcuna ſua parte.

E nell' ultima dimoſtrerò, in qual modo nell' argano ridotto ſi tolgano gl' inconvenienti dell' ordinario, e quanto in eſſo ſi diminuiſcano le reſiſtenze degli attriti.

PARTE I.

Deſcrizione dell' argano ordinario, ſuo maneggio, ed inconvenienti che s' incontrano.

L' argano ordinario, ſe voglia riferirſi alle macchine ſemplici della Meccanica, può ridurſi alla macchina *del Vette*, ovvero all' altra chiamata *Axis in Peritrochio*. Eſſo conſiſte

conſiſte in tre parti, delle quali è compoſto, cioè della ſua caſſa, o caſtello *M*, *M*, *M*, (*fig. I*) il quale è fatto per reggere, e ſoſtenere le altre parti del ſuo *fuſo*, detto altrimenti *Albero AB*, e finalmente delle ſue *Manivelle GE*, *HF*.

Il fuſo ſi fa girare ſul ſuo pernio inferiore *Pp*, che ricavaſi dal medeſimo fuſo, aſſottigliandolo alquanto. Tal pernio è ricevuto da un concavo ſimile ricavato dalla panchetta inferiore *Hb*, e ſopra di eſſa ripoſa quel riſalto, che laſcia il pernio. La parte intermedia col fuſo racchiuſa tra le due panchette ſi fa di figura cilindrica *Bb*; alla medeſima ſi avvolge per due, o tre volte il canapo, che colla ſua eſtremità *D* va ad elevare il peſo propoſto, e nell'altra eſtremità *C* è ritenuto a ſtretta col fuſo, per mezzo di uno, o due lavoranti *Ll*. Eſſi devono fare una tal forza, che il canapo reſti ſempre obbligato al fuſo dell' argano colla vicendevole ſcabroſità del legno, e del canapo, giacchè ſe detto canapo giraſſe da sè attorno al fuſo, non ſarebbe poſſibile l'elevazione del dato peſo. Il collo dell'argano *Nn* ancor eſſo è cilindrico, ma di minor diametro del ſubbio, o del fuſo, giacchè deve eſſo girare ſul concavo formato nella panchetta ſuperiore *Oo*, colla quale eſercita i ſuoi attriti inſieme col pernio inferiore. Indi è, che tra 'l pernio ed il collo dell'argano formaſi la reſiſtenza relativa a' ſopraddetti attriti. Vi è finalmente la teſta dell'argano *Aa*, la quale ſi fa di forma quadrata, ed in eſſa ſi ſcavano due traſori pure quadrati per inferirvi le manivelle *GB*, *HF* della ſteſſa figura, ma ſcantonata nelle quattro eſtremità per meglio adattarſi alle mani de' lavoranti.

La detta teſtata dee ſoſtener la forza di quattro, e più lavoranti, che operano col potente momento del lungo vette. Indi è, che eſſa va faſciata tanto nell'eſtremità ſuperiore, che inferiore di due cerchj di ferro di proporzionata groſſezza, affinchè eſſi ſoſtengano le forze

de' lavoranti, i quali senza un tal soccorso squarcerebbero ben presto la testata dell'argano, che è indebolita per mezzo de' due nominati trafori.

Il legname tanto del castello, quanto del fuso, e manivelle si adopera del più forte, che si trovi, come di noce, di quercia, di leccio, o altro somigliante.

Il maneggio dell'argano consiste nelle rivoluzioni delle manivelle, e del fuso, giacchè rivolgendosi le prime *G*, *H*, *E*, *F* obbligano il subbio a girare attorno al suo asse, ed essendo a questo subbio ristretto il canapo, esso pure dee rivolgersi attorno al fuso, e perciò accostandosi sempre il punto *D* all'argano quando sia preponderante la forza motrice, dee tirare il peso, o la resistenza che dee superarsi.

Un tal semplice maneggio ci presenta gl'inconvenienti, che si soffrono in tal macchina. Poichè primieramente il canapo nell'atto, che gira, sarà obbligato o a scendere verso la panchetta inferiore, o a salire verso la superiore, ed in tal discesa, o salita, esso ben presto si troverà a stretta con dette panchine, e così l'operazione resterà tutta sospesa. Per continuarla adunque convien legare, o allacciare il canapo con funicelle addosso alle taglie o semplici, o doppie, e tale operazione dicesi in termine d'arte *ammagliare*. Così l'argano resterà libero, e sgravato, e perciò il canapo si fa o salire, o scendere secondo il bisogno, per ricominciare da capo l'operazione interrotta. Un tale interrompimento accaderà più, e più volte nelle lunghe operazioni, e perciò esse saranno sempre assai ritardate non senza scapito dell'Erario o pubblico, o privato; giacchè mentre il pontajo va ad ammagliare, e sospendere la forza dell'argano, gli altri operanti, che spesso sono in buon numero, stanno aspettando inutilmente.

Un tale inconveniente rendesi ancora più sensibile nella Nautica, e specialmente nell'operazione importantissima di salpar le ancore in un vascello da guerra. Poi-

chè a tal fine principalmente ſopra il primo ponte ſi coſtruiſce un argano fortiſſimo, che ſi tiene nel ſecondo ponte per le operazioni meno rilevanti. Deveſi perciò ſoſpendere nell' argano doppio l' operazione di ſalpare un' ancora per elevare, o abbaſſare il canapo ſulla ſuperficie cilindrica del ſubbio, per poi ricominciare l'operazione.

Ma eſſendo le gomene de' vaſcelli così groſſe, così rigide, e poco maneggevoli, che non è poſſibile il piegarle ſul fuſo dell'argano, ſi uſa il compenſo di un canapo ſecondario (*a*) che ſia pieghevole per avvolgerlo al ſubbio. Un tal canapo ſi lega alla gomena fuor del vaſcello, e le ſue cime ſi portano all'argano per avvolgerle al medeſimo. Così rivolgendoſi l' argano, la gomena per mezzo del canapo ſi trae verſo il vaſcello. Quando eſſa però è già pervenuta colla ſua legatura al bordo del medeſimo, allora è neceſſario ſciogliere il canapo, e volgere l'argano all'indietro, ed andare a far la ſeconda legatura in un punto inferiore per continuare l'operazione. Indi è, che dopo più e più interrompimenti tanto per regolare il canapo ſul ſubbio, quanto per iſciogliere, e rilegare il canapo a' punti inferiori della gomena, ſi perde un tempo prezioſo, che qualche volta mette in pericolo il baſtimento.

Al primo inconveniente ſi aggiunge il ſecondo già accennato, che è quello delle eſtranee reſiſtenze degli attriti, le quali per le particolari circoſtanze ſono aſſai conſiderabili. Si mettono a contraſto le fibre longitudinali del legno colle traſverſali, come appunto ſuccede tanto ſul pernio, che nel collo dell'argano, e tal circoſtanza molto accreſce le reſiſtenze. Inoltre il cilindro dell' argano nella ſua baſe ſi ſa ſtriſciare attorno alla

(*a*) Il qual diceſi nella marina Franceſe *Tournevire*.

panchetta inferiore *Ff*, ſulla quale ripoſa, e queſti contatti ſono ſparſi per una notabil ſuperficie, che conſiſte in una faſcia circolare ben larga tra la panchetta ed il piede del ſubbio.

Il collo dell'argano *Ss* ancora eſſo ha una notabil ſuperficie, che viene a contatto contraſtando col concavo cilindrico eſcavato nel tavolone ſuperiore *Ss*

Ordinariamente i lavoranti collocati all'eſtremità delle leve *G, H, E, F* talmente ſi aggravano ſulle medeſime nell'atto, che girano, che producono una nuova reſiſtenza ſul pernio inferiore dell'argano, e ſu quella faſcia circolare.

Conſiderando tutte inſieme le eſtranee reſiſtenze degli attriti, eſſe ordinariamente oltrepaſſano la metà del peſo reſiſtente, ed aſſai ſpeſſo giungono a $\frac{2}{3}$ del medeſimo. Indi è, che eſſendo propoſto ad elevare coll'argano comune un peſo di libbre 4 mila, in realtà per le imperfezioni di eſſo, e del ſuo maneggio vi vuole una forza motrice equivalente a 6, ed a 7 mila libbre. Indi è, che la ſpeſa dell'operazione viene a ricreſcere nella ſteſſa proporzione del 4 al 7, e non di rado del 4 all'8.

Quantunque ſi poſſano dire eſtranei all'argano i bozzelli, e le taglie ſemplici, o doppie, pur nondimeno eſſe ſempre accompagnano il maneggio del medeſimo. Poichè la direzione del canapo dalla direzione orizzontale *DD* deve rivolgerſi alla ruſticale πP, deve poi paſſare per le taglie, dalle quali va a legarſi al dato peſo per elevarlo. Ora i bozzelli, e le taglie regolate ſecondo il ſolito, riſentono ancor eſſe una notabile reſiſtenza per i loro particolari attriti. E tal reſiſtenza unita a quella dell'argano comune aſſai ſpeſſo eſigge una potenza motrice più che doppia di quella, che occorrerebbe ſenza la giunta delle reſiſtenze. Sicchè in queſta parte la meccanica dell'Architettura rieſce aſſai difettoſa.

PARTE II.

Teoria dell' argano ordinario, tanto senza le resistenze, che con includervi le medesime.

Quanto è stato fin' ora esposto generalmente, convien dimostrarlo colla teoria. Or questa senza l' ipotesi delle resistenze è assai semplice. Poichè facciasi, come il braccio della leva al semidiametro del subbio, così il peso da elevarsi al quarto termine: questo, come si sa, ci rappresenterà il valore della potenza per mettersi in equilibrio col peso resistente. Onde aggiungendo alla potenza qualche valore di più, essa farà in grado di elevare il peso contro la direzione de' gravi. (*a*)

Per passare alla stessa teoria nell' ipotesi delle resistenze degli attriti, si contentano alcuni di aggiungere alla potenza una sua terza parte, supponendo col Sig. *Amontons*, che tal parte sia quella, che compete a questo genere di resistenza.

Così se il dato peso da elevarsi fosse di libbre 4000, ed il braccio del vette al semidiametro del cilindro fosse come il 20 : 1, facendo, come il 20 : 1 = 4000 al quarto termine, questo farebbe di libbre 200, e tale esser dovrebbe la potenza motrice senza l' uso delle resistenze. Se adunque queste equivalgono alla terza parte del peso, vi vorrà per esse la terza parte di più della potenza motrice, cioè altre libbre 66. 66 centesime. Onde la potenza accresciuta per supplire alle resistenze degli attriti esser dovrebbe di libbre 266. 66 centesime.

Una tal teoria è erronea per due maniere. Primiera-

(*a*) Avvertasi, che al semidiametro del subbio intendesi aggiunto quello del canapo.

mente, perchè accreſciuta che ſia la reſiſtenza di quel terzo, eſſo genera la ſua particolar reſiſtenza, e queſta ne genera una terza, e poi la quarta, la quinta, all'infinito, come già è ſtato accennato.

Tutte queſte reſiſtenze formano una ſerie, la quale biſogna ſommare, e tal ſomma è quella, che dee aggiugnerſi alla potenza motrice. Sia il peſo da elevarſi $= P$, ſia la reſiſtenza $= a$. Onde ſarà $\frac{P}{a}$ il primo termine della reſiſtenza. A queſto devono aggiungerſi tutti gli altri $\frac{P}{a^2}$, $\frac{P}{a^3}$, $\frac{P}{a^4}$ ecc. Intorno a tal ſerie nel mio Trattato ſulle reſiſtenze degli attriti dimoſtraſi, che $\frac{P}{a-1}$ è uguale alla ſomma di tutti i termini decreſcenti all'infinito. Indi è, che facendo $a = 3$, ſarà $a - 1 = 2$. Onde la reſiſtenza degli attriti ſarà $= \frac{P}{2}$ cioè ſarà uguale alla metà del peſo da elevarſi.

Onde nell'ideato eſempio il valore della potenza ſarà non già di $266\frac{2}{3}$, ma bensì di 300 parti, o libbre.

Il ſecondo equivoco di quella teoria conſiſte in ciò, che la proporzione del vette al raggio del cilindro non è la ſteſſa, che quella del medeſimo vette al ſemidiametro del pernio, giacchè queſto ſi fa ſempre minore di quello del fuſo, o del cilindro. E dall'altra parte la reſiſtenza degli attriti ſi valuta ſul pernio, e ſul collo dell'argano, e non già ſul cilindro. Indi è, che dovendo diminuirſi la reſiſtenza, eſſa dee ſcemare nella ragione del vette al raggio del pernio, e non già a quella del cilindro. Sia adunque queſta ſeconda ragione come il 25:1 e facciaſi come il $25 : 1 =$ libbre 1333 al quarto termine, queſto ſarà di libbre 55, che aggiunte alla potenza fanno libbre 255, e non 266. E' ſtato adoperato

il terzo termine dell' analogia di libbre 1333 ſupponendo la terza parte di libbre 4000.

Ma per correggere il primo errore deve adoprarſi $\frac{1}{2}$ P, cioè libbre 2000. Onde l'analogia ſomminiſtrerà per parte degli attriti l'aumento della potenza di libbre 80. 80
e per il momento del peſo reſtano libbre 200
Onde la potenza colle reſiſtenze ſarà equivalente a libbre . . . . . 280.

Non è ſtata però ancora incluſa in queſto calcolo la particolar circoſtanza delle fibre del legno, che contraſtano ſcambievolmente. Non è ſtata conſiderata la ſuperficie di tanti contatti tanto nel piede, che nel collo dell'argano, per cui io credo che la reſiſtenza debba valutarſi non già di $\frac{1}{3}$ ma di $\frac{1}{2}$, e qualche coſa di più. Ora in tale ipoteſi la ſerie $\frac{P}{a-1}$ ſarà uguale a $\frac{P}{2-1} = \frac{P}{1}$, cioè la reſiſtenza riferita al pernio dell'argano ſarà uguale al peſo da elevarſi, cioè alle libbre 4000. E diminuendole nella ragione del 25 : 1, ſi dedurrà la reſiſtenza riportata alla potenza di libbre 150, che unite al valore della potenza ſemplice di libbre 200, forma la potenza totale colle reſiſtenze di libbre 350.

L'operazione dell'argano è affatto indiviſibile da quella di più pulegge, le quali per mezzo di un canapo rivolgono le direzioni del peſo traente. E quantunque le reſiſtenze di tali pulegge ſieno eſtranee a quelle dell'argano, pure eſſe ne ſono inſeparabili. Nella fig. I. oſſerviſi, che il canapo dal ſubbio dell'argano dee portarſi alla puleggia π, e per mezzo di eſſa dee ſalire alla ſeconda puleggia P, per la quale paſſando, dee diſcendere per attaccarſi al dato peſo PP'. Indi è, che la potenza motrice per ſuperare il peſo PP', elevandolo al

punto destinato di una fabbrica, dee trasmettere la sua azione prima per l' argano, e poi per le due pulegge π,P. Ma nell' operazione delle due pulegge incontrasi la sua resistenza, che sarà bene rintracciarla per complemento della presente materia.

Convien dunque osservare, che non solamente il peso PP' è aggravato sul pernio della puleggia P, ma la forza, colla quale il canapo opera dalla parte opposta, eguaglia almeno lo stesso peso. Indi è, che se il peso PP' facciasi di libbre 4000, il pernio almeno sosterrà il doppio di detto peso. Ho detto *almeno*, perchè detto canapo non solo deve equilibrare il peso PP', ma dee ancora superare la resistenza. Ma sia per ora il carico del pernio di libbre 8000; e sia secondo il consueto la resistenza di $\frac{1}{7}$ del peso. Ma per le ragioni dianzi addotte invece di $\frac{P}{3}$ deve adoperarsi l'altra frazione $\frac{P}{2}$. Onde sarà $\frac{8000}{2} = 4000$.

Dovendo adunque riportare una tal resistenza dal pernio della puleggia alla sua circonferenza, essa va diminuita, come ognun sa, nella proporzione del di lei diametro al diametro del suo pernio. Secondo le comuni pulegge una tal proporzione rilevasi, come il 5 : 1. Ma per favorire piuttosto il caso delle resistenze, ci gioverà di adoperare la proporzione del 6 : 1. Ed in tale ipotesi essa sul giro della puleggia si troverà ridotta a libbre $666\frac{2}{3}$. Indi è, che il canapo $P\pi$, non solamente sarà aggravato, e forzato colle date libbre 4000,
ma eziandio dalle altre libbre . . . . . $666\frac{2}{3}$

Sicchè il totale sarà equivalente a libbre 4666.66 cent. E con tal forza esso va a passare nella seconda puleggia π, avvolgendosi in essa, non già per la sua semiperiferia, come nella prima, ma bensì per un arco di quadrante.

Pertanto

Pertanto dovremo prima raddoppiare la predetta preſſione, e poi diminuirla nella ragione del diametro del cerchio alla corda del quadrante.

Raddoppiandola pertanto, eſſa ſarà di libbre 9333.33

Eſſendo proſſimamente la proporzione del diametro alla corda del quadrante come il 1000 : 707 proſſimamente, avremo la ſeguente analogia:

Come 1000 : 707 = 9333.33 al quarto termine. Queſto tornerà di libbre 6598.66

che proſſimamente può farſi ſenza error ſenſibile di libbre 6598.00

La cui metà ſarà di libbre 3299.00

Or ſupponendo di bel nuovo, che la proporzione della ſeconda puleggia a quella del pernio ſia come il 6 : 1, dividendo il ſopraddetto numero per il 6, avremo per la reſiſtenza della ſeconda puleggia libbre 549.5

Sicchè ſommando le reſiſtenze degli attriti col dato peſo da elevarſi ſarà

Reſiſtenza per la prima puleggia *P* lib.	666.66 cent.
Reſiſtenza per la ſeconda puleggia .	549.50
Valore del peſo da elevarſi	4000.00
Totale per la forza del canapo, che portaſi all' argano libbre	5216.16 cent.

Dal che deduceſi, che la potenza motrice applicata all' argano deve ſuperare libbre 1216 di più, che non farebbe per ſuperare il peſo *PP'*, che ſi propone ad elevarſi.

Reſta ora a calcolare il valore della potenza motrice per ſuperare le due reſiſtenze del peſo, e degli attriti.

Ritornerà la ſerie già deſcritta $\frac{P}{a-1}$, la quale nel caſo preſente è uguale a $\frac{P}{2}$

Onde pigliando la metà della deſcritta ſomma, ed

aggiungendola al totale, si formerà il valore del peso, e degli attriti, che debbono vincersi dalla potenza motrice.

Sarà dunque l' antecedente pressione di libbre 5216, come più prossima togliendo la frazione.

Sua metà 2608

Somma delle due partite 7824

Avvertasi però, che non essendo uguale il pernio dell' argano al diametro del cilindro, per riportare le due resistenze all'estremità della leva, converrà adoperare due diverse proporzioni. La prima delle quali esser dee quella dianzi adoperata come il 20 : 1. Onde facciasi

Come il 20 : 1 = 5216 al quarto termine, il quale ci tornerà di libbre 260.80

Per la seconda proporzione dee valere l' altra analogia come il 25 : 1 = 2608 al quarto termine 104.32

Onde il vero valore della potenza sarà di libbre . . . . . 365.12 cent.

Quando senza le calcolate resistenze essa era di libbre 200.00

Sicchè per le resistenze si aumentano libbre 165.12

Per accostarci meglio alla solita proporzione degli argani, invece della parte ventesima, più si adatterebbe la parte decima, ed invece della parte venticinquesima, la sua metà cioè il $12\frac{1}{2}$ sarebbe molto più al caso. In tal nuova ipotesi basterà raddoppiar le partite.

E perciò il valore della potenza senza alcuna resistenza esser dovrebbe di libbre 400.00

Ed includendovi le due resistenze delle pulegge, e quella dell' argano, la predetta potenza deve ascendere al valore di libbre . . . . . 730.24 cent.

Dal che comprendesi, quanto di più la potenza deve aggravarsi per superare le tre resistenze degli attriti, cioè di due semplici pulegge, e del fuso dell' argano, le quali importano libbre . . . . . 330. 24 cent.

Troppo di più importerebbono, se invece delle semplici pulegge si adoperassero le taglie doppie, come assai spesso succede.

Calcolo delle resistenze dell' argano senza l' annesso delle pulegge.

Quantunque sia inseparabile l'uso dell'argano da quello delle pulegge, pure per qualche rarissimo caso gioverà il calcolo delle resistenze del solo argano. Il che si farà nelle stesse ipotesi già maneggiate.

Essendo adunque il peso P di libbre 4000, ed essendo nel caso presente $\frac{P}{a-1} = \frac{1}{2}P$, è manifesto, che la prima proporzione sarà

Come $10:1 = 4000$ al quarto termine, che importerà libbre . . . . . 400. Ed essendo la seconda proporzione, come $12\frac{1}{2}:1 = 200$ al quarto, questo ci tornerà di libbre . . . . . 160. Onde il valore della potenza esser dovrebbe lib. 560.

Nelle altre ipotesi maneggiate sul principio di questo articolo la potenza è stata calcolata di lib. $266\frac{2}{3}$

Di libbre 255

E finalmente di lib. . . . . 280, come potrà vedersi. Ma essendo doppie le proporzioni del vette al semidiametro del fuso, ed a quelle del pernio, se in esse si sostituisce la prima come 10:1, e la seconda come $12\frac{1}{2}:1$, allora il valore della potenza ne' tre casi esaminati sarebbe doppio, e così

Nella prima ipotesi sarebbe di libbre . . $533\frac{1}{7}$
Nella seconda 510
E nella terza di libbre . . . . . 560, che coincide coll' ultimo calcolo . Questo è il più giusto, correggendo la teorica. Onde sempre sarà notabilissima la resistenza, che soffre l' argano, benchè si tralascino le resistenze delle pulegge, che sempre, o quasi sempre accompagnano le operazioni meccaniche.

PARTE III.

In qual modo possa ridursi, e perfezionarsi l' argano in ciascuna sua parte per diminuirne le resistenze.

Supponendo le resistenze valutate di $\frac{1}{7}$ de' pesi aggravati secondo la regola comune, la Meccanica non ha compensi per diminuire le resistenze, se non che cambiando le proporzioni, che corrono tra 'l braccio della leva ed il semidiametro del cilindro, tra la stessa leva ed il semidiametro del pernio, tra 'l diametro delle pulegge e quello de' loro pernj. La prima proporzione, come è stato avvertito, non può aumentarsi per il consumo del tempo maggiore. Lo stesso dicesi della seconda a motivo, che facendosi il pernio dello stesso legname del cilindro, con un minor diametro, se questo si diminuisca non resisterà alla violenza dell' argano, al quale assai spesso si applicano otto lavoranti. Supponga si il braccio della leva di pollici 60, cioè piedi 5 parigini; la sua parte venticinquesima non sarà più di pollici $2\frac{2}{7}$. Onde il diametro sarà di pollici $4\frac{4}{7}$, che certamente non può farsi minore senza il pericolo di stroncarsi nel più forte maneggio degli argani.

Per aumentare una tal proporzione, altro non resterebbe, se non che formare il detto pernio di ferro, e farlo girare al di sotto nel suo rallino di metallo, che così potrebbe farsi il diametro di pollici 2, ed il se-

midiametro di 1. Indi è che la resistenza sarebbe diminuita assai più di prima, cioè nella ragione del 60 : 1, e non già del 60 : $2\frac{2}{7}$. Convien però riflettere, che non così può farsi al collo dell'argano, il quale dee restare nello stesso fuso di legname, e non può diminuirsi più del consueto. E siccome in detto collo si appoggia ora la metà, ed ora quasi tutto il peso, come succede quando il canapo è salito alla sua estremità; indi è, che il vantaggio sarebbe tenue, e la resistenza sarebbe varia nel salire, che fa il canapo dall' infimo al supremo punto del fusto cilindrico. Quando tal canapo si trovasse nell'infima sua rivoluzione, la resistenza sarebbe la minima, perchè il tutto quasi si aggraverebbe al pernio di ferro; ma quando la rivoluzione salisse all' altezza maggiore, la resistenza sarebbe la massima, perchè ivi tutta la forza si appoggia al collo dell' argano, che resterebbe come prima.

Potrebbono ancora aumentarsi le proporzioni delle pulegge, le quali potrebbono farsi come il 10 : 1 invece del 5 : 1. Ma convien considerare, che le pulegge devono esser maneggevoli, e di peso mediocre, affinchè i pontaj possano trasportarle da un luogo all' altro, e maneggiarle con facilità. Se adunque una puleggia invece del diametro di pollici 5 lo avesse di 10, molto si accrescerebbe il suo peso unito a quello della sua cassa, che ancor essa deve aumentarsi.

Indi è che considerato il tutto, e considerato secondo la pratica, poco profitto può sperarsi dal modificare le accennate proporzioni, e troppo vi vuole per diminuire notabilmente il valore delle resistenze calcolato nelle libbre 263.

Sul riflesso di tali ragioni io ho conchiuso, che tutta l'industria meccanica debba impiegarsi nella diminuzione delle assolute resistenze, le quali invece di essere del 33 per cento, si riducano al 10, all' 8, al 5 per cento. Per tale oggetto io ho intrapresa una fa-

tica di anni tre, ne' quali ho tanto variate le combinazioni de' noſtri ſolidi, che finalmente con qualche combinazione più felice mi è riuſcito di ridurre le reſiſtenze alle ſole tre centeſime, ed ancora meno, come ho accennato nell' introduzione.

Il riſultato delle mie lunghe eſperienze farà pubblicato in un Opuſcolo a parte ſu queſta materia. La più felice combinazione de' noſtri ſolidi ſi è quella, nella quale ſi metta a contraſto la ſuperficie del ferro pulito colla ſuperficie dell' olivo ſalvatico perfettamente ſtagionato, ma coll' untuoſità del ſego, o di ſimil altra materia. Indi è che la reſiſtenza, che io adopererò, non farà di $33\frac{1}{7}$ centeſime del peſo aggravato che ſia di libbre 100, ma bensì di ſole libbre 3

Da tal nuova proporzione naſce, che dato un qualunque peſo da elevarſi, o qualunque reſiſtenza da ſuperarſi, la reſiſtenza aſſoluta farà $= \frac{P}{33\frac{1}{7}}$. E ſiccome nella formola per ſupplire alla ſerie delle reſiſtenze deve toglierſi l' unità per eſſer la ſomma $= \frac{P}{a-1}$, indi è che facendoſi $a = 33\frac{1}{7}$ farà $\frac{P}{a-1} = \frac{P}{32\frac{6}{7}}$, e per abbondare in cautela ſi farà la ſerie $= \frac{P}{32}$. Da queſto primo aſpetto argomentaſi il vantaggio rilevante delle ſperimentate reſiſtenze, giacchè invece della formola $\frac{P}{2}$ ſi adopera ora l' altra formola $\frac{P}{32}$, cioè le reſiſtenze ſi riducono alla parte ſedicеſima delle antiche, e comuni, in parità di circoſtanze.

Serve di aver premeſſo queſti nuovi Elementi delle

reſiſtenze per poter comprendere le ragioni delle variazioni da me introdotte nell'argano. Gli effetti di tali mutazioni ſaranno poi dimoſtrati nell' ultima Parte.

Incominciando adunque a deſcrivere qual ſia la miglior forma dell' argano, quali i compenſi meccanici per renderlo più perfetto, eſſo vien rappreſentato dalla fig. II, nella quale potrà oſſervarſi in primo luogo, che il telajo inferiore *M*, *M*, *M*, *M*, il qual forma la pianta, e la baſe di queſta macchina, è ſtato da me tenuto di groſſezza, e ſtabilità maggiore del conſueto. In ſecondo luogo, che ho raddoppiato le coſce dell' argano *Ee*, *Ee*, *Ee*, *Ee*, le quali non ſolamente ſoſtengono l' argano dalla parte deſtra, ma eziandio dalla ſiniſtra, ricevendo nel centro, e non già da una parte, come è conſueto, il fuſo dell' argano *AB*. Tal cambiamento ho introdotto, per avere oſſervato, che nell' argano ordinario, quando il canapo ſi trova ne' punti ſuperiori del cilindro, come nel punto *K* (*fig. I*), allora la reſiſtenza del peſo da elevarſi, e degli attriti da ſuperarſi viene a roveſciar l' argano, il quale, come ſi fa, verſo la parte oppoſta al peſo dee raccomandarſi, e fiſſarſi a certi paletti piantati in terra, affinchè reſti perfettamente immobile nell' operazione architettonica. Or tal' accidente non può mai ſuccedere nel nuovo argano della fig. II, giacchè eſſendo eſſo fiancheggiato tanto dalla parte anteriore *MM*, quanto dalla parte poſteriore *M'M'*, ne viene in conſeguenza, che eſſo non può reſtar mai ribaltato, e roveſciato da qualunque forza de' peſi da elevarſi. Vi è ancora l' altro comodo, che eſſo può rivoltarſi, come ſi vuole, mettendolo in azione o dall' una, o dall' altra parte.

La panchetta ſuperiore *CD* va formata di tutta ſtabilità, e di noce duriſſima, per tener fermi gl' incaſtri delle coſce *EE*.

Dovendo fare il fuſo dell' argano o di noce, o di quercia, o di altro legname forte, ho creduto neceſſa-

rio di diminuire la gran reſiſtenza, che fa il legname, quando contraſta con altro legname, faſciando con un liſcio cerchio di ferro la concavità della panchetta *CD*, ſulla quale deve aggirarſi il collo dell' argano in *aa*, avendo dalle mie nuove ſperienze rilevato, che il ferro liſcio combinato con legname forte, e con unto di materie graſſe, ſpecialmente di ſego, ſoffre piccoliſſima reſiſtenza. La minima di tutte ſi è quella del legname di ulivo ſalvatico, del quale potrebbe formarſi il fuſo dell' argano.

La medeſima cautela e diligenza va oſſervata nel pernio inferiore dell' argano *Uu*, il quale deve farſi poſare al di ſotto ſu di una lamiera di ferro, correggendo in queſto gli argani comuni, ne' quali vien traforata totalmente la panchetta inferiore *Oo*, facendo contraſtare ſulla ſuperficie della medeſima il labbro inferiore dell' argano *bb*. Oltre al pernio inferiore deve neceſſariamente la ſua ſuperficie laterale venire a contatto colla concavità cilindrica della panchetta; e perciò una tal concavità dee ſimilmente faſciarſi con cerchio ben limato di ferro, la cui altezza non oltrepaſſi la miſura di un pollice. Con tal coſtruzione l' orlo inferiore del fuſo contraſſegnato *bb* non può mai venire a contatto colla ſuperficie ſuperiore della panchetta *Oo*, ma il pernio *Uu* o deve poſare ſul piano inferiore della lamiera, o deve appoggiarſi ſul deſcritto cerchietto di ferro.

Allo ſteſſo modo la teſtata dell'argano per la parte ſua inferiore *mm* dee reſtar ſollevata ſopra il piano *CD* della panchetta ſuperiore; e così il collo dell' argano *aa* non dovrà riſentire altro ſoffregamento fuori di quello, che proviene dalla ſuperficie del cilindro appoggiata alla ſuperficie del cerchietto di ferro.

Per ovviare al graviſſimo inconveniente degli argani ordinarj, ne' quali, come è ſtato avvertito, il canapo deve ora ſcendere, ora ſalire ſul fuſo del medeſimo, obbligando così a ſoſpendere il lavoro per rimettere il canapo

napo ne' punti opportuni, mi è ſovvenuto il compenſo meccanico di faſciare il detto cilindro con una faſcia curvilinea di legname *Ff*, ſulla quale avvolgendoſi il detto canapo, eſſo ſcende, o ſale per una piccola altezza; ſulla quale poi non potendoſi ſoſtenere a motivo della curvità, che lo porta ſui pianetti molto inclinati, eſſo da sè medeſimo o ſale, o ſcende per rimetterſi ne' punti intermedj delle curve, e perciò ſenza mai ſoſpendere l' operazione meccanica, il canapo rimettesi da sè medeſimo ne' medeſimi punti. Qualche volta, ſecondo le circoſtanze, gioverà d' ajutare lo ſteſſo canapo con un piccolo martello di legno, affinchè diſcenda più preſto, che ſia poſſibile.

La detta faſcia concava ſi rappreſenta nella figura II in maggior proporzione col titolo *curve del fuſo*. Di tali curve ſe ne formano otto, o dieci ſecondo il biſogno, e con eſſe ſi faſcia il fuſo cilindrico inchiodandole al medeſimo con chiodi acciecati nel legname, affinchè non facciano alcuna reſiſtenza, e non conſumino il canapo.

Sulla teſtata dell' argano ſegnata *A* ſi formano i due traſori quadrati, per i quali devono paſſare le due manivelle *Pp*, *Hh*, le quali devono eſſere di lunghezza tale, che i lavoranti girando attorno all' aſſe dell' argano poſſano facilmente ſcanſare il ſuo telajo *MM*, *MM*.

E quantunque la loro lunghezza poſſa giovare per ſollevare la potenza motrice, diminuendo così la ſpeſa di più lavoranti, contuttociò non dovremo eccedere in tal lunghezza, eſſendo coſa evidente, che quanto più eſſa ſi eſtende, tanto è maggiore il tempo, che eſigge il giro maggiore de' lavoranti, i quali ſi avanzano ſempre con paſſo uniforme. Conſiderando tutte le circoſtanze di queſta macchina, e di queſto lavoro, io ho rinvenuto coll' eſperienza, che la proporzione, che corre tra la lunghezza della leva ed il ſemidiametro del fuſo, ſul quale il canapo ſi avvolge, può tenerſi fra i due

limiti della parte decima, o al più della quindicesima, cioè il semidiametro del fuso facciasi di pollici 4, la lunghezza della leva *AH* potrà farsi di pollici 40, e potrà ancora farsi giugnere a pollici 60, che fanno piedi 5 parigini. Nel primo limite la potenza motrice ridurrassi alla parte decima del peso da elevarsi, colle sue resistenze, e nel secondo, e più alto limite detta potenza motrice sarà di una parte quindicesima.

Vero è, che nell' atto del lavoro non può osservarsi una precisa proporzione, giacchè i lavoranti, quando son raddoppiati, operano con leve maggiori, o minori, secondo i diversi punti delle manivelle, a' quali essi vanno applicando le loro mani, e non possono tutte riunirsi in un punto solo. Indi è, che per mettersi al sicuro dell' impresa, dovrà sempre l' architetto formare il suo calcolo sul vette minore, per non trovarsi deluso nell' atto dell' operazione.

Lascerò di descrivere minutamente alcune altre minori avvertenze, le quali saranno ben note agli architetti, e solamente risolverò il dubbio, che potrebbe nascere sulla fascia concava già descritta *Ff*.

Domandasi adunque in qual punto del cilindro debba essa collocarsi, cioè, se torni bene di collocarla nel punto intermedio fra la panchetta inferiore e superiore, ovvero in altro punto inferiore verso *B*. Il punto intermedio gioverebbe per distribuire ugualmente le due resistenze, la prima delle quali consiste nel pernio inferiore dell' argano, e la seconda nel collo superiore *aa*. Poichè è notissimo per la Meccanica, che le due pressioni restano in ragion reciproca delle distanze de' due punti del contatto dal punto della potenza. Così, se il canapo, ovvero la fascia *Ff* si facesse salire sull' estremità superiore del cilindro addosso alla panchetta *CD*, allora la massima resistenza la soffrirebbe il collo dell' argano *aa*, mentre la minima si porterebbe al pernio inferiore *bb*. E per converso, se si facesse scendere la fa-

ſcia concava verſo il punto *B*, allora la maſſima reſiſtenza tornerebbe ſulla punta inferiore dell'argano, e la minima ſul collo ſuperiore.

In ordine al valore delle due reſiſtenze poco, o punto vi corre, ſe la faſcia ſi collocaſſe nel mezzo, ovvero ſe ſi portaſſe ne' due eſtremi punti, o ſuperiore, o inferiore. La giuſta ſoluzione di tal problema dipende dalla ſerie delle reſiſtenze reſpettive, delle quali ora non occorre ragionare: e perciò per riſolvere il preſente dubbio ſoggiugnerò ſolamente, che in pratica torna aſſai comodo, che detta faſcia ſia collocata piuttoſto verſo la parte inferiore *B*, e ciò a motivo, che i lavoranti nelle loro rivoluzioni attorno all' aſſe dell' argano poſſano più facilmente cavalcare il canapo *FQ* ſenza il minimo perdimento di tempo. Si ſa, che il canapo da una parte va verſo il primo calceſe, o puleggia π (*fig. I*). Onde queſta parte di canapo *DD* deve ſaltarſi da' lavoranti, che vanno attorno dell' argano. L' altra eſtremità oppoſta alla prima è ſoſtenuta da una potenza *LI*, la quale tiene a ſtretta detto canapo, affinchè non giri liberamente ſul ſubbio, e perciò i lavoranti ſono obbligati a cavalcare ancora ſulla ſeconda eſtremità del canapo. Quando adunque queſto canapo ſi collocaſſe ad un' altezza notabile, i ſucceſſi, e continui ſalti de' lavoranti, tanto da una parte, che dall' altra verrebbero a ritardare il lavoro. Ma non così ſuccede, quando il canapo quaſi rade il terreno.

Ora riflettaſi, che nell' argano ordinario, ſalendo il canapo dal punto inferiore al ſuperiore, dovrà ſempre ſuccedere l' inconveniente del ritardamento, o almeno nelle maggiori altezze del canapo, e tale inconveniente pure ſi toglie nel nuovo argano, tenendo più baſſa la faſcia curvilinea.

Non laſcerò ancora di avvertire, che alcur volte il fuſo dell'argano rieſce di tal diametro, che in eſſo può eſcavarſi quella faſcia curvilinea, ſenza i riſalti de' re-

goli incurvati, i quali portano nella costruzione un lavoro più lungo.

Mi si domanderà finalmente di qual qualità, e natura esser possano quelle curve, dal cui rivolgimento vien generata la sopraddetta fascia. Risponderò, che senza entrare in un esame lungo, ed inutile potremo formare dette curve di archi circolari alquanto minori di un mezzo cerchio, come sarebbe di gradi 140, o poco più, giacchè in tal graduazione s' incontrano sempre tali inclinazioni, che bastano per far salire, o discendere i canapi, che è l'unico oggetto di somigliante costruzione. Nel caso presente la ruvidezza della superficie maggiore, o minore fa sì, che il canapo salga ora ad altezza maggiore, ed ora minore; sempre però le ordinarie resistenze son tali che quando il canapo dal vertice della curva è salito per gradi 50, ovvero 60, ricade da sè medesimo, ritornando allo stesso punto del vertice, e perciò esso non sale giammai verso i gradi 70.

Premessa adunque la nuova costruzione dell' argano, restano evidenti i suoi vantaggi sopra l' argano comune, cioè

Primieramente, che le sue resistenze riduconsi alla parte sedicesima, e ancor meno, delle resistenze comuni.

Secondariamente, che non mai s' interrompe il lavoro per abbassare i canapi, ammagliando le taglie, come succede nel metodo ordinario.

In terzo luogo, che essendo il fuso dell' argano sostenuto a destra, e sinistra, si fugge il pericolo che sia rovesciato.

In quarto luogo, che restando il canapo assai basso presso il terreno, vien rimosso l' inconveniente de' salti de' lavoranti per cavalcarlo.

In quinto luogo, che essendo sostenuto il pernio dell' argano sul fondo della panchetta con lastra di ferro si sfuggono così i gran contatti, che soffre l' argano co-

mune, arrotandoſi, e ſtrisciando ſulla ſuperficie della panchetta inferiore.

L' altro inconveniente, che è tutto proprio dell' architettura navale per le groſſe gomene, che in eſſa ſi adoperano nella maggior parte delle operazioni nautiche, e ſpecialmente nel ſalpar le ancore, non pare che poſſa totalmente ſuggirſi, o rimediarſi, giacchè non eſſendo poſſibile, che la gomena per la ſua groſſezza, e ruvidezza ſi avvolga al fuſo dell' argano doppio, riuſcirà ſempre indiſpenſabile, che alla detta gomena ora ſi attacchi, ed ora ſi ſciolga quel canapo ſecondario, chiamato nella marina franceſe *Tournevire*, che nel noſtro volgare direbbeſi *gira e tira*. Indi è, che per tale inconveniente altro compenſo non potrebbe rinvenirſi, ſe non quello di facilitare, ed abbreviare l' operazione, che ſi fa di legare, e poi ſciogliere dalla gomena il canapo ſecondario. Ripenſando adunque a tal meccaniſmo, mi parrebbe, che poteſſe molto diminuirſi il tempo per via di due mezzi cilindri imperniati con opportune cerniere, e ſcavati al di dentro ſecondo le ſpire della gomena, i quali mezzi cilindri poteſſero facilmente aprirſi, o ſerrarſi per mezzo di due viti di ferro. Se adunque ſi fiſſaſſe il canapo ſecondario a' detti due mezzi cilindri, eſſi potrebbono traſportarſi da' punti ſuperiori a' punti inferiori della gomena con aprire ſolamente, o con ſerrare due viti di ferro. Il che certamente ſi ottiene in pochi ſecondi di tempo. Ma non così ſuccede nel metodo preſente, nel quale il canapo ſecondario deve prima legarſi alla gomena con funicelle dette comunemente *garzette*; e quando queſte colla gran forza ſi ſono fortemente annodate, convien poi diſcioglierle per rimetterle ne' punti inferiori della gomena, e continuare così l' operazione di ſalpar l' ancora.

Affinchè il mio meccaniſmo più chiaramente s' intenda, ſia nella fig. III la gomena *AA*, intendendo, che

l'estremità *A* corrisponda al bastimento, che salpa l'ancora, mentre l'altra estremità *A'* corrisponde all'ancora, che si giace sul fondo del mare. Secondo il presente metodo il canapo secondario legasi alla gomena coll' uso delle garzette, per esempio, nel punto *m m'*, e ciò per fissare al detto punto il canapo secondario *m n*, *m' n'*, il quale colle due estremità *nn'* portasi all'argano doppio del bastimento. Or quando coll' operazione del medesimo i punti *mm'* son già arrivati al bordo della nave, allora conviene sciogliere la legatura, e poi riportarla di bel nuovo verso la parte dell' ancora per far la seconda legatura, e la seconda operazione. Pertanto facciansi due mezzi cilindri di forte legname *Cc*, *Bb*, nel mezzo de' quali, lasciandovi una sufficiente grossezza di legno, si escavino le spire concave *Pp*, *Pp* ecc. in modo tale, che la parte convessa della gomena possa combagiare colle spirali concave de' cilindri. Si adattino a' medesimi in quattro staffe di ferro non solamente le due cerniere *Hh*, ma eziandio i quattro braccioli *Dd*, *Ee*, in forma tale, che ne' due primi resti escavata la madrevite, e ne' due secondi i maschj della medesima *Gg*, i quali abbiano la loro gruccia, o manico per serrargli con forza addosso a' due braccioli *Dd*. Se ora si concepisca, che tal macchinetta si adatti alla gomena, fasciandola per mezzo delle cerniere *Hh*, e poi serrandola addosso colle due viti *Gg*, essa resterà fortemente fissata addosso alla gomena senza poter trascorrere a motivo delle spire, che restano serrate l'una coll' altra, cioè le parti concave colle respettive convesse. Attaccando pertanto a tal macchinetta il canapo *tournevire*, insiem con esso potrebbe facilmente trasportarsi, e fermarsi nella gomena con un semplice giro della vite, che può allentarsi, e riserrarsi in poche battute di polso. Perciò detta macchinetta potrebbe acconciamente chiamarsi il *conduttor nautico*, non già conduttore di materie elettriche, o fulminee, come la moder-

na Fiſica va ſpeculando, ma bensì conduttor materiale della gomena, che con eſſo è traſportata dal fondo del mare nella nave. Queſto è uno de' compenſi per abbreviare notabilmente il tempo ben lungo, che nel metodo ordinario rendeſi neceſſario per ſalpare un' ancora. Forſe da tal meccaniſmo altri ne naſceranno più brevi, e più ſemplici; ma il preſente conduttore non mi pare nè molto lungo, nè molto compoſto. Sono ſempre neceſſarj de' tentativi, affinchè da eſſi riſulti il miglior meccaniſmo adattato al biſogno.

PARTE IV.

Che l' argano nuovamente ridotto tolga gl' inconvenienti dell' antico, e che in eſſo le reſiſtenze rieſcano tenuiſſime.

Da quanto è ſtato eſpoſto nella terza parte apparirà, che co' compenſi preſi vengano a toglierſi, o almeno diminuirſi notabilmente gl' inconvenienti, che incontra l'argano comune. L' eſpoſizione medeſima de' vantaggi dell' argano ridotto baſta per convincer tutti di tal verità. Onde per non dilungarmi di vantaggio ſolamente dimoſtrerò col calcolo quanto ſiano tenui le reſiſtenze, che reſterebbono nell' argano ridotto. E' ſtato accennato, che le reſiſtenze antiche a quelle del nuovo argano ſiano nella ragione del 16: 1, cioè, che queſte ſiano ſedici volte minori. Il che naſce dalla formola $\frac{P}{a-1}$, la quale nell' argano comune è di $\frac{1}{2}$, e nell' argano ridotto è di $\frac{1}{15}$. Ma non così ſuccede in tutte le operazioni dell' argano, eſſendo diverſa tal proporzione, quando ſi aggiungono le taglie, o pulegge, che ſempre, o quaſi ſempre ſi adoperano. La teoria è la medeſima, che dianzi è ſtata maneggiata nella parte *II*, e ſolamente varia il valore della reſiſtenza. Onde ſarà

Calcolo delle reſiſtenze dell' argano ridotto ſecondo le nuove ſperienze includendovi le due pulegge.

Sia, come dianzi, il peſo *PP'* di libbre 4000. E' manifeſto per le ragioni addotte, che il pernio della puleggia *P* reſterà aggravato da una doppia preſſione, equivalente a libbre 8000. Per le nuove ſperienze eſſe dovranno dividerſi per 32, e perciò la reſiſtenza degli attriti del pernio di detta prima puleggia farà di libbre 250.

Ora riducendo queſta reſiſtenza alla circonferenza della puleggia, facciali, come il 6:1 = 250 al quarto termine, che farà di libbre . . . . . 41.33 centeſime.

Paſſando pertanto l' energia del peſo unita a quella della reſiſtenza alla ſeconda puleggia π eſſa farà di libbre . . . . . 4041.33 centeſime, e tal forza dee raddoppiarſi per avere la vera preſſione della ſeconda puleggia, la quale farà di libbre 8082.66 centeſime. Ancor queſta preſſione, per dedurre la reſiſtenza, dee dividerſi per il ſolito diviſore 32, e così reſteranno libbre 252.60.

Ma perchè nella ſeconda puleggia π il canapo paſſa ſoltanto per un arco di quadrante, e non già per la mezza circonferenza, come già è ſtato avvertito; perciò il detto valore dovrà diminuirſi per le dimoſtrazioni del mio Trattato ſulle reſiſtenze nella ragione del 1000:707 proſſimamente, e con tal diminuzione reſteranno libbre . . . . . 178. 58 centeſime.

Queſte debbono di bel nuovo diminuirſi nella ragione del 6:1 per riportare la reſiſtenza dal pernio alla circonferenza della puleggia, e perciò reſterà finalmente la reſiſtenza di libbre . . . . . 29.76 centeſime.

Ora aggiungendo tal reſiſtenza al valore di libbre . . . . . 4041. 33.

avremo la forza del canapo *DD* di libb. 4071. 09 cent.

Queſta

Questa è la totale resistenza, che l'argano, o la potenza al medesimo applicata deve superare.

Essa nel caso presente non va raddoppiata, come nelle pulegge, giacchè intendesi il canapo come fisso nello stesso cilindro. Ma dee soltanto dividersi per il consueto divisore 32, e ne risulteranno libbre 127.18 centesime.

Una tal resistenza considerata finora al pernio, o collo dell'argano, deve riportarsi alla potenza motrice per il momento della leva, di cui essa è fornita, e perciò ritenendo la proporzione dell'ultimo esempio, nel quale il braccio della leva si è fatto al semidiametro del pernio, come il $12\frac{1}{2}:1$, essa ci tornerà di lib. 10.17 cent.

Ma essendo stata calcolata la resistenza da superarsi dell'argano colla sua potenza di libbre . . . 4071.09 cent.
dividendo tal numero per il 10. secondo la proporzione adoprata tra la lunghezza della leva ed il semidiametro del fuso, ci torneranno libbre . . . . . 407.10 cent.
Alle quali aggiungendo le dette libbre 10.18
otterremo tutto il valore della potenza motrice per elevare il peso, e superare le tre resistenze di libbre . . . . . 417.28 cent.

Dal che ne viene in conseguenza, che nell'argano ridotto secondo le mie sperienze la potenza motrice non è aggravata, se non che di libbre 17. 28 centesime di più di quello, che sarebbe, distruggendo affatto tutte le resistenze.

Volendo ora paragonare le resistenze del vecchio argano a quelle dell'argano ridotto, basterà ripigliare il numero della seconda parte, che è di libbre 730. 92 centesime, delle quali le libbre 400 appartengono alla potenza nell'ipotesi, che manchino le resistenze, e le altre libbre 330. 92 centesime ci esprimono le pure resistenze. Indi è che nella presente combinazione dell'argano con due semplici pulegge, la prima resistenza dell'

argano antico ſta alla ſeconda dell' argano ridotto, come il numero 330. 92 centeſime al numero 17. 28, cioè come il numero 191 al 10, vale a dire, che le nuove reſiſtenze dell' argano ridotto ſiano circa una parte decima nona delle antiche reſiſtenze riſpetto alla combinazione conſiderata nel preſente calcolo.

Calcolo della potenza motrice eſcludendo l' uſo delle due pulegge.

Volendo conſiderare le reſiſtenze dell' argano ridotto ſenza l' operazione delle due pulegge, allora il peſo di libbre 400 deve immediatamente dividerſi per $a-1$, che nel preſente caſo è di parti 32. Onde avremo per la detta diviſione libbre 125.00

che diviſe per $12\frac{1}{2}$ ci ſomminiſtrano lib. 10.00
alle quali aggiungendo le ſolite libbre . . 400.00

verremo in chiaro del valore della potenza, che ſarà di libbre 410.00

cioè libbre 10 di più, che non accaderebbe diſtruggendo qualunque ſorte di attrito.

Nella medeſima ipoteſi la reſiſtenza degli argani ordinarj è ſtata calcolata nella ſeconda parte di libbre 160; e perciò la reſiſtenza dell' argano ſarebbe nel preſente caſo una parte ſedicеſima dell' argano comune, come eſſere deve a motivo del diviſore $a-1$, che come è ſtato detto è 16 volte maggiore nell' argano comune riſpetto all' argano ridotto.

Per maggior facilità aggiungerò il ſeguente riſtretto, affinchè in un' occhiata ſi veggano le differenze delle diverſe ipoteſi, e de' due argani inſieme paragonati.

Riſtretto delle diverſe potenze motrici di un argano, col quale debba elevarſi un peſo di libbre 4000. *in diverſe ipoteſi.*

Prima ipoteſi, che non vi ſia alcuna reſiſten-

za, e che il braccio della leva ſia al ſemidiametro del fuſo dell' argano nella ragione del 10: 1; potenza motrice libbre 400.00

Seconda ipoteſi dell' argano comune con due pulegge, ſecondo le diverſe proporzioni del calcolo colle antiche reſiſtenze 730.31

Terza ipoteſi delle nuove reſiſtenze con due pulegge, e ſecondo le ſteſſe proporzioni; potenza motrice 417.28

Quarta ipoteſi coll' argano ſenza pulegge, ſecondo le antiche reſiſtenze 560.00

Quinta ipoteſi dell' argano ſenza pulegge, ſecondo le nuove reſiſtenze; potenza motrice . . 410.00

Formola analitica per lo ſteſſo calcolo.

Reſta ora, che con qualche formola analitica ſi poſſa abbreviare la teſſitura del calcolo, giacchè eſſa rappreſentando tutte le ipoteſi ci ſomminiſtra una maggior facilità, perchè allora altro non occorrerà, ſe non che applicare le altre ipoteſi, che ſi voleſſero, ſoſtituendo i nuovi numeri alle eſpreſſioni delle lettere.

Calcolo analitico delle reſiſtenze.

Il peſo, che deve elevarſi dicaſi $= P$, la frazione ſarà $= \frac{P}{a}$, che rappreſenta la reſiſtenza aſſoluta. Onde la ſerie delle reſiſtenze ne' caſi, in cui conviene, ſarà $= \frac{P}{a-1}$

La prima puleggia avrà la reſiſtenza $= \frac{2P}{a-1}$. Convien raddoppiare il valore di P, perchè il pernio è aggravato dal canapo dall'una parte, e dall' altra. Sia il diametro della puleggia a quello del pernio come $D : d$.

Onde la reſiſtenza riportata alla prima puleggia ſarà $= \frac{2\,d\,P}{D(a-1)}$

Paſſando alla ſeconda puleggia, eſſa ſarà aggravata da $2P + \frac{4\,d\,P}{D(a-1)}$. Giacchè ancor eſſa riſente il carico dall' una parte, e dall' altra. Per avere la ſua reſiſtenza convien prima moltiplicarla per la ſteſſa frazione $\frac{1}{a-1}$, e ſarà $\frac{2\,P}{a-1} + \frac{4\,P\,d}{D(a-1)^2}$

Ma perchè nel caſo della ſeconda puleggia il canapo reſta ſolamente a contatto col ſemplice quadrante della rotella, convien di bel nuovo diminuirla nella proporzione del diametro al quadrante. Dicaſi tal proporzione come $\Delta : \delta$. Onde ſarà $= \frac{2\,P\,d\,\delta}{\Delta D(a-1)} + \frac{4\,P\,d^2\,\delta}{\Delta D^2(a-1)^2}$

Paſſando dunque il canapo dalle due pulegge all'argano, ſarà aggravato del peſo P, più la reſiſtenza delle due pulegge la quale ſi trasfonde inſieme col detto peſo. Onde l'argano ſarà aggravato dal valore

$$P + \frac{2\,P\,d\,\delta}{\Delta D(a-1)} + \frac{4\,P\,d^2\,\delta}{\Delta D^2(a-1)^2} + \frac{2\,d\,P}{D(a-1)}.$$

Per maggior brevità l'eſpreſſa formola facciaſi $= F$

E ſia la ragion del vette al ſemidiametro del ſubbio come $b : 1$

Sia pure la ragione dello ſteſſo vette al ſemidiametro del pernio dell'argano, e del ſuo collo, come $g : 1$

Onde volendo dedurre la potenza motrice, che dicaſi uguale a y, avremo la ſeguente equazione

$$\frac{F}{b} + \frac{F}{g(a-1)} = Y.$$

Per applicare la preſente formola a' caſi particolari,

fuppongaſi prima ſecondo le mie ſperienze $a-1=32$, e ſi laſcino le altre proporzioni, come ne' paſſati calcoli. Riducendo adunque in numeri la formola, farà

$$F=4000+\frac{8000}{6\times32}+\frac{8000\times707}{1000\times6\times32}+\frac{16000\times707}{1000\times36\times1024}.$$

Fatte le opportune diviſioni farà

Il primo termine . . . = 4000
Secondo termine . . . = 41.66
Terzo termine . . . . = 29.32
Quarto termine . . . . = 0.11

Somma farà di libbre 4071.09 centeſime $=F$

Onde farà $\frac{F}{b}=\frac{4071.09}{10}=407.109$ milleſime

Avremo $\frac{F}{g(a-1)}=\frac{4071.09}{400}$,

che farà uguale a libbre . . . . . 10.177. milleſime

Onde finalmente avremo $Y=417.286$. Un tal valore rieſce maggiore del calcolo antecedente, che era libbre . . 417.28. centeſime

La piccola differenza di ſei parti milleſime naſce dalla maggior preciſione della formola, la quale racchiude più frazioni, che non è ſtato fatto nel primo calcolo.

Applicazione della ſteſſa formola nell' ipoteſi delle antiche reſiſtenze.

Con ugual facilità potrà applicarſi la medeſima formola alle antiche reſiſtenze, purchè ſolo ſi cambj il valore di $a-1$, che in queſto caſo ſarà $=2$. E perciò avremo

$$F=4000+\frac{8000}{6\times2}+\frac{8000\times707}{1000\times6\times2}+\frac{16000\times707}{1000\times36\times4}.$$

Onde ſarà $F=$ a' ſeguenti termini, cioè

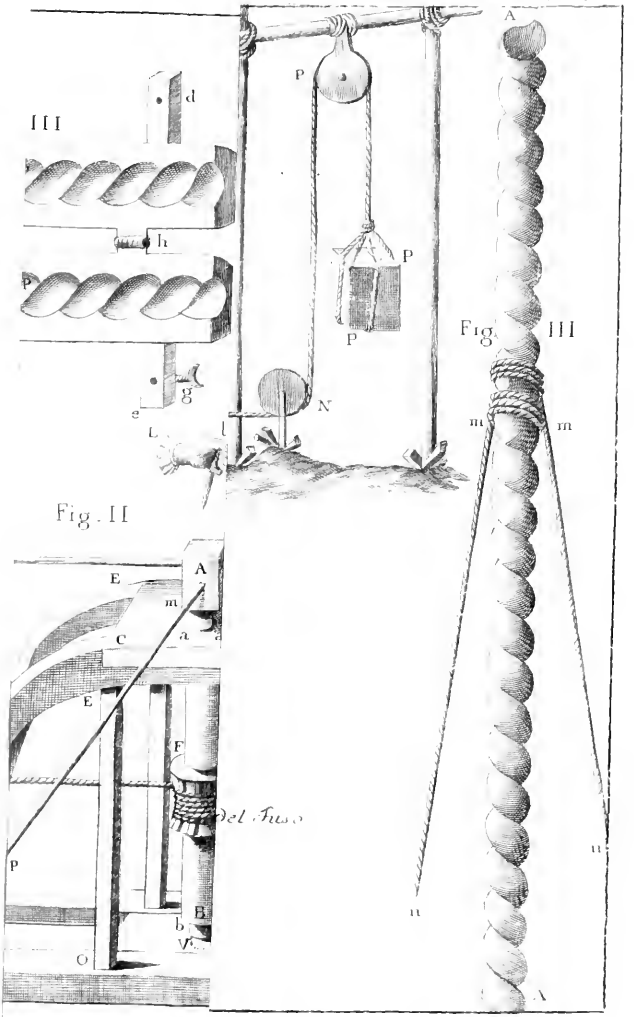
Termine I. = ... 4000
Termine II. = ... 666.66
Termine III. = ... 471.33
Termine IV. = ... 78.55
Valore di F = ... 5216.54 centeſime
Perciò ſarà $\frac{F}{b}$ = ... 521.654 milleſime

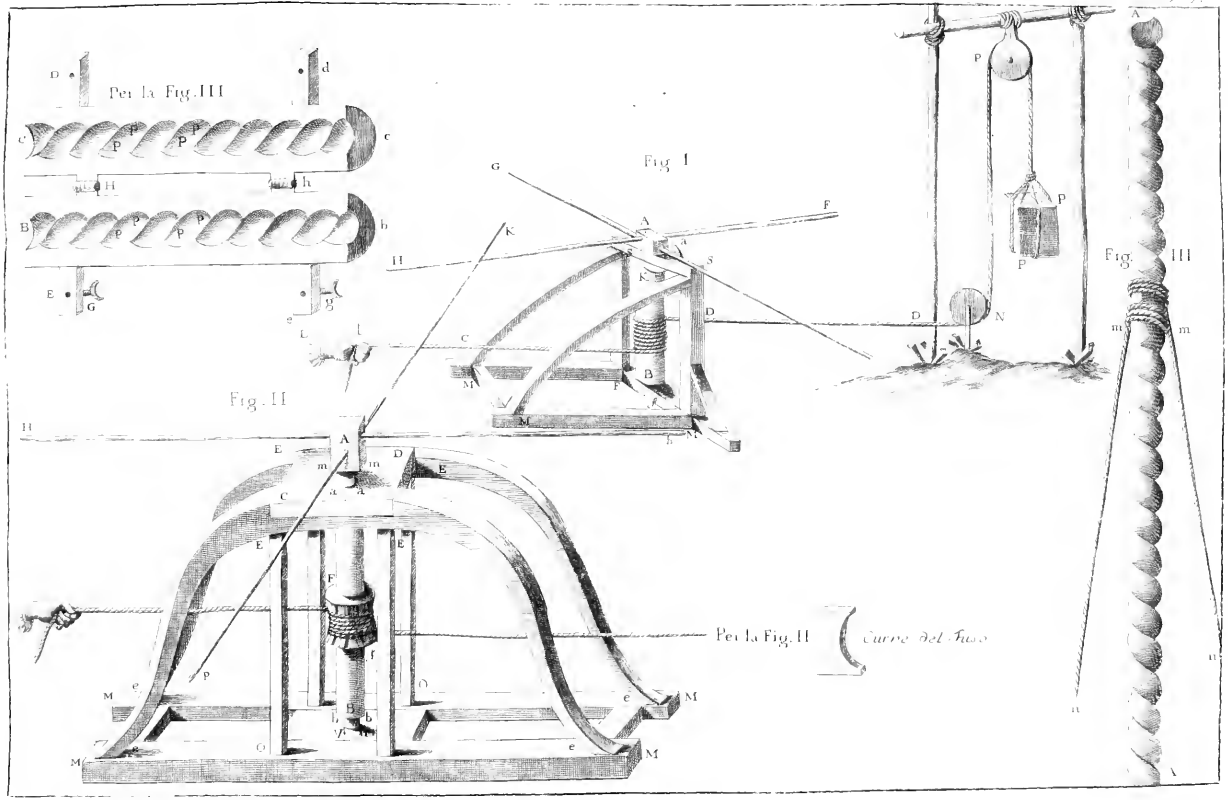
Sarà $\frac{F}{g(a-1)} = \frac{5216.54}{12.5 \times 2}$ = ... 208.660
Unendo l'antecedente termine . . . 521.654
Sarà Y = ... 730.314 milleſime

Confrontando il preſente reſultato con quello dell' antecedente calcolo alla Parte ſeconda, che è di libbre 730.24 . . . . . 730.24, ſi troverà la piccola differenza di 7 parti centeſime, la qual naſce come dianzi, per eſſere ſtate traſcurate in detto primo calcolo alcune frazioni.

Per la qual coſa eſſendo ſtati dimoſtrati i vantaggi del nuovo argano, e particolarmente quello di aver ridotte le reſiſtenze degli attriti ad una quantità preſſochè inſenſibile, come quella che non giugne a libbre 18 in paragone delle libbre 330. proſſimamente delle antiche reſiſtenze, ora altro non reſta all'intelligente Architetto, ſe non che di fare eſeguire la coſtruzione di detto argano ſecondo i nuovi principj, adoperando per diminuire le reſiſtenze quelle combinazioni di materie, che ſono ſtate da me eſaminate, e propoſte.

E quando egli abbia così coſtituiti i ſuoi argani, le ſue pulegge, le ſue taglie, ed altri ordigni di queſto genere, allora il diſpendio delle ſue fabbriche in ordine alle operazioni, e numero de' manuali ſcemerà nella ſteſſa ragione, in cui diminuiſcono le reſiſtenze, computandovi i peſi aggravati, cioè la ſpeſa co' ſoliti argani al-


III
d
h
P
P
P
P
g
e
L
N
Fig. III
A
m
m
n
n
A
Fig. II
E
A
m
C
a
E
F
P
B
b
O
del Fus


Per la Fig. III
Fig. I
Fig. III
Fig. II
Per la Fig. II
Curva del Fuso

la ſpeſa cogli argani ridotti ſarà come il numero 730 al 417 proſſimamente. E ſe ſi voleſſe aggiungere, che il contraſto di due legni rozzi, come ſono negli argani comuni, cagioni un attrito aſſai maggiore del terzo, ſi conchiuderà, che il diſpendio delle comuni reſiſtenze giunga quaſi al doppio di quello delle reſiſtenze trovate colle mie ſperienze.

Vero è, che non eſſendo ſtate ancora da me pubblicate le nuove ſperienze, le quali diminuiſcono le reſiſtenze degli attriti alle tre parti centeſime de' peſi aggravati, vi ſaranno delle perſone, che difficilmente ſi capaciteranno di così inſigne vantaggio in favore della Meccanica. Ma io ſpero che le mie lunghe, e reiterate ſperienze, le quali ſaranno ampiamente deſcritte nel mio Opuſcolo, rimuoveranno ogni qualunque dubbio ſu queſto importante ritrovato.

Io ſo, che tutti i Meccanici, che finora hanno ſcritto, altro non hanno fatto, che muovere de' dubbj ſulle diverſe teſſiture de' noſtri ſolidi, e ſulle diverſiſſime reſiſtenze, che indi debbono produrſi. Ma ſe con queſta incertezza di ſuperficie, e di ſcabroſità ſi ritrovano de' ſolidi, i quali combinati inſieme con alcune cautele, e diligenze ſomminiſtrano coſtantemente, ed in tutte le circoſtanze una tenuiſſima, e quaſi inſenſibile reſiſtenza, con queſto ſolo la Meccanica farà quell' acquiſto, che ſi deſidera, cioè che le reſiſtenze degli attriti rendanſi almeno ſedici volte minori, che non ſono a tenore delle ſperienze del Sig. *Amontons*, e di altri inſigni Scrittori.

In queſta Memoria io ho applicata la dottrina delle nuove reſiſtenze all'argano, ed alle pulegge, che lo accompagnano; ma farà facile di applicarla a tutte le altre macchine o ſemplici, o compoſte, che ſi mettono in opera nell' Architettura Civile, Militare, e Navale.

LETTERA

Del Sig. Felice Fontana Direttore del Real Muſeo di Fiſica, e di Storia Naturale di Firenze

Al Sig. Adolfo Murray Profeſſore d' Anatomia a Upſal

Scritta il dì 20. di Ottobre 1781.

IN queſti giorni mi è capitato tra mano il ſecondo Tomo degli Opuſcoli Chimici del Cavalier *Bergman*. Gli ho letti con quel traſporto, con il quale aveva letti gli altri Opuſcoli del medeſimo Autore, che ſono nel primo Tomo; e mi ſon comparſi anche queſti degni della grande riputazione, che ſi è meritamente acquiſtata quel valentiſſimo Chimico. Quaſi tutto è originale quello, che ſorte dalla penna di quel grand' uomo; e vanno del pari la ſcelta delle eſperienze, la ſagacità nel farle, e l'eſattezza nelle conſeguenze. Credo che ſi poſſa dir di lui, per rapporto delle coſe chimiche, quel che diceva *Cicerone* della latinità di *Ceſare*. *Ineptis gratum fortaſſe fecit ... Sanos quidem homines a ſcribendo deterruit*, tanto pareva inimitabile nel tempo che era originale ed eccellente.

Ma fra le molte belliſſime verità, che c' inſegna quell' uomo illuſtre, trovo tre punti che principalmente anderebbero eſaminati nel più gran dettaglio. L'uno riſguarda la teoria del calore, e della formazione dell' aria deflogiſticata, con cui ſpiega egli le revivificazioni delle calci metalliche; la ſeconda la deflogiſticazione del ſangue ſopra le arie reſpirabili; la terza l' aria fiſſa dell' atmoſfera, o dell' aria comune. Sono più anni, che travaglio ſopra le medeſime materie; ma il tempo, e

le

le mie occupazioni mi hanno fin qui impedito di pubblicare le mie esperienze, che sono numerosissime, nè per ora sono ancora in istato di farlo, almeno così subito.

Permettetemi però di staccare dalla mia opera quello, che ho osservato sopra i tre articoli accennati colla lusinga, che volendo voi comunicare le mie esperienze all' illustre Chimico Svezzese, e vostro amico, come io rilevo da questo stesso volume, dove parla del vostro merito, e sapere, il facciate pure liberamente; e vi assicuro, che non ho altro in vista, che di essere illuminato, se sono nell' errore, e di vedere stabilite le nuove teorie sopra ragioni solide, ed inconcusse. Questo è quello, che io devo aspettare da un Filosofo ingenuo, ed illuminato, come il Cavalier *Bergman*. Che se le mie esperienze possono aver qualche forza sul suo animo, nessuno è più in istato di lui per darci una teoria più vera, e de' principj più certi non senza vantaggio della Chimica, e della Fisica, che deve essere il solo scopo di chi ama la verità.

Le nuove opinioni del valente Chimico Svezzese sono in origine le medesime del famoso *Scheel*, che si può chiamar lo scopritor degli acidi moderni, ma sono più sistematizzate nel primo, più estese e corredate da nuove ragioni ed esperienze. Elleno meritano un esame particolare, si tratta dell' uso più importante del polmone, si tratta dell' aria principio sì necessario alla vita, si tratta in fine delle funzioni più grandi dell' economia animale.

L' altra parte ha per oggetto le operazioni più delicate della Chimica moderna, cioè la natura, e la formazione delle arie non assorbibili dell' acqua, e la revivificazione delle calci metalliche, che tiene a tutta la Chimica.

Il nuovo sistema rovescia tutte le idee fin qui ricevute, ed è sottilmente legato insieme coi fatti, e coll'

esperienze le più seducenti, talchè non mi maraviglio punto, che sia stato immaginato e sostenuto nelle loro opere da quei valenti Chimici, e che faccia de' proseliti anche appresso gli esteri.

Il Sig. *Bergman* prova con diverse esperienze e ragioni, che la flogisticazione dell'aria comune non ha luogo nel polmone, ma che anzi il polmone assorbe, e spoglia del suo flogisto le arie, che s' introducono in quel viscere col mezzo della respirazione; l'aria poi che rimane dopo quella funzione è aria spogliata del flogisto secondo lui, al contrario di tutti gli altri Filosofi moderni, che la credon ricca di quel principio.

Egli prova questa sua teoria colle seguenti ragioni, che meritano un esame tutto particolare. Ha trovato per esperienza che l'aria respirata dagli animali in vasi chiusi non è punto diminuita. La mancanza poi di $\frac{1}{500}$ d' aria, in cui lasciò morire un sorcio, conviene attribuirsi (dice egli) al calore dell' animale, che deve averla fatta sortire dal vaso dove era situato sul mercurio quando vi fu introdotto. E già noto che il flogisto diminuisce le arie respirabili; onde è falso, conchiude egli, che dal polmone esca il flogisto per unirsi all' aria comune.

Il Sig. *Bergman*, dopo di aver così sostenuto che nella respirazione non si produce dal polmone flogisto alcuno, cerca di provar per l'opposto, che l'aria, in cui si è lasciato spegnere un lume, non è sensibilmente alterata nella sua bontà, benchè si trovi molto diminuita dal flogisto escito del lume, che mescolato coll'aria, e fatto calore forte attraverso i pori del vetro, talchè l' aria pura forte allora dal vaso unita al flogisto sotto forma di calore, e da questo e non da altro si trova l' aria del vaso diminuita. In quest' aria un animale ci vive quasi così bene che nell' aria comune di prima.

Ma una prova ancora più forte, perchè più diretta,

egli la deduce da una ſua eſperienza particolare, e bella, che merita tutta la conſiderazione del Filoſofo. Quel valente uomo ſcoſſe del ſangue dentro di un vaſo ſul mercurio, in cui vi era aria comune, e trovò che l'aria non fu punto diminuita, benchè una candela non poteſſe più ardere in quell' aria. Non eſce adunque, dice egli, il flogiſto dal ſangue, ma piuttoſto il ſangue ne aſſorbe, e per queſto l'aria ſi trova peggiorata, cioè privata di flogiſto.

Finalmente egli portava una eſperienza di *Scheel* ſull'aria infiammabile, che egli ha voluto ripetere, ed è che l'aria infiammabile ſi reſpira impunemente dall' uomo per 20, e più volte dentro una veſcica, e dopo ſi trova incapace di più infiammarſi, o di laſciarvi arder un lume. Il che dimoſtra, dicono que' due valenti Chimici, che il polmone l'ha ſpogliata del ſuo natural flogiſto, tanto è contrario che quel viſcere ne abbia dato a quell' aria.

Al primo argomento io poſſo opporre 37 eſperienze, o riſultati fatti ſu i ſorci, 452 ſu i piccoli uccelli, e 179 ſu i minimi porchetti d' India, e minimi cunigli. Il riſultato delle eſperienze fatte ſopra de' ſorci è che tutti hanno diminuito l'aria comune ſul mercurio dentro vaſi, dove ſono morti, e che l'aria era diminuita da $\frac{1}{30}$ fino ad $\frac{1}{23}$ del totale. L'aria comune di cui mi ſervivo era dodici pollici. Sette uccelli hanno un poco accreſciuta l'aria, due altri non l'hanno nè creſciuta, nè diminuita ſenſibilmente; tutti gli altri poi l'hanno diminuita da $\frac{1}{30}$ fino ad $\frac{1}{21}$ in circa. Cinque porchi d'India hanno un poco aumentata l'aria, e così ancora han fatto tre cunigli, tutti gli altri l'han diminuita da $\frac{1}{27}$ fino ad $\frac{1}{9}$ incirca. In generale poi ho oſſer-

vato, che le arie ſono tanto più diminuite, quanto più lungamente ſono ſtate reſpirate dagli animali. Nell' aria deflogiſticata le diminuzioni ſono moltiſſimo maggiori, e poſſono arrivare fino ad un quarto dell' aria primitiva, e più ancora. Non parlo dell' aria fiſſa, che ſi è formata in quelle eſperienze, ch' è molto più delle quantità diminuite, e ſpecialmente nell' aria deflogiſticata.

Nè deve parere ſtrano ſe qualche volta ſi trova in qualche caſo particolare l' aria piuttoſto accreſciuta, che diminuita, perchè quando l' animale viene chiuſo ne' vaſi ha dell' aria ne' ſuoi polmoni, e può eſſer coperto dai vaſi nel momento dell' inſpirazione, onde averne anche di più. Queſta aria polmonare può nelle diverſe circoſtanze dell' animale ſortir più e men dal polmone dopo morto l' animale, e meſcolarſi nell' aria del vaſo, e ſupplire alla diminuzione dell' aria ſeguita dal flogiſto polmonare, e fino parer d' eſſer creſciuta. Va conſiderata ancora l' aria che ſi attacca ai peli degli animali, ed alle piume degli uccelli, che non ſempre rieſce di ſtaccar tutta perfettamente, nè anco allora, che s' introducono ne' vaſi facendoli paſſare attraverſo il mercurio, che è il metodo da me oſſervato; e queſta mancanza d' attenzione può aver beniſſimo indotto in errore i Filoſofi Svezzeſi che non hanno fatto uſo di queſto metodo, almeno per quel che pare da' loro ſcritti. Per altro ſe ſi fanno le eſperienze ſull' acqua, e non ſul mercurio, le diminuzioni appariſcono anche maggiori a motivo dell' aria fiſſa, che viene aſſorbita allora dall' acqua. Non par dunque che ſi poſſa dubitare, dopo le numeroſe eſperienze da me fatte ſopra le arie reſpirabili, in cui ſi laſcian morire gli animali, che ſegue una vera diminuzione, e che in conſeguenza eſce dal polmone del flogiſto. E queſto ſerva per riſpondere alla prima difficoltà.

Trovo fra' miei fogli un gran numero d' eſperienze relative all' aria comune, in cui ſi è laſciato ſpegnere

un lume ; e fra le molte esperienze basterà che ne accenni una, che mi par decisiva, attese le cautele da me usate, e quest' una contiene il risultato medio di tutte le altre consimili, che non differiscono fra loro.

Queste mie esperienze serviranno di risposta alla seconda difficoltà.

Feci fare un piccolo foro alla estremità chiusa di un cilindro di cristallo lungo otto poll. largo due, e legai fortemente nell' alto, dove era il foro, una vescica in modo che soffiando per la bocca opposta, ed aperta del cilindro potevano entrare nella vescica otto in dieci pollici di aria. Galleggiava ritta una candelina minima di cera sopra una gran vasca di mercurio. La candelina non era fatta che di cinque fili molto sottili, uno de' quali era tenuto un poco distante dagli altri, perchè la fiamma fosse appena sensibile nel principio, e non si comunicasse nell' istante agli altri fili. Accendevo quel filo con un altro filo sì sottile, che appena dava una fiamma sensibile, e lo faceva in un istante. Nel medesimo momento copriva il candelino col cilindro, e l'immergeva di qualche pollice nella vasca, ed allora la vescica si distendeva, e gonfiava, che prima era vuota, e compresa sul foro del cilindro. Il candelino finiva di accendersi tutto, e non sortiva punto di aria dal cilindro per tutto il tempo, che durava a bruciare. Lasciata raffreddare ogni cosa misurava l'aria del cilindro, e la trovai diminuita di $\frac{1}{30}$ o poco meno. Portata l'aria sull' acqua, e scossa diminuì di nuovo di $\frac{1}{40}$. Provata allora coll'aria nitrosa dava 135, quando la comune dava 110. Misi un calenzuolo in otto pollici cubici di quest' aria, e ci visse minuti $5\frac{1}{2}$. Ne misi un altro in altrettanta aria comune di paragone, e visse minuti sette.

Quando si volesse supporre, che qualche poco di aria deve essersi perduta nell' atto di coprire il candelino acceso per l' azione del fuoco, converrebbe diminuire un poco il $\frac{1}{30}$, e forse ridurlo ad $\frac{1}{40}$ o poco meno, che io non credo. Ma in tutte le ipotesi, che si vorran fare, sarà sempre vero, che la diminuzione è piccolissima, onde non è poi maraviglia, che l' aria sia peggiorata di sì poco, e che si possa ancor respirare dagli animali in tale stato. La pochissima aria fissa, che si è formata, è un nuovo argomento per assicurarci anche di più che si è schiuso poco flogisto dal candelino, e che in conseguenza di poco deve anche esser peggiorata l' aria rinchiusa. Io trovo qui come per tutto altrove, che l' aria resta alterata in proporzione di quel ch' è diminuita.

E' vero che un lume vi si spegne, e che un animale seguita a vivere; ma questo non prova altro, se io non erro, se non che l' aria, che lascia vivere un animale, non può lasciar ardere un lume, e che un' aria infetta è più nociva alla fiamma, che alla vita animale, talchè non altro se ne può dedurre a parer mio, se non che la vita dell' animale non è una fiamma, non è un lume acceso, e che la vita è più tenace della fiamma.

E' molto probabile, che i celebri Chimici Svezzesi non si sieno serviti del metodo della vescica da me praticato, nè di qualche altro analogo ad esso, ma che abbiano coperto il candelino probabilmente molto maggiore del mio, e già acceso molto prima col recipiente. In questi casi la diminuzione è assai più grande a motivo del calore, che rarefa l' aria avanti di coprirla col recipiente, ed esce anche più dagli orli di esso, quando si fa uso di piccoli recipienti, in cui si trova diminuita fino di $\frac{1}{4}$.

Non posso temere d' alcuno errore nella mia sperien-

za atteso la maniera di farla, ed essendo tale che con essa si sfuggono tutte le difficoltà, e circostanze, che possono renderla equivoca; e poi quella esperienza è affatto conforme a moltissime altre da me fatte nelle medesime circostanze.

Per rispondere alla terza difficoltà, cioè del sangue, che non diminuisce le arie sane, io accennerò qui in poche righe i risultati di quattro esperienze, che par che non ammettano alcuna risposta. Introdussi quattro pollici cubici di aria deflogisticata dentro di un vaso di vetro pieno di mercurio attraverso del mercurio medesimo, che era in una vasca col vase roveściato. Il mercurio era stato riscaldato di prima fino al calor del sangue umano, come ancora il vaso. Riempii di sangue ancor caldo una boccia calda capace di una libbra di acqua, il quale esciva a torrenti dalle carotidi di un castrato; e riempiuta in modo, e coperto il collo con un dito, che non si vedesse bolla alcuna di aria nella boccia, e nel sangue, lo introdussi subito attraverso il mercurio nel vaso, dove era l'aria deflogisticata. Scossi allora il vaso sul mercurio per tre minuti, e portato sull'acqua ne feci sortire tutta l'aria del vaso, che era in bollicine minime, e difficili ad unirsi insieme. Sparite le bollicine misurai l'aria, e trovai che era diminuita di $\frac{1}{4}$ giusto. Esaminato la sua bontà col mio Evaerometro secondo il mio metodo, trovai che dava coll'aria nitrosa cavata dal mercurio poco prima 70. 32. 66. 166. quando prima di scuoterla col sangue dava 70. 33. 23. 123. Era adunque peggiorata sensibilmente, e nel tempo stesso diminuita.

Ripetei questa esperienza nelle medesime circostanze di sopra, ma senza scuotere punto il vaso, e lasciai il sangue così a contatto dell'aria per tre minuti. Cavata allora l'aria come sopra, trovai che non era sensibilmente diminuita, e colla nitrosa diede 70. 32. 40. 120. Era adunque un poco peggiorata in bontà, ben-

chè non diminuita ſenſibilmente, o pochiſſimo aſſai, ma era molto migliore, che nella prima eſperienza, dove fu ſcoſſa col ſangue.

Volli fare due altri ſperimenti nelle ſteſſe circoſtanze di ſopra, ma coll'aria comune. Nella prima di queſte due ultime eſperienze ſcoſſi l'aria comune col ſangue per tre minuti, e ritrovai che l'aria era diminuita di $\frac{1}{7}$. Trattata coll'aria nitroſa diede 126. quando l'aria comune prima di ſcuoterla col ſangue dava 111. Queſta aria era adunque diminuita, e fatta peggiore nel tempo ſteſſo.

Nella ſeconda eſperienza laſciai a contatto dell'aria il ſangue per tre minuti, ma ſenza ſcuoterlo punto. Cavata l'aria, che non trovai ſcemata, ma piuttoſto accreſciuta un poco, forſe di una bollicina, o due, coll'aria nitroſa diede 111. Queſta aria non era adunque nè diminuita, nè peggiorata.

Queſte quattro eſperienze, ſe io non erro, dimoſtrano chiaramente, che il ſangue può beniſſimo diminuir le arie reſpirabili, e renderle peggiori. E' vero che il ſangue della quarta eſperienza nè ha diminuita l'aria, nè l'ha peggiorata punto; ma convien riflettere, che l'aria non iſtette a contatto del ſangue, che tre ſoli minuti; e che non furono ſcoſſi i due fluidi inſieme, onde non ſi toccavano fra loro, che con due ſoli ſtrati ſottiliſſimi. Ed in fatti quando ſi ſcoſſero que' fluidi fra loro nella terza eſperienza, vi fu diminuzione di aria, e deterioramento di bontà, che forma una dimoſtrazione completa. Che ſe nella ſeconda eſperienza ci fu peggioramento di bontà ſenza diminuzione ſenſibile dell'aria deflogiſticata, non deve parere ſtrano, perchè la ſcala della bontà dell'aria nel mio ſtrumento, e col mio metodo è molto più ſenſibile di quel che foſſe il metodo praticato da me nel miſurare la diminuzione dell'aria prodotta dal flogiſto. Dove poi fu ſcoſſa l'aria deflogiſticata unitamente col ſangue, ſeguì maggior diminuzione

nuzione, e maggior deterioramento di bontà, che combina perfettamente con tutti gli effetti del flogisto colle arie respirabili, e coll'aria purissima. Io non so concepire esperimento, che si accosti più allo stato naturale del sangue, che passa per il polmone dell'animale vivente, di quelli da me riportati sopra. Il passaggio del sangue dai vasi nel mercurio era fatto dentro due secondi o poco più. Il sangue conservava il suo calor naturale per tutti i tre minuti. Quando era scosso, moltiplicava i suoi contatti sull'aria, come succede appunto nel polmone, e nel breve tempo di tre minuti non si può credere che il sangue perdesse nulla delle sue qualità primitive.

Si obbietterà forse che l'aria in una respirazione non sta a contatto delle vescichette polmonari, che quattro in cinque secondi, non già 20. o 30 volte di più, come nelle esperienze fatte da me, e riportate sopra; onde non esser maraviglia, se l'aria è poi diminuita notabilmente, e peggiorata. Ma si deve riflettere che una porzione dell'aria, che forte dal polmone nella espirazione, è aria in parte delle inspirazioni fatte avanti. In secondo luogo, e questa io credo la principal ragione, il sangue nel polmone è diviso, suddiviso in infiniti vasi sempre minori, onde presenta una immensa superficie all'aria inspirata, la quale è parimente moltissimo divisa, e distesa nelle innumerabili vescichette polmonari: laonde i contatti fra il sangue e l'aria nel polmone sono incomparabilmente di più, che i contatti del sangue, e dell'aria scossi insieme dentro d'un vaso sul mercurio. Si aggiunga a tutto questo la gran velocità, con cui scorse il sangue nel polmone; e si troverà che anche per questa cagione gli effetti del sangue polmonare sull'aria inspirata devono esser grandissimi, talchè non deve parerci punto strano, che si trovi l'aria espirata sensibilmente diminuita, e peggiorata.

Una ricerca molto interessante rimane a farsi anche

dopo le quattro esperienze sul sangue e sull' aria riportate di sopra, ricerca che può avere la più grande influenza nell' economia animale, e che può mostrare i veri usi del polmone, viscere tanto necessario alla vita. Consiste in sapersi se vi è alcuna nuova produzione di aria, ossia accrescimento di fluido elastico, quando l'aria è in contatto del sangue.

L' aria delle quattro esperienze di sopra si è misurata nell' acqua, e si è scossa in essa per liberarla dall' aria fissa se se ne fosse trovata in quelle circostanze; e perchè le mie esperienze procedessero con metodo io ho creduto di dover cominciare dal lasciar l' aria, ed il sangue tranquilli dentro i vasi, per osservar quello, che può il sangue sopra l' aria col solo suo contatto, e nel tempo stesso ho cercato di misurar l' aria sul mercurio, e non sull' acqua, come avevo fatto di prima. Mi son servito di aria deflogisticata, perchè i risultati fossero maggiori, e meno equivoci. Nel far queste esperienze si richiede molta destrezza e abitudine nell' osservatore. Il sangue si coagula poco dopo introdotto nel vaso anche sul mercurio caldo, onde riesce poi difficile di cavarne tutta l' aria, come conviene, per misurarla. Unitamente coll' aria tende ad escire il sangue coagulato, che bisogna in qualche parte rompere, perchè esca l' aria sola; esce in ogni modo coll' aria un poco di sangue, o di siero rosso ancora sciolto. Io soglio mettere una rete di ferro fitta nel fondo del vaso, dove è il sangue dopo i tre minuti dell' esperienza, per impedire che non escano le parti coagulate, e ricevo l' aria dentro d' un bicchiere pieno di mercurio, ed immerso nella vasca medesima, dove è il vaso, che contiene il sangue, e l' aria. Fatto questo immergo sotto il mercurio delle carte succianti, e sottili, e so in modo, che restino private di quel poco di aria, che potevano avere attaccata in minime bollicine sulla superficie. Il peso del mercurio, ed un leggier moto delle carte basta per far tut-

to questo. Fo allora passare queste carte nel bicchiere, e tutto il sangue, o umido rosso resta assorbito nel momento. Levate dal bicchiere le carte colla mano, resta l' aria asciutta, ed in istato di misurarsi.

Introdussi in un vaso pieno di mercurio sei poll. cub. di aria deflogisticata della seguente bontà 75. 45. 35. 125. Il mercurio ed il vaso avevano il grado del calor del sangue.

Riempii di sangue colante dall' animale la solita boccia prima riscaldata, e lo feci passare nell' istante attraverso il mercurio nel vaso dell' aria. Lo tenni in questo stato per tre minuti, e lo cavai nel modo accennato di sopra, e lo misurai esattamente. L' aria era cresciuta di più di $\frac{1}{7}$. La portai allora sull' acqua, e la agitai un poco per ispogliarla di aria fissa, e l' aria scemò non solo del quinto, di cui era cresciuta, ma ancora di un settimo della prima sua quantità. La sua bontà era 78. 55. 125. 255. cioè molto peggiorata.

Questo esperimento dimostra, che il sangue non solo peggiora la bontà dell' aria col puro contatto, e la dispone ad esser diminuita sull' acqua, come si è veduto ancora nelle altre esperienze riportate di sopra, ma di più accresce il volume dell' aria primitiva almeno di $\frac{1}{7}$ d' aria fissa estranea, oltre un altro settimo della quantità primitiva, che si trova essere anch' essa aria fissa.

Questi nuovi ed inaspettati risultati hanno di che sorprendere il Fisico, è vero, ma sono affatto conformi ai moltissimi altri da me scoperti sull' aria fissa, che si produce dagli animali chiusi dentro vasi di aria deflogisticata a contatto del mercurio. Queste mie esperienze furono fatte a Londra nel 1778, e 1779; e prima a Parigi, e furon quelle che mi fece dire al mio Amico, e valente Filosofo Sig. *Ingen-houtz* che dal polmone sortiva dell' aria fissa, la qual mia opinione, come molte altre, è stata attaccata con ragionamenti puri e non con esperienze.

Benchè questo non sia il luogo di dare alcun dettaglio di esse esperienze sopra questa materia, essendo riservate per un mio Trattato particolare *sulla respirazione degli animali*; ciò non ostante mi si permetterà qui di accennare un risultato generale, perchè si vegga sopra quali fondamenti io ho permesso che si avanzasse quella mia idea nell' Opera del mio Amico, e quanto è uniforme ai risultati dell' esperienze di sopra fatte sul sangue. Questo resultato, che è cavato da più di 100 esperimenti, tende a dimostrare che una parte dell' aria fissa, che si trova nei recipienti, in cui si sono lasciati morir gli animali, si deve al polmone, e non già al solo flogisto polmonare, come si è creduto fin ora. Il Sig. Cavalier *Landriani* celebre Professor di Fisica sperimentale in Milano ha creduto di dovere impugnare la mia opinione dell' aria fissa, che forte dai polmoni, e che si unisce all'aria inspirata dagli animali; e l'ha fatto con alcune sue particolari ragioni, che noi esamineremo scorrendo, giacchè egli c' invita gentilmente a farlo. Mi si permetta che io porti le sue medesime parole per conservare in tutta la sua forza le difficoltà da lui proposte. Alla pag. 76. 77 della sua opera, che ha per titolo *Opuscoli Fisico-Chimici*. Milano 1781. scrive „ Nelle mie ricerche Fisiche intorno alla salubrità dell' „ aria ho fatto osservare, che l'aria dopo d'essere pas„ sata per li polmoni intorbida l'acqua di calce, arros„ sa la tintura di turnesole... in somma presenta tutti „ quanti i fenomeni conosciuti dell' aria fissa. E con„ chiusi quindi che quest' aria fissa era generata nella „ respirazione dal flogisto, che perspirando dai polmo„ ni si unisce all' aria atmosferica, e la cangia in aria „ fissa nello stesso modo, con cui l'aria atmosferica negli „ altri processi flogisticanti viene cangiata. Ma il Sig. „ Ab. *Fontana*, siccome almeno viene annunziato dal „ chiarissimo Sig. *Ingen-houtz*, è d' opinione che quest' „ aria fissa, di cui trovasi caricata l' aria dopo essere

„ passata per i polmoni, non derivi dal flogisto, che „ si svolge da essi, e che unendosi all'aria atmosferica „ la cangia in aria fissa; ma pare che egli piuttosto „ inclini a credere che una gran quantità di aria fissa „ sia generata nel nostro corpo, e che questa esca pei „ polmoni nella respirazione. L' opinione d'un sì ec- „ cellente Fisiologo è per me tropo autorevole per „ non farmi dubitare della mia opinione riguardo all' „ origine di quest' aria fissa polmonare; ma prima di „ sottoscrivere alla sua opinione vorrei che si riflettes- „ se che nei fluidi animali, e segnatamente nel sangue „ non si trova una gran quantità di quest' acido mo- „ fetico, che si suppone esalare dai polmoni. Inoltre „ non si sa intendere, come mai quest' aria fissa possa „ essere dai polmoni depositata nell' aria atmosferica, „ perchè quando anche questa esistesse nel sangue, par- „ rebbe sempre strano che lo abbandonasse per unirsi „ all' aria atmosferica, colla quale ha pochissima affi- „ nità: altronde siccome ogni volta che l' aria atmo- „ sferica si flogistica, si genera sempre molta aria fissa, „ parrebbe che al flogisticamento della respirazione at- „ tribuire più che ad altro si dovesse quest' aria fissa „ polmonare; tanto più che dovrebbe il volume dell' „ aria respirata trovarsi cresciuto, e non diminuito, qua- „ le si trova per l' addizione dell' aria fissa, che si sup- „ pone continuamente emanare dai polmoni. Ma il Sig. „ Ab. *Fontana* avrà soddisfatto pienamente, e superior- „ mente a queste riflessioni, ed attenderò dal medesimo „ gli opportuni rischiaramenti circa questo importante „ articolo Fisiologico.

Il Sig. *Landriani* fonda le sue difficoltà sopra questo passo che egli cava dall' opera di M. *Ingen-houtz*. *Abbè Fontana found that an animal brething in either common or dephlogisticated air renders it unfit for respiration by communicating to it a considerable portion of fixed*

air wich generated in our body and thrown out the lungs as excrementious.

Io era a Londra nel 1779. quando comunicai al mio rispettabile Amico M. *Ingen-houtz* il risultato di diverse mie esperienze sopra la respirazione degli animali, risultato che egli inserì nella sua bellissima opera intitolata *Experiments and observations upon vegetables.*

Il risultato delle mie esperienze si riduceva a provare, che non tutta l' aria fissa, che si trova nell' aria espirata dagli animali, era l' effetto del flogisto polmonare, ma che una parte dell' aria fissa veniva dal polmone medesimo.

Io non ho poi mai detto a M. *Ingen-houtz* in nessun luogo, nè in nessun tempo, che non si formi dell' aria fissa col mezzo del flogisto polmonare in quelle mie esperienze, che gli comunicai; ma bensì ho detto, che sorte anche immediatamente dal polmone, e che ne sorte in quantità, senza definire se sia il quarto, l'ottavo, o più o meno, nè il passo citato del mio Amico dice diversamente. Nè io so d' aver mai detto, o scritto che l' aria fissa, che sorte dai polmoni, sia generata dentro del corpo, potendo essa trovarsi benissimo nei cibi, e nel chilo.

Mi si obbietta inoltre dal Professor milanese, che non si trova nel sangue una gran quantità di aria fissa; ma quando ancora fosse dimostrato da sicure esperienze, il che sin ora non si è potuto fare per quanto a me pare, che si trovi pochissima aria fissa nel sangue, o per meglio dire nel polmone, la pochissima che si concede potrebbe bastare nel mio caso, giacchè nell' esperienze da me fatte l' animale non moriva ad un tratto, ma dopo un tempo considerabile; e si sa che il sangue, e gli altri umori scorrono nel polmone con gran velocità presentando all' aria delle vescichette una immensa superficie.

Si obbietta ancora dall' illustre Professore, che pare

ſtrano che l' aria fiſſa abbandoni il ſangue per unirſi all' aria dell' atmoſfera, colla quale ha pochiſſima affinità. In queſta difficoltà ſi ſuppone, ſe io non m' inganno, che l' aria fiſſa non poſſa ſortir dai corpi in virtù della ſua propria forza, e delle ſue proprie qualità, ma ſolo per una forza eſterna; nulla di queſto ſi vede provato dal noſtro Profeſſore, ma bensì ſuppoſto.

L' aria fiſſa ſorte dai fluidi in mille caſi, ſenza che vi ſia biſogno di affinità alcuna, come tutte le eſperienze dimoſtrano. Se i cibi, ſe il chilo introduceſſero nella maſſa degli umori una più gran quantità di aria fiſſa, ch' eſſi non poſſono ritenere, l' aria fiſſa ſortirà a diſpetto delle non neceſſarie affinità, quando quei fluidi ſcorrono per i polmoni. Si ſeguita ad obbiettare, che quando ſi uniſce il flogiſto all' aria comune ſi genera aria fiſſa; e di qui ſi vuole inferire, che ſi debba piuttoſto attribuire l' aria fiſſa al flogiſto polmonare, che ad altro. Queſta rifleſſione fatta a propoſito dal noſtro illuſtre Autore è molto ragionevole, ma non ſempre quello, che pare più ragionevole, è ancora il più vero. Le mie eſperienze annichilano affatto quella difficoltà di veriſimiglianza, la quale porterebbe di più in ſul falſo, quando ſi voleſſe qui far vedere, che io abbia ſoſtenuto che tutta l' aria fiſſa deriva dal polmone, e nulla dal flogiſto.

Si ſeguita ad obbiettare dal Profeſſore contro di me, che dovrebbe il volume di aria reſpirata dagli animali trovarſi creſciuta, e non diminuita per l'addizione dell' aria fiſſa, che ſi ſuppone continuamente ſortire dal polmone, quando ſi oſſerva che è diminuita.

Io ho ſempre creduto, che quando due cagioni o principj tendono l' uno a diminuire una quantità l'altro ad aumentarla, tre caſi molto differenti foſſero poſſibili, e non già un ſolo, come qui ſi ſuppone dall' illuſtre Profeſſor milaneſe. Se per eſempio una fonte riceve continuamente dell' acqua, e ne perde continua-

mente, può l' acqua della vaſca creſcer ſempre, ſcemar ſempre, e può nè creſcere nè ſcemare.

Non ſo vedere adunque perchè poſſa continuamente emanare aria fiſſa dal polmone, e ciò non oſtante trovarſi diminuita l'aria inſpirata dal flogiſto del polmone.

Finiſco con rilevare, che l' ipoteſi che ſi abbraccia qui dal celebre Sig. *Landriani* ſulla precipitazione dell' aria fiſſa dall'aria comune, non è appoggiata che a dubbie eſperienze, ed inconcludenti; e che l' altra ipoteſi da lui abbracciata ſul flogiſto, che forte dal polmone, non comincia ad eſſer ſoſtenibile che dopo gli eſperimenti riportati da me contro la teoria de' Signori *Scheel*, e di *Bergman*, eſperimenti, che il Sig. *Landriani* non conoſceva ſicuramente quando egli adottò quelle due ipoteſi, come due verità di fatto, e come ſe foſſero ſtate dimoſtrate.

Il dotto Profeſſor milaneſe par che ſi applichi ſeriamente da qualche tempo in qua agli ſtudj Fiſiologici; e noi ci rallegriamo di cuore con lui, perchè molto deve ſperare la Fiſica dal ſuo talento, e dallo ſpirito di ricerca, e di analiſi che dimoſtra in queſte materie.

Io non avrei mai penſato a riſpondere a' ſuoi obbietti, ſe egli medeſimo non mi aveſſe, quaſi direi, gentilmente invitato a farlo; e ſe io non vedeſſi che tratto tratto egli ſi compiace nelle Opere, che va pubblicando, di onorare delle ſue difficoltà le mie particolari opinioni. Della qual coſa io devo ſapergli grado moltiſſimo, perchè così mi darà occaſione ſubito che avrò un poco d' ozio d' intraprendere un nuovo eſame delle coſe da me pubblicate, e da lui combattute, e di rigettarle, ſe falſe, o di confermarle, ſe vere con nuovi argomenti, e con nuove eſperienze. In queſta maniera la verità, e la ſcienza ne trarranno de' vantaggi reali, e il pubblico ci ſaprà grado delle noſtre comuni ricerche, e differenze di pareri.

Ma ritorniamo all'azione del polmone ſopra dell' aria

offia

ossia per parlare con più di esattezza, agli effetti del sangue sulle arie respirabili. Si è veduto a non poterne più dubitare, che il semplice contatto del sangue coll'aria deflogisticata è sufficiente per peggiorarla anche dopo pochi minuti, e che il sangue somministra una gran quantità di aria fissa all' aria deflogisticata. Si sa poi d' altronde che il flogisto in generale diminuisce tutte le arie respirabili, e le diminuisce tanto più quanto sono migliori, e quanto sono migliori tanto maggior quantità si trova di aria fissa dentro di esse.

Non dubito adunque nel caso nostro che il flogisto del sangue non abbia diminuito sensibilmente l' aria deflogisticata. Ma siccome resta ignota la quantità diminuita dal flogisto, non è possibile di poter dire con esattezza quanta aria fissa sia sortita dal sangue, e mescolata coll' aria in quelle mie esperienze. Noi abbiamo trovato che era cresciuta sul mercurio l' aria introdotta di $\frac{1}{7}$; onde si dovrà dire, che l'aria fissa sortita dal polmone in tre minuti era certamente di $\frac{1}{7}$ almeno.

Questi esperimenti sul sangue per quanto mi paressero sicuri non potevano però rendermi ancor tranquillo. Erano troppo pochi da una parte, e restava ancora da saperſi, se le altre arie erano aumentate, o no, sul mercurio non solo a sangue tranquillo, ma ancora a sangue agitato. Mi pareva ancora che dovessero essere importanti per la Fisica le alterazioni, che potevano subire col sangue le due arie flogisticate, ed infiammabili; mi risolvetti adunque di far le seguenti esperienze.

La mia prima esperienza su sopra l' aria deflogisticata. Le dosi delle arie, e del sangue sono sempre state le medesime di sopra. L'aria deflogisticata, di cui mi servii, dava colla nitrosa 75. 45. 35. 135. Agitai per tre minuti i due fluidi sul mercurio, e trovai che l'aria era cresciuta sul mercurio da 14 parti a $15\frac{1}{2}$. Scos-

fa nell'acqua diminuì d'$\frac{1}{25}$ della prima quantità. Coll'aria nitrosa diede So. 67. 175.

E' mirabile che quest'aria a sangue agitato sia aumentata di meno, che a sangue tranquillo; così merita attenzione il vedere che è diminuita di meno a scuoterla nell'acqua, che nelle antecedenti esperienze, e nel tempo stesso, che sia stata di molto peggiorata.

Ma quello che pare innegabile è, che il sangue accresce la massa dell'aria deflogisticata che gli sta a contatto, o si scuota, o no, che questo accrescimento è aria fissa, e che vi è una vera diminuzione dell'aria primitiva, come si osserva dopo levata coll'acqua, e spogliata dell'aria fissa.

L'aria comune a solo contatto col sangue crebbe ne' soliti tre minuti sul mercurio da 14 parti a $\frac{1}{17} \cdot \frac{1}{3}$. La scossi nell'acqua, ed il residuo era ancora $\frac{1}{14}$ di più della primitiva quantità. Colla nitrosa diede 116, quando quella di paragone dava 111.

Ripetei l'esperienza scuotendo il sangue coll'aria comune; ma una circostanza fece che non potessi osservare, se era cresciuta sul mercurio. Scossa poi nell'acqua scemò quasi di $\frac{1}{4}$. Colla nitrosa diede 135. Era adunque molto più peggiorata, che nell'esperimento di sopra. Ma nell'una, e nell'altra esperienza si vede una produzione grande di aria fissa.

Passai all'aria infiammabile, che non era diminuibile dalla nitrosa, e la lasciai a contatto del sangue per tre minuti. Crebbe sul mercurio di quasi $\frac{1}{14}$. Scossa nell'acqua si ridusse a meno sensibilmente del primo volume di

circa $\frac{1}{20}$ scarso. Al lume arse con esplosione. Coll'aria nitrosa diede 185.

Ripetei l'esperienza scuotendo il sangue, e crebbe da 14 a 18 $\frac{1}{2}$. Scossa poi nell'acqua si ridusse a 14 $\frac{1}{4}$. Col lume fece esplosione. Colla nitrosa diede 165.

Passai all'aria flogisticata, che lasciai al contatto del mercurio, e che non era diminuita dall'aria nitrosa. Sul mercurio crebbe da 14 a 15. Scossa nell'acqua si ridusse a poco meno del suo primo volume. Spense più volte un lume. Colla nitrosa diede 185.

Ripetei l'esperienza coll'agitare il sangue, ed appena crebbe l'aria quando fu sul mercurio. Scossa nell'acqua diminuì quasi di un sesto. Colla nitrosa diede 165.

Per rispondere alla quarta difficoltà dell'aria infiammabile, che si respira impunemente, e che perde la sua infiammabilità dopo respirata, io posso cominciare dall'assicurare appoggiato ad un immenso numero di esperienze, che l'aria infiammabile non è un veleno a respirarsi, come non lo è ancora l'aria flogisticata a differenza dell'aria fissa, che deve considerarsi come veleno, e come un fluido malfacente capace di alterar di per sè l'economia animale, anche allora ch'è unita a molta aria comune, e fino a gran quantità di aria deflogisticata la più pura, benchè il polmone possa scaricarsi di tutto il suo flogisto liberamente. Tutte queste nuove verità, e moltissime altre analoghe, sono appoggiate ad un immenso numero di esperienze fatte da me sopra la respirazione degli animali fin da quando era in Parigi, e che ho comunicato a' miei Amici di là, ed in Londra, e fra questi ai Signori *Cavallo*, ed *Ingen-houtz*, ed al Sig. *Kirwan*, senza parlare del Sig. *Giovanni Fabroni*, che gli ha veduti tutti coi proprj occhi, ed ha voluto assistervi. L'aria infiammabile adunque va considerata come non aria, per rapporto agli usi ordinarj

del polmone. Laonde se nel polmone, dopo fatta l'espirazione, rimanessero soli 100 poll. cub. di aria comune, si potrà seguitare a respirarla rinserrata in una vescica, e servirà alle solite funzioni per qualche tempo, benchè un poco peggiorata. L'aria infiammabile di sua natura innocente non può nuocere all'aria animale, nè può impedire, che il polmone non eserciti le sue ordinarie funzioni qualunque esse sieno; che anzi può fino esser utile in qualche maniera all'animale medesimo, perchè può distribuire per tutti i bronchi, e per tutte le vescichette polmonari l'aria comune, che nella nostra ipotesi era 100 poll. cub., e di cui il polmone non si vuota mai affatto, e gonfiarne le vescichette come prima. Laddove la sola aria comune non avrebbe potuto fare che men bene con danno dell'economia animale, giacchè si sa che quando le vescichette polmonari sono flacide, e schiacciate, il sangue è arrestato almeno in parte, e la circolazione è nel più gran disordine.

Per altro è poi certo, che dopo una fortissima, e violenta espirazione non si respira l'aria infiammabile, che per poco tempo, come l'ho fatto vedere in una mia Memoria pubblicata nelle Transazioni Anglicane sopra di questa materia, alla quale mi riporto intieramente. Devo però avvertire che quando io feci in Londra quella mia esperienza, in cui non potei inspirare che tre sole volte l'aria infiammabile, io dovetti probabilmente impiegar molto tempo nel far quella violentissima espirazione che precedette l'esperienza, e forse ancora le tre inspirazioni furono fatte da me con lentezza, giacchè ho trovato nel ripeter quell'esperimento delle differenze sensibili, ed ho potuto respirar l'aria infiammabile fino sei in sette volte. Ma tutto questo sempre più mi persuade, che l'aria infiammabile non è nociva di sua natura, e che va considerata come non aria. L'istesse esperienze ho fatto respirando l'aria flogisticata, ed i risultati sono stati poco differenti. Tal-

chè queſti riſultati, ed i moltiſſimi altri fatti ſugli animali chiuſi dentro vaſi colle arie reſpirabili pure, e colle medeſime meſcolate in diverſe quantità coll' aria infiammabile, flogiſticata, e fiſſa dimoſtrano l' aſſurdità di molte ipoteſi immaginate da' Filici moderni ſopra la morte degli animali nelle arie reſpirabili, e nelle arie non reſpirabili.

Conviene ancora riflettere che 20 reſpirazioni ſi fanno in meno aſſai di due minuti; onde non trovo punto ſtraordinario, che ſi poſſa reſpirar l' aria infiammabile per 20 volte impunemente, giacchè ſi può tenere il reſpiro per quaſi due minuti, volendo uſar gran forza, anche dopo ſeguita l'eſpirazione naturale.

Ho fatto diverſi eſperimenti ſopra la mia propria reſpirazione ne' differenti ſtati del polmone, ed ho potuto fiſſare i ſeguenti riſultati, che ſanno molto a propoſito alla materia, che abbiamo fra le mani.

I.

Poſſo tener la reſpirazione per 60 ſecondi e più, dopo che il polmone ha fatto la ſua inſpirazione naturale.

II.

Poſſo tenerla per 48 ſecondi e più, dopo che il polmone ha fatto l' eſpirazione naturale.

III.

Poſſo tenerla per 37 ſecondi e più, dopo che ha fatto l' eſpirazione violenta.

IV.

Posso tenerla per 65 secondi e più, se il polmone è nell' inspirazione violenta.

Si avverta che in un minuto si respira 16 in 18 volte. Si avverta che il più piccolo affanno può accelerar le respirazioni a segno di farne fino 25, e 30 per minuto, e per l'opposto in altri casi le ritarda. Si avverta che i tempi indicati di sopra variano secondo i differenti stati della nostra macchina, e che le respirazioni si fanno molto lente verso la fine.

Se nelle quattro esperienze riportate di sopra si fa passar l'aria, che si espira, dentro di una vescica, e si continua a respirar quell' aria per mezzo di essa vescica, cangiano sensibilmente i tempi fissati di sopra, e si respira per più tempo.

Nella prima esperienza si arriva a respirar l'aria per 70 secondi e più.

Nella seconda, e terza esperienza si dura parimente un tempo più lungo.

Nella quarta esperienza si arriva a respirarla anche dopo 120 secondi.

Questa diversità di tempi par che dipenda dalla rinnovazione dell'aria, che si fa nel polmone ad ogni respirazione. Ad ogni inspirazione si porta nelle vescichette polmonari anche l' aria meno infetta della trachea, e de' bronchi, laddove senza vescica, ed a polmone tranquillo l' istessa aria più infetta, ch' era nella vescichetta, peggiora sempre di più, perchè non rinnovata. Vi si aggiunga il calore dell' aria, che è maggiore nel primo caso, che nel secondo, e che porta dell' affanno al polmone, come si farà vedere altrove.

Nella quarta esperienza si passa di poco i 65 secondi per motivo dello stato di violenza, e di distensione indotta a tutto il polmone da una troppo esorbitante

mossa di aria; ma è poi chiaro da sè che in quello stato si respirerà più lungamente, se si fa uso della vescica, sì perchè la quantità dell' aria è molto di più, che nelle altre esperienze, sì perchè non si porta ai polmoni, che nella quantità ordinaria, ma sempre rinnovata.

Rifletto ancora, che la traspirazione insensibile non arriva a flogisticar l' aria comune sentibilmente, come mi costa da tutte le mie esperienze, chechè altri ne abbiano scritto in contrario, forse per aver fatto uso di cattivi Evareometri, e per avere ignorato il metodo da me tenuto.

E' vero che nelle altre secrezioni più grosse vi si trova del flogisto; ma queste sortono dall' animale a grandi intervalli di tempo, ed in qualche caso, ed in qualche animale si possono sospendere per giorni e giorni senza incomodo almeno molto sensibile; talchè parrebbe che non rimanesse altra via all' animale, per iscaricarsi della eccedente quantità di flogisto, che si prende col cibo, e che va ad unirsi alla massa degli umori circolanti, che il polmone, e si fa che la parte rossa del sangue è ricchissima di flogisto.

All' altra parte della difficoltà, che l' aria infiammabile cessa d' infiammarsi dopo respirata, io non saprei, se non se opporre esperienza ad esperienza. Non mi è ancor riuscito di privarla affatto della sua infiammabilità quando la respiravo nelle vescichette alla maniera dei Filosofi Svezzesi, e molto meno quando la respiravo sull' acqua, dove anderebbe fatto questo esperimento, essendomi sospette le vesciche per molte ragioni, che tralascio presentemente di accennare. Ma non so veder genere d' esperienza più decisivo, che quello di far respirare agli animali sul mercurio l' aria infiammabile mescolata con altrettanta aria comune. Ho fatto uso de' porchetti d' India, e son vissuti in quell' aria sette, otto, e fino in nove minuti. La quantità

di ciaſcuna aria da me adoperata era di 12 poll. cubici. In tutte le eſperienze da me fatte ho trovato che l' aria s' infiammava, benchè reſpirata sì lungo tempo da quegli animali, e benchè foſſe reſpirata fino a laſciarli morire. Non ſo veder nulla di più ſemplice, e meno ſoggetto ad equivoci.

Rifletto ancora, che potrebbe darſi beniſſimo il caſo, che un lume ſi ſpegneſſe nell' introdurlo dentro di un tubo d' aria comune, e di aria infiammabile reſpirata lungamente dal polmone. L'aria comune, ſe è ſpecialmente in quantità fatta aria flogiſticata e fiſſa nel polmone, impedirà che un lume vi arda, benchè vi ſia nel tubo dell' aria infiammabile, e tanto più facilmente, quanto più il tubo ſarà lungo, e ſtretto. Si ſa che l' aria infiammabile non arde ſenza aria comune, e che l' aria flogiſticata e l' aria fiſſa ſpengono i lumi.

Ma ſi conceda pure ai due celebri Fiſici Svezzeſi che l' aria infiammabile ceſſa di eſſer tale dopo reſpirata, e che perde il ſuo flogiſto, e lo dà al polmone; non per queſto ne ſeguirà neceſſariamente, che il polmone aſſorba il flogiſto dell' aria comune dall' aria deflogiſticata. L' aria infiammabile certamente pregna di flogiſto ſi trova obbligata per lungo tempo a ſtriſciare ſopra un numero infinito di minimi vaſi roſſi polmonari. Ma non veggo poi punto impoſſibile, che nel mentre che l' aria comune riceve il flogiſto da una foſtanza, che ne ha più di lei, come è il ſangue per rapporto all' aria comune, l' aria infiammabile ne dia per l' oppoſto al ſangue, che può avere meno di eſſa. Può adunque l' aria comune caricarſi del flogiſto polmonare, e l' aria infiammabile eſſere impoverita del ſuo flogiſto dal polmone, ſenza che ſi debba credere, che il polmone aſſorba il flogiſto dell' aria atmoſferica, quando ancora l' aſſorbiſſe dall' aria infiammabile. Queſto è quello, che ho creduto di poter dire in fatti ſopra le belle eſperienze

dei

dei due famoſi Chimici Svezzeſi intorno alla flogiſticazione dell' aria nel polmone.

Si potrebbe qui obbiettarmi una eſperienza dell'illuſtre Sig. Cav. *Landriani*, colla quale ha egli trovato, che l' aria flogiſticata arriva ad ammazzare gli animali col ſolo tenerla a contatto della loro pelle ſenza reſpirarla punto. Egli aſſicura di avere oſſervato, che chiudendo una gallina dentro di una veſcica piena di aria flogiſticata col capo fuori del collo della veſcica, la gallina muore ben preſto. Io avevo chiuſo dentro di un recipiente col capo fuori diverſi animali in arie anche più micidiali dell' aria flogiſticata, come per eſempio l' aria fiſſa ecc., ma non avevo mai oſſervato, che gli animali aveſſero moſtrato di ſoffrire per queſto; lo ſteſſo oſſervai più volte nell'aria infiammabile. Potrebbe parere ancora ſingolare che vi foſſe un fluido aeriforme, permanente full' acqua, che poteſſe uccidere sì preſto col ſolo contatto della pelle. Ma tutte queſte difficoltà non ſono di neſſun peſo contro di una eſperienza diretta. Ero adunque curioſo di vedere io ſteſſo un eſperimento così ſorprendente, e sì nuovo; e mi determinai di farlo più volte, e lo feci oſſervando rigoroſamente il metodo del Sig. *Landriani*, e le cautele da lui preſcritte: ma per quante volte io lo replicaſſi, che furono moltiſſime, non ſolo non mi morì neſſuna gallina, ma neſſuna moſtrò nè anco di avere il menomo incomodo. Eſteſi le mie eſperienze ſopra i conigli, i porchi d' India, ed i piccioni; ma neſſuno morì, o moſtrò di ſoffrir punto in quell' aria. La veſcica durava più e meno gonfia di aria flogiſticata per il tempo dell'eſperienza, benchè ſcemaſſe continuamente, ma poco a poco, e per gradi minimi.

Penſai di ripetere l' iſteſſe eſperienze in una maniera ancora più deciſiva: deſideravo che la veſcica foſſe egualmente piena di aria flogiſticata per tutto il tempo dell' eſperienza. Per queſto mi ſervii di un recipiente di cri-

ſtallo a gran pancia capace di più di 1000 poll. cub. di aria, che aveva un' apertura nell'alto di circa un poll., e nel baſſo di 6 poll. e più.

Legai il collo di una gran veſcica al ſoro ſuperiore del recipiente, e fatto un taglio nella parte oppoſta della veſcica, v' introduſſi l' animale in modo che reſtaſſe tutto il capo fuori della veſcica. Fatto queſto, facevo uſcire l' aria comune dalla veſcica tenendo il recipiente immerſo nell' acqua. Quando l' acqua era vicina a entrare nella veſcica, introducevo ſucceſſivamente più migliaja di pollici di aria flogiſticata nel recipiente, e laſciavo che ſortiſſe l' aria per gradi allargando un poco la veſcica intorno al collo dell' animale a proporzione, che entrava l' aria. Quando l' aria del recipiente doveva eſſer ridotta a pura aria flogiſticata, chiudevo in modo la veſcica con preſſioni eguali, e molleggianti, che l' aria non poteſſe ſortire più almeno ſenſibilmente da eſſa, ed immergevo il recipiente nell' acqua di più pollici, perchè la veſcica foſſe ſempre ripiena di aria flogiſticata. Ho fatto le mie eſperienze nelle galline, ne' piccioni, ne' conigli, ne' porchi d'India ecc. e neſſuno mi è morto, o ha moſtrato di ſoffrire punto. Il metodo da me tenuto è ſemplice, le mie eſperienze ſono molte, onde non poſſo temere d' eſſermi ingannato. Laſciavo gli animali nell' aria flogiſticata ſino due in tre ore.

Il Profeſſor milaneſe crede, che l' aria flogiſticata della veſcica uccida gli animali col ſolo contatto eſteriore, perchè s' impediſce, dice egli, con quell'aria la traſpirazione del flogiſto attraverſo la cute. Ma biſognerebbe prima di tutto che il valente Profeſſore provaſſe I. che ſi fa veramente queſta traſpirazione cutanea di flogiſto negli animali, II. che ſi fa in modo nelle galline da ucciderle in poco tempo, quando è impedita. La prima parte a noi par falſa almeno nell' applicazione, che ſe ne vuol far qui dal noſtro Autore per quanto abbia-

mo potuto rilevare dalle noſtre proprie eſperienze che daremo in altro tempo. La ſeconda è affatto inverisimile, non appoggiata a fatto veruno, e contraddetta dalle mie eſperienze medeſime, che pubblicherò fra poco, ſopra la *reſpirazione degli animali*.

Non poſſo adunque convenire in neſſuno dei fatti riportati dall' illuſtre Profeſſor milaneſe ſugli effetti attribuiti da lui all'aria flogiſticata, e molto meno ſopra le eſperienze da lui fatte. Devo adunque pregarlo a voler ripetere le ſue eſperienze una ſeconda volta, perchè meritano la più gran conſiderazione; e tutti coloro, che amano le verità Fiſiche, e i fatti veri, gli ſapranno grado della pena, che ſi vorrà dare; e noi faremo i primi a convenire con lui che ci ſiamo ingannati, nè ci vergogneremo di confeſſarlo quando egli ci avrà dato quel dettaglio che è neceſſario perchè le eſperienze rieſcano anche agli altri. Chi ſperimenta può ingannarſi; ma tutto dobbiamo ſperare dalla conoſciuta ingenuità, ed amore per le verità utili del degno Profeſſore.

L'altra parte della nuova teoria ſtabilita dai due Fiſici Svezzeſi riſguarda la formazione del calore, la generazione dell'aria deflogiſticata, la revivificazione delle calci metalliche, e la diminuzione delle arie reſpirabili coi proceſſi flogiſtici, ed è forſe la più brillante, e dove ſpicca più il loro talento inventore. Credono adunque che la materia del calore ſia formata del flogiſto, e di aria puriſſima, e che in queſto ſtato paſſi liberamente attraverſo di tutti i corpi. Con queſti principj ſpiegano facilmente le revivificazioni delle calci de' metalli preziosi, cioè col ſolo calore, e ſpiegano la formazione dell' aria pura chiamata da noi aria deflogiſticata. La materia del calore nel paſſare attraverſo i vaſi ſi decompone; il flogiſto attratto dalle calci metalliche le revivifica in metallo; e l' aria pura abbandonata a sè ſteſſa, e fatta libera, ſorte dal collo del matraccio aria deflogiſticata.

Non so veder nulla di più semplice, e di più ingegnoso, e si spiegano, convien confessarlo, colla più gran facilità le diminuzioni delle arie pure coi processi flogistici, che sono sempre accompagnate dal calore.

Questa teoria si trova illustrata con sommo ingegno dal Cav: *Bergman*, ed applicata a quasi tutti i fenomeni della Chimica. Non poteva trovar campione più valoroso per sostenerla; ma da quel grand'uomo che egli è non l'avanza per una verità ancor dimostrata, ma per una teoria, o ipotesi, che spiega i fenomeni più difficili, ed esorta gli altri Fisici a travagliare sopra questa materia importante.

Io avrei però desiderato che fosse appoggiata a qualche esperienza diretta, o che si fosse immaginata tale esperienza, che dimostrasse all' osservatore imparziale, che le diminuzioni dell' aria pura provenissero da perdita di essa aria attraverso i vasi insieme col flogisto, quando diventa calore, non già da ristringimenti, e decompozioni dell'aria medesima. In somma mi pareva che mancasse uno di quegli esperimenti, che il Gran Bacone da *Verulamio* chiamava *experimentum crucis*, e che egli desiderava, che si cercassero dal Fisico industre per istabilire, o per abbattere le teorie, e le ipotesi immaginate dai Filosofi. Non sempre però riesce di trovare di questi esperimenti, nè anco dai Filosofi più grandi, e più consumati, e suppongono un genio creatore nell' uomo; e a questa difficoltà sola si devono appunto le dispute interminabili sopra tanti punti importanti della Fisica, e della Chimica, che durano ancora, e che non finiranno sì subito.

Frattanto mi si permetta di riportar qui un esperimento, che a me pare fortissimo, e che rende alquanto sospetta quella nuova teoria. Ecco l'esperienza.

Si prende un'oncia di mercurio purissimo, e si mette in un matraccio di lungo collo, ed aperto al fuoco di sabbia. Se il collo è aperto, si calcina il mercu-

rio per intiero dopo molti mesi, e si trova ch' è cresciuto di $\frac{1}{4}$ in circa del peso primitivo. Questo aumento di peso viene sicuramente dall' aria, perchè a vaso chiuso non se ne calcina sensibilmente, e quel poco che si calcina è in proporzione della quantità dell' aria, ch' è dentro del vaso, e l' aria si trova allora diminuita, e peggiorata in bontà. Si revivifichi ora col solo fuoco la calce del nostro matraccio, e si ricevano i prodotti in vasi adattati. Il mercurio ritornerà ad un' oncia come era prima di calcinarsi, e sortirà aria purissima dal collo, che pesata sarà precisamente un ottavo di oncia, cioè il peso, di cui era cresciuto il mercurio per l' aria certamente, che gli si era unita, o per meglio dire da materia cavata dall' aria. Qui non si fa vedere decomposizione alcuna di calore, perchè l' aria sortita è uguale in peso all' accrescimento della calce, e non maggiore. Se vi fosse stata la decomposizione del calore, e la produzione di nuova aria pura, che è uno de' suoi componenti, nell' ipotesi Svezzese, sarebbe sortita dal matraccio una più grande quantità di aria, e di un peso molto maggiore, perchè vi sarebbe stata tutta quella del matraccio, che era un ottavo di oncia, e l' altra del calore decomposto. Non so cosa si possa replicare a questa esperienza, dove vi è certamente la materia del calore, come nelle altre revivificazioni metalliche, senza che vi sia la decomposizione di esso, e la produzione di nuova aria deflogisticata.

Questo argomento può servire a spiegare molte altre revivificazioni metalliche, e produzioni di aria purissima senza bisogno di ricorrere alla decomposizione del calore, e senza suppor nota la composizione di quel principio sì poco conosciuta ancora dai Filosofi.

Se fosse permesso di azzardar qualche pensiero sopra questa materia sì oscura, potrei domandare se è poi un assurdo di pensare, che in quell' ottavo d' oncia di materia estranea accresciuta nel mercurio calcinato vi fos-

se tanto di quel principio, che fa revivificare i metalli, che messo in moto dal fuoco fosse attratto dal mercurio, che n'è spogliato, e sitibondo, quando è in stato di calce, e si repristinasse così in metallo. In questa supposizione la materia, che è nel mercurio, privata di flogisto sortirà aria deflogisticata purissima. Ammessa questa ipotesi, si rende ragione di una infinità di fenomeni non prima intesi.

Le calci metalliche non sono affatto prive di flogisto. Quelle calci, in cui si trova aria fissa, non sono nè anco esse affatto prive di quel principio, sì perchè l'aria fissa non ne è priva nè anco essa, sì perchè alcune calci danno l'aria infiammabile coll'acido del fosforo, sì perchè altre calci unite all'acido vitriolico danno dell'aria vitriolica, cioè un'aria fatta elastica dal flogisto, che a loro si è unito.

Conviene ancora riflettere che colla semplice unione degli acidi, e delle calci metalliche si cavano de' fluidi elastici, cioè de' fluidi fatti elastici dal flogisto. La poca aria deflogisticata, che si ottiene da certe calci coi puri acidi, non distrugge punto l'osservazione fatta sopra, e il valente Chimico Svezzese il Sig. *Bergman* stesso non crede poi prive affatto di flogisto le calci metalliche, *interim tamen non penitus spoliata reperiuntur*, scrive egli e ne adduce delle sorti prove. Vi è del ferro spatoso, che non è punto tirato dalla calamita; ma appena vi si applica il fuoco, tramanda aria infiammabile, e fissa, ed allora è tirato per intiero dalla calamita. Se si volesse considerare il ferro nel primo caso sotto forma di calce, converrebbe credere, che vi fosse unito un principio flogistico, che revivifica la calce in ferro, e forte sotto forma di aria infiammabile.

Tutto questo ci farebbe credere, che l'ottava parte di peso accresciuto al mercurio, che diventa calce col solo fuoco, non è tutto sotto forma di aria pura inelastica, ma bensì di un composto della materia di quell'aria,

e di flogisto, il quale messo in movimento dall'azione del fuoco vivo corre a revivificare il mercurio, con cui ha la più grande affinità; e l'altro componente fatto libero forte sotto forma di aria purissima, cioè di aria privata di flogisto almeno in gran parte. Ma io non pretendo di stabilire una teoria sicura su de' principj certi, mancano le prove dirette, le esperienze decisive.

La bella esperienza riportata dal Sig. *Bergman* dell'aria, che si trova consumata nella palla, in cui egli lascia raffreddare la pasta de' tre metalli solubili all'acqua, non prova nulla in favore di quel sistema, perchè si suppone che la palla sia diminuita di peso, ma non si adduce nessuna esperienza, nessun fatto certo, che ci assicuri di questo.

L'istesso si deve dire delle ordinarie calci metalliche, che contengono dentro di sè una gran quantità della materia dell'aria, ed alla quale si deve il loro peso accresciuto, e che si cava da esse co' soliti mezzi.

Nè a me pare che provi molto in favore di quel sistema l'esperimento fatto dal Sig. *Bergman* col lume acceso, che consuma quasi affatto l'aria deflogisticata di un recipiente sul mercurio, perchè non apparisce da esso, che l'aria deflogisticata diventata calore se ne sia andata attraverso del vetro. Per l'opposto tutto concorre a far credere, che la materia dell'aria, perduta la sua naturale elasticità, si unisca al corpo, da cui è sortito il flogisto; ed in fatti si vede che allora quelle sostanze crescono di peso in proporzione appunto dell'aria diminuita, come si osserva del fosforo, del zolfo, del piroforo, che si fanno ardere nell'aria dentro vasi.

Ma poi non lasciano alcun dubbio le mie esperienze sul carbone. Queste esperienze furono da me fatte fino dai primi tempi, che ero a Parigi, e fra i molti che le videro mi basterà di nominare il Sig. *Duca di Chaulnes*, M. *Turgot* Ministro di stato, e il dotto traduttore di *Priestley* M. *Gibelin*. Si trovano dopo quel tem-

po citate da diverſi teſtimoni. *Prieſtley* ne parla in più luoghi nella ſua opera ſulle *Arie* ſtampata a Londra fin dal 1778, e riſtampata in franceſe nel 1782. dove alla pag. 77 ſi ſpiega così: *L' aſſorbition de toutes les eſpeces d' air par le charbon eſt une grande decouverte de l' Abbè Fontana qui à bienvoulù me permettre d' en faire mention.*

Si faccia accendere il carbone, e quando è bene acceſo, ed in pezzetti, ſi faccia ſpegnere dentro bocce ripiene di eſſo, e ſubito ſi chiudano. Raffreddate ſi peſino, e s' aprano poi nell' aria comune, o dentro vaſi di note quantità di aria e galleggianti ſul mercurio; le bocce dove è il carbone creſceranno di peſo, e creſceranno in ragione dell' aria diminuita ne' vaſi. Queſto carbone poi meſſo nel vuoto, o immerſo nell' acqua dà una gran quantità di aria, la maggior parte della quale è aria flogiſticata, il reſtante è aria fiſſa con poca aria comune.

Se ſi ſpegne nel mercurio del carbone acceſo, e ſi fa paſſare attraverſo il mercurio ſenza toccar l' aria eſterna in un recipiente, in cui vi ſia dell' aria comune, ſi vede nell' iſtante diminuirſi quell' aria fino a non apparirne più un atomo. Se in queſto ſtato ſi fa paſſare il carbone nell' acqua ſenza toccare all' aria eſterna, ſorte dal carbone in bolle circa $\frac{1}{5}$ dell' aria primitiva aſſorbita, la quale è perfettamente flogiſticata. Sorte ancora dal carbone dell' aria fiſſa, che viene aſſorbita dall' acqua a proporzione, che ſe n' eſce in bollicine. Il carbone arriva ad aſſorbire circa 6 volte il ſuo volume di aria in quelle eſperienze.

Si noti che il carbone aſſorbe in quelle circoſtanze di ſopra ſei volte, ed anche più di aria deflogiſticata; ma meſſo nell' acqua dà poche bollicine, e di un' aria molto migliore della comune, ma molto peggiore di prima.

Meſſo poi il carbone ſpento nel mercurio nelle arie infiammabili,

infiammabili, o nelle flogisticate, appena assorbe il proprio volume di esse, ed immerso come sopra nell' acqua non dà sensibilmente aria veruna.

Mi si permetta di dare qui alcuni risultati di esperienze fatte col carbone spento nel mercurio, e poi introdotto attraverso il mercurio in tubi alti 35 poll., larghi due, in cui si era messo una determinata quantità di aria comune. L' aria introdotta era circa 10 poll. scarsi. Mi ero accorto, che tenendo il tubo verticalmente sortiva molta aria dal carbone, la quale veniva assorbita coll' inclinar il tubo all' orizzonte. Inclinai adunque il tubo a tal segno, che l' aria fosse assorbita per intiero dal carbone. Allora situai il tubo a piombo; e lasciato così per qualche tempo, cavai dal tubo il carbone per mezzo di un filo sottile di ferro attaccato ad una rete di ferro anche essa, e introdotta nella parte più alta del tubo, che strascinava seco il carbone. Cavato adunque il carbone misurai sul mercurio l' aria rimasta nel tubo, e sortita dal carbone per tolta pressione esterna, e trovai che era 6 poll. cub. per lo meno. La portai sull' acqua, e la scossi, e ne fu assorbito mezzo pollice. Il residuo spense un lume, e diede colla nitrosa 185; onde vi erano nel carbone, che era circa due poll. cub., circa tre volte più di aria del suo proprio volume, e quest' aria era per $\frac{1}{12}$ aria fissa, ed il restante aria quasi affatto flogisticata.

Ripetei l' esperienza coll' aria deflogisticata nelle circostanze di sopra, il carbone era 4 poll. cubici, escirono dal carbone sul mercurio quattro poll. dell' aria. Il residuo scosso nell' acqua diminuì d' $\frac{1}{2}$. Coll' aria nitrosa diede 72. 42. 78. 178., quando prima dava 71. 38. 46. 90. 190. Era adunque ancora aria deflogisticata, benchè resa peggiore, e vi era con essa un poco di aria fissa.

Ripetei l' esperienza coll' aria flogisticata, ma il car-

bone, ch'era circa 5 poll. cubici, non ne assorbì, che il proprio volume. Scossi il residuo nell' acqua, e fu assorbito di $\frac{1}{6}$. Il restante non fu diminuito punto dall' aria nitrosa.

Ripetei l' esperimento coll' aria infiammabile, e con sette poll. cubici di carbone, ne assorbì il proprio volume. Misi il tubo orizzontale, si trovò che vi era tutta la quantità primitiva di aria infiammabile, come me ne assicurai con misure attuali. Scossa nell' acqua diminuì sensibilmente. Colla nitrosa non lo fu punto, ed il lume l' accese come prima.

Io ho una lunghissima serie di esperienze fatte col carbone spento nel mercurio e nel vuoto, che formano un nuovo ramo di Scienza sopra questa materia, e principalmente ho de' risultati inaspettati. Sopra le arie, che si ottengono immergendo il carbone acceso ne' differenti fluidi, come negli acidi, negli olj, e nell' acqua medesima. E' mirabile che si ottenga dell' aria infiammabile tuffando il carbone acceso nell' acqua anche distillata, e potrebbe aver l' aspetto di paradosso, se si domandasse di cavar l' aria infiammabile da un corpo coll' acqua la più fredda. Ma mi riservo di trattar questa materia nel più gran dettaglio nella mia Opera sulle arie.

Queste nuove esperienze sul carbone somministrano de' gran lumi per la teoria delle arie medesime, e ci presentano de' fenomeni nel tempo medesimo di difficile spiegazione. Non s' intende per esempio come un pollice cubico di carbone possa contenere tre volte il suo volume di un' aria, che di comune è diventata aria flogisticata, cioè un' aria, ch' è difficile ad alterarsi servendosi ancora de' mezzi più forti che la Chimica moderna somministra, e che pare indestruttibile, indecomponibile. Se essa conserva nel carbone la sua naturale elasticità, deve esser per lo meno tre volte più elastica dell' aria comune, onde non s' intende come

poſſa il carbone contenerla dentro di sè; ſe poi non è elaſtica dentro il carbone, come potrà eſcire quell' aria dal carbone ſubito che ſi diminuiſce anche di poco la preſſione del mercurio contro del carbone medeſimo, avendo oſſervato che diminuita la preſſione dell' aria eſterna di un quarto, e di un quinto, ed anche meno aſſai, eſce beniſſimo più e meno di quell' aria dal carbone? Siamo adunque ſforzati di ammettere nel carbone una tal forza, che arrivi appena a vincere la forza sfiancante dell' aria, quando il carbone è premuto da tutto il peſo dell' atmosfera; ma che appena ſi arriva a diminuire la preſſione del mercurio contro del carbone, prevale la forza dell' elaſticità dell' aria, e forte colle qualità che abbiamo veduto.

Ma queſta maniera di eſaminare le forze ſecondo che i fenomeni lo richieggono, o di rappreſentar gli effetti col ſuppor delle cauſe, che ſieno in rapporto con eſſi, è piuttoſto matematica, che fiſica, e tende più a trovar le leggi di eſſi effetti, che le cagioni.

Io ſono di parere che l' aria eſca dal carbone, e ſi trovi in quella ſoſtanza, come eſce l' aria dall' acqua, e come l' aria ſi trova nell' acqua medeſima. E quel che dico dell' aria per rapporto all' acqua, par che ſi debba dire di quel fluido elaſtico per rapporto a tutti i corpi, in cui ſi trova. Ho dimoſtrato negli anni addietro nella mia opera *Sur l' air nitreux & ſur l' air deſlogiſtiquè*, ſtampata a Parigi nel 1781., che l' aria comune non poteva trovarſi dentro dell' acqua in iſtato di elaſticità. Conſidero l' aria nell' acqua in un vero ſtato di diſſoluzione completa. Le molecole dell' aria in quello ſtato tendono in ogni iſtante a ſortire dall' acqua per un principio, o forza che agiſce inſtantemente contro di eſſe, ed eſcono in fatti ſubito che la preſſione eſterna ſull' acqua è diminuita di tanto che prevalga la forza, che tende a farle ſortire dall' acqua, così concepiſco che l' aria ſi trovi nel carbone, cioè ridotta in mo-

lecole impercettibili non elaſtiche, ma tendenti a ſortire da quel corpo ſubito che la forza eſpanſiva, che le penetra, e che le ſtacca dal carbone, prevale. L'eſempio dell'acqua, che diventa vapore nel vuoto, e del mercurio medeſimo, che ſi riſolve in minimi corpiccioli nel vuoto più perfetto, dimoſtrano abbaſtanza, che regna queſta forza in tutti i corpi, e che la ſola preſſione eſterna dell'aria, o tolta, o diminuita, fa che ſi riducano in vapori i fluidi più inerti, e più peſanti. Io ſpero di poter dimoſtrare con tutta l'evidenza, di cui ſono capaci le verità fiſiche, la realtà di queſto nuovo principio, ed il ſuo meccaniſmo.

Comunque ciò ſegua poco importa, purchè il fatto ſia vero, e ſi convenga, che tutti quegli effetti derivano dal principio flogiſtico, ch'è nel carbone. Non ſi può adunque più dubitare, che la diminuzione dell'aria, anzi la totale diſtribuzione di tutte le arie artificiali, e naturali non ſi facciano a ſcapito dell'aria medeſima, che ſi è introdotta nel carbone.

Merita ancora tutta la conſiderazione del Filoſofo penſatore il vedere, che ſi è trovato una materia, che aſſorbe tutte le arie per intiero, ſenza reſiduo alcuno, che fin'ora non ſi è ottenuto con neſſun altro proceſſo flogiſtico, e che deve render ſoſpette le teorie di quei Fiſici, che hanno formato l'atmoſfera di $\frac{1}{6}$ di aria micidiale, e di $\frac{1}{4}$ di aria puriſſima col ſolo fondamento che non ſapevan diminuire l'aria comune, che di $\frac{1}{4}$, e che il reſiduo era meſitico, oſſia aria flogiſticata. Il carbone può diminuirla comunque, ed i reſidui ſono aria mal ſana, e può fino diſtruggerla affatto. In queſto caſo converrebbe dire, che l'aria atmoſferica è fatta di ſola aria deflogiſticata, di ſola aria puriſſima, che è un aſſurdo, e ch'è contrario alla ipoteſi, che combattiamo. Il carbone è di tutte le ſoſtanze, o flogiſti, il ſolo conoſciuto fin qui che aſſorba tutte le arie naturali, ed artificiali sì ſalubri, che meſitiche, che ne aſſor-

ba in sì gran quantità, che ne assorba con tanta rapidità, e che le assorba per intiero, cioè senza residuo alcuno di fluido elastico; ed in questo consiste principalmente, e non in altro la singolarità da me scoperta in quella sostanza. Nè si deve confondere il carbone con quelle sostanze, che assorbon l'aria naturale ad esse, e che hanno perduto per qualche accidente; ma la diminuzione dell'aria deve esser fatta dal solo flogisto, come è fatta dal carbone. Nè mi costa ancora da nessuna esperienza diretta, che nè anco le piante stesse in stato di vegetazione si possono paragonare col carbone per le distruzioni delle arie, e poi il principio che le produce non si prova il medesimo. Nè si creda che il carbone assorbe le arie solo a proporzione, che si raffredda, perchè fa il medesimo raffreddato comunque, e chiuso in vasi, e coperto di mercurio anche per anni.

Ma dopo ancora tutte le cose da noi rilevate contro la nuova Teoria del calore, non ero contento di me medesimo, nè tranquillo, e mi mancava una di quelle esperienze, che decidono delle controversie fisiche, e che non lasciano luogo a dubbj ulteriori.

Un nuovo esame sopra quella Teoria mi portò poco a poco a vedere, che era possibile di fare una esperienza diretta, e decisiva. Supposi adunque sciolto il problema in quistione alla maniera degli Analisti, e cercai quali erano le conseguenze immediate, che derivano, e se vi era mezzo alcuno di confermare coll'esperienza le conseguenze dedotte, e legate intieramente co' loro principj.

Supposta vera l'ipotesi che da noi si combatte, l'aria pura nell'unirsi al flogisto dentro de' vasi diventa calore. Il calore è dunque una sostanza fatta di due principj, che sono l'aria pura, e il flogisto. La materia del calore passa attraverso di tutti i corpi anche i più compatti, e si diffonde, e comunica ai corpi esterni. Si sa che l'aria è grave, e se ne conosce il peso. Noi

non isbaglieremo gran fatto a supporre che un poll.cub. di aria comune è circa $\frac{1}{4}$ di grano, ma nel caso nostro non abbiamo punto bisogno di precisione, e prendendo ancora i dati più svantaggiosi vi è anche di troppo per l'applicazione, che ne facciamo. Il flogisto è corpo, e questo basta per crederlo pesante, benchè poi sia vero che se ne ignora il peso preciso, ma noi lo possiamo trascurare, e ci è affatto inutile. L'aria pura fatta calore col flogisto sorte dai vasi in cui si è formato il calore. La quantità della materia dovrà in quei casi diminuire dentro di essi vasi, e questa diminuzione sarà tanto più grande, quanto maggior quantità di aria è stata consumata per la formazione del calore.

Diversi metodi ho io immaginato per trovare con sicurezza, e facilità la materia perduta dentro de' recipienti; ma mi contenterò per ora di accennare un solo, che ho preferito agli altri. Avevo bisogno di gran bocce, o vasi, perchè il flogisto agisse sopra gran masse di aria, ma nel tempo medesimo cercavo di potere assicurarmi anche delle più piccole differenze di peso.

Per arrivare a soddisfare all'una, ed all'altra condizione ho fatto soffiare un gran numero di palloni di vetro sottili, e capaci dai 600 fino in 1000. poll. cub. di aria e più ancora. Queste palle finivano in un collo lungo quattro in cinque pollici, per il quale introducevo le diverse materie, di cui volevo servirmi, e chiudevo subito il collo ermeticamente. Allora pesavo ogni cosa colla più grande attenzione. I palloni anche dopo chiusi non arrivavano a pesar mai sei once, e la massima parte pesavano fra le tre once, e le cinque once, e si accostavano più alle prime, che alle seconde. La bilancia, di cui mi servivo, caricata dai palloni rompeva costantemente ad $\frac{1}{10}$ di grano.

Devo confessare con ingenuità, che nel fare queste esperienze sono stato più volte nel procinto d' ingan-

narmi, ed ho creduto per qualche tempo, che vi foſſe una vera perdita di materia fatta dai noſtri palloni. Diverſe ſono ſtate le materie, che io ho creduto di dover provare, e queſte erano tutte di natura combuſtibile, e capaci di ſchiudere il flogiſto, e di eccitare il calore. Mi ſon ſervito della polvere d' archibuſo, dell' eſca comune, del zolfo, del piroforo, e finalmente del fosforo di orina. Accendevo nelle palle la polvere, e l'eſca con una lente uſtoria; la polvere era acceſa a piccole maſſe, perchè il pallone non iſcoppiaſſe, che in diverſo modo ſuccede. Applicavo ai palloni, dove ſi trovava il zolfo, un lume acceſo, e ve lo laſciavo per 10 in 12 ore, finchè ſi foſſe tutto ſollevato in fiori di zolfo: ordinariamente mettevo una dramma di zolfo nei palloni e non più.

I palloni dove vi era il zolfo, ed il fosforo mi moſtrarono per più, e più volte una coſtante diminuzione di peſo, che arrivava fino a due grani, e più. Ma oltrechè la perdita in peſo non corriſpondeva punto alle diminuzioni dell' aria ſeguite nelle palle, era in contraddizione col peſo trovato negli altri palloni, ne' quali ſpeſſo ſi oſſervava anzi una vera aumentazione.

A proporzione, che andavo moltiplicando le mie eſperienze, e che uſavo delle nuove cautele, ed attenzioni trovavo che l' eſperienze ſi accordavano ſempre più fra di loro, e che tendevano a provare, che non vi era nè diminuzione, nè aumentazione di peſo. La temperatura eſterna dell'aria, ed il calore rendevano i miei riſultati ineguali; l' umidità, la polvere, il ſudiciume delle mani vi concorrevano anche eſſi ſenſibilmente. Nell' eſame rigoroſo delle circoſtanze diverſe, ed incoſtanti, che ſi meſcolavano nelle mie eſperienze, ho ſcoperto che il calore dei palloni medeſimi poteva alterarne il peſo ſenſibilmente, il che merita qualche rifleſſione.

Un giorno avevo meſſo circa 15 grani di eſca in un pallone pieno di aria comune, e chiuſo ermeticamente.

Il pallone per mezzo di un filo di seta era sospeso ad un braccio di bilancia, e pesava onc. 4 dan. 7 gr. $7\frac{1}{4}$: accesi l' esca nel pallone colla lente ustoria, ed osservai che il pallone perdeva sensibilmente del suo peso. Il pallone era caldo nel fondo, e freddo nell' alto. Ripetei l' esperimento sopra quattro altri palloni, e trovai nelle stesse circostanze di sopra, che il peso arrivava a scemare d' un grano, e più, ma che appena raffreddati i palloni ritornavano al peso di prima.

Questa diminuzione di peso nell' atto, che brucia l' aria nei palloni pare un fatto d' esperienza, e da non potersene dubitare nè anco; ma d' onde viene poi questa diminuzione? Una persona che si trovò presente ad alcune di queste esperienze mi fece riflettere, che si alzava dall' esca un vapore denso, torbido, il quale saliva con forza nelle parti più alte, e superiori del pallone. Credeva adunque che quei vapori o fumo diminuissero il peso nel pallone coi loro urti entro le pareti superiori, e per le vie, che si doveva aprire per l' aria. Non era molto difficile di rilevare l' insussistenza dell' una, e dell' altra ipotesi; ma volevo esaminare ogni cosa coll' esperienza alla mano, e volevo che i fatti medesimi servissero a trovar la vera causa di quella leggerezza.

Molte esperienze nuove io feci per questo fine, e trovai che a proporzione che il calore diminuiva dopo bruciata l' esca, la differenza in peso diventava minore, e che cresceva per l' opposto al crescer del calore. La qual cosa mi fece sospettare che il calore applicato anche esteriormente al palloni ne diminuisse sensibilmente il peso.

Presi adunque un pallone di vetro del diametro di poll. 10. e pieno di aria comune lo chiusi ermeticamente. Era once 4 dan. 5 gr. $2\frac{1}{2}$. Tenendolo sospeso ad un filo lo riscaldai coll' accostarlo ad un braciere di carbone acceso. Il calore era appena soffribile nel fondo, ma

ma non era ſenſibile nelle parti ſuperiori. Ripeſato lo trovai diminuito di due grani in punto. A proporzione che ſi raffreddava diventava più peſante per gradi, e ridotto alla temperatura di prima, e della ſtanza, ſi trovò che aveva acquiſtato il peſo di prima.

Queſto eſperimento fu da me ripetuto molte altre volte col medeſimo eſito. Volli anche oſſervare ſe ſeguiva l' iſteſſo riſcaldando i palloni nelle parti ſuperioſi verſo il collo, e non nel fondo, e ſe il medeſimo ſeguiva riſcaldato il pallone egualmente per tutto. I riſultati di tutte le mie eſperienze mi portano a creder vere proſſimamente le ſeguenti propoſizioni.

I.

Un pallone del peſo di circa quattro once, chiuſo ermeticamente, e pieno di aria comune, ſe dopo peſato bene ſi riſcalda forte nella parte oppoſta al collo a ſegno di non poterla toccare colla mano, ſi trova diminuita ſenſibilmente di peſo. Se ha 10 in 12 poll. di diametro, la diminuzione arriva ſino a due grani e più: ſi avverta che il calore non ſi laſcia ſalire ſino al collo della palla, il fondo della quale ſi riſcalda bruſcamente ſulle brace bene acceſe, quando ſi vuol far l'eſperienza. Dopo pochi minuti diventata fredda come prima ſi trova che è crefciuta dei due grani, che aveva perduto.

II.

Se ſi riſcalda la ſola parte ſuperiore del pallone dov' è il collo, ſi trova un poco diminuita, ma molto meno che nel primo caſo, e ſubito raffreddata ritorna al peſo di prima.

III.

Se ſi riſcalda egualmente per tutto il pallone ſopra, e ſopra ſi trova più diminuita, che al numero II, ma un poco meno che al numero I.

IV.

Le materie nell' atto di ardere dentro le palle chiuſe ermeticamente ſcemano di peſo, ma raffreddate ritornano al peſo di prima.

V.

Le diminuzioni di peſo nei palloni, in cui ſi è eccitato il calore, non deriva dai vapori, che ſi ſpargono nell' aria dai palloni.

VI.

I corpi riſcaldati dal calore poſſono apparir meno peſanti di prima.

VII.

Anderebbono ripetuti gli eſperimenti fatti dai Fiſici ſopra i corpi inſuocati a motivo d' aver negletto queſto elemento.

Finiſco coll' avvertire che avendo riſcaldato un pallone aperto nel collo, trovai che peſava 27 grani meno di prima. Era riſcaldato nel fondo, e non in alto. A proporzione che ſi raffreddava creſceva di peſo, e raffreddato del tutto ritornò a peſar come prima: ma qui la cauſa è troppo patente, perchè meriti che ſe ne parli.

Dopo di avere a poco a poco conosciuti, e corretti i piccoli errori, che io commettevo nel far le mie esperienze sul peso de' miei palloni, trovai che combinavano molto bene i risultati fra di loro, ma che non favorivano punto la nuova teoria Svezzese.

Credetti di dover continuare le mie esperienze, variandole ancora in modo che i risultati fosser più grandi e più pronti, onde ancora più sicuri. In alcuni palloni inimmai delle fettucce sottili di fosforo, e dopo chiusi ermeticamente accendevo col calore d'un carbone acceso il fosforo. Spesso si rompeva il pallone anche allora, che accendevo un solo pezzetto di fosforo per volta.

Ho trovato che l' esperienza riesciva con più di sicurezza, quando soffiavo del vento freddo contro quella parte del pallone, dove il fosforo bruciava. Il freddo ritarda, e diminuisce la fiamma del fosforo, e per questo le rotture sono meno frequenti. Qualche volta in meno di $\frac{1}{4}$ d' ora l' esperimento era finito, il pallone raffreddato e riposato. Due volte sole si è acceso ad un tratto il fosforo senza romperti il pallone, ed ho osservato che le pareti interne di esso erano gremite di una materia bianca lanuginosa finissima regolare.

In nessuna delle moltissime esperienze da me fatte bruciando il fosforo nei palloni ho trovato diminuzione di peso, come non ho mai trovato aumentazione di peso. Io le ho ripetute in diversi tempi, e luoghi procurando che il peso dell' aria, ed il calore fossero sempre i medesimi.

Se mi sono ingannato, bisogna ben dire che tutto è concorso per ingannarmi; ma frattanto mi si conceda di fissare come un Canone fisico dei più sicuri, che i corpi nelle circostanze da me esaminati non aumentano di peso, come non diminuiscono di peso.

Ho trovato che l' aria in alcuni palloni era diminuita di quasi il quarto, e questo quarto poteva salire

fino a 200 poll. cub., talchè avrei dovuto trovare più di 66 grani di diminuzione di peso, quando la bilancia non ne mostrava punto.

Un altro genere di esperienze ho voluto ancora intraprendere, le quali provano anche più direttamente la medesima verità. Consistono queste in mettere dentro i palloni una quantità di acido nitroso, ed una quantità di mercurio. I palloni erano fatti in modo, che verso la metà del collo vi era una gobba da una parte, o piccolo sacchetto di vetro chiuso esternamente, ed aperto internamente nel collo. Insinuavo prima di tutto l' acido nitroso per il collo senza che ne entrasse punto nel sacco, e subito dopo mettevo il mercurio nel sacco per mezzo di un tubo ricurvo facendolo entrare per il collo. L' acido nitroso era un poco fumante, ed in tal quantità da sciorre abbondantemente il mercurio. Chiuso il collo ermeticamente, lo pesavo alla bilancia, ed in tale situazione senza toccar più nulla facevo cadere il mercurio nel pallone. In pochi minuti era sciolto il mercurio e raffreddato il pallone, e allora alzavo la bilancia per vedere, se vi era variazione di peso. Questa esperienza riesce in meno di 6 minuti. Il pallone non è mai toccato esternamente, che quando s' inclina un poco per far cadere il mercurio full' acido nitroso, il che si fa con un cencio fine. La bilancia resta nella situazione di prima, onde non vi è nessuna circostanza che possa far sospettare di errore. Tutte le esperienze da me fatte con quest' ultimo metodo sono state uniformi; e mi hanno assicurato, che non vi è diminuzione alcuna di peso nei palloni, come non vi è aumentazione, e che non sorte dai palloni l' aria pura sotto forma di calore, nè altra sostanza qualunque suscettibile di peso. Io credo di potere avanzare questa verità, che mi pare importante assai, e che mancava alla Fisica moderna, ed alla Scienza delle arie. E' vero che è in contraddizione colla teoria dei

due valenti Chimici Svezzesi, ma è sempre un gran passo verso la verità di aver levato un ostacolo di mezzo, che poteva ritardare i progressi de' Fisici.

Sopra l' aria fissa esistente nell' atmosfera.

Avanti di esaminare con qualche dettaglio la presente quistione, io ho creduto, che conveniss prima di esaminare un' altra forse meno importante, ma che rende molto più facile la soluzione della prima. Questa seconda ha per oggetto di sapere, donde venga il residuo aeriforme, che si trova nell'aria fissa. I Fisici moderni, che hanno più lavorato intorno alle proprietà, ed alla teoria delle arie, trovano dopo il celebre D. *Priestley* che per quanta aria fissa si faccia assorbire dall' acqua, resta sempre un residuo di aria, che l'acqua non può assorbire, e che è affatto differente dall' aria fissa medesima, quando anche l' aria fissa, di cui si è fatto uso, sia della più pura, che si può ottenere coi metodi conosciuti fin ora. Si è creduto fin qui da tutti, che questo residuo di aria, che è aria comune, ma in parte alterata, e probabilmente dal flogisto, fosse naturalmente unita all' aria fissa, talchè non potesse trovarsi questa senza di quella. In quest' aria una candela può bensì arderci, ma per meno tempo, e men bene, che nell' aria comune: un animale ancora ci vive, ma per minor tempo, e non sì bene, che nell' aria comune, e l' aria nitrosa non la diminuisce che in parte, cioè meno dell' aria comune. Queste proprietà, come ognun vede, convengono coll'aria comune alterata in parte dal flogisto.

Ma d'onde venga questo residuo dell' aria fissa, e come si trovi egli unito a quell' aria, resta ancora da saperssi. Si crede comunemente che l' aria fissa non possa mai essere scompagnata da quell' aria comune, e che la prima aria non esista mai senza la seconda.

Supposta l'esistenza necessaria di una parte d'aria comune nell' aria fissa, si può domandare in qual maniera quell' aria è unita all' aria fissa, o in quale stato si trovi essa dentro l' aria fissa medesima. Una tale quistione è suscettibile di esperienze, e di esperienze dirette, talchè la soluzione pare che sia in mano del Fisico osservatore.

Si sa che l' aria nitrosa diminuisce l' aria comune, e tutte le arie respirabili. Se vi fosse dell' aria comune mescolata all' aria fissa, dovrebbe vedersi una diminuzione molto sensibile, quando si unisono insieme aria nitrosa, ed aria fissa; e questa diminuzione sarebbe in ragione della quantità, e qualità dell' aria comune. Si sa che l' aria fissa la più pura lascia dopo scossa nell' acqua circa $\frac{1}{40}$ del suo volume; onde se sarà introdotta una quantità un poco grande d' aria fissa dentro d' un tubo assai alto, e pieno di mercurio, la diminuzione potrà essere assai sensibile. Io posso però assicurare, che tutte le volte che ho operato sopra aria fissa assai pura, non ho mai potuto accorgermi di diminuzione alcuna, almeno non mi è mai paruta sensibile, e certa; ma avevo l'avvertenza di non ricever l'aria sull' acqua, ma sul mercurio, e di non ne ricevere che dopo che ne era escita una gran parte. Questo esperimento è molto difficile, ed esige grande attenzione dalla parte dell' osservatore, e grandi cautele.

Esclusa così l' ipotesi di semplice mescuglio di aria comune nell' aria fissa, resta da vedere d' onde viene quel residuo di aria, e come si trovi nell' aria fissa dopo sbattuta nell' acqua, o ricevuta sull' acqua. Un gran numero di esperienze mi hanno fatto vedere, che quel residuo di aria comune non è una quantità costante, benchè l' aria fissa si sia cavata dai medesimi corpi, e coi medesimi mezzi; ho trovato ancora, che è più, e meno flogisticata secondo le varie circostanze e maniere

di cavarla dai corpi. In generale mi è paruto di vedere che l' aria fissa, che resta molti giorni a contatto dell'acqua, lascia un residuo più grande di aria comune non buona. Tutte queste osservazioni potrebbero già cominciare a farci sospettare, che o tutto o parte di quel residuo d'aria si producesse nell'atto, che l' aria fissa viene assorbita dall'acqua, cioè che una parte d'aria fissa in que' casi prendesse la qualità d'aria comune men buona leggiermente flogisticata.

Tutte le mie esperienze fatte fin qui mi hanno fatto vedere, che quando l' aria fissa è diminuita di qualche sostanza, lascia una quantità più o meno grande di aria più e meno flogisticata, la quale diventa aria affatto simile al residuo ordinario dell'aria fissa, se si sbatte lungamente nell'acqua. Queste sostanze, che diminuiscono, o assorbono l'aria fissa, sono di quelle che abbondano naturalmente di flogisto. La scintilla elettrica medesima rende una parte dell' aria fissa inassorbibile alle acque, come l'ho provato più volte. Premesso tutto questo io rifletto, che quando si scuote nell' acqua l' aria fissa, l'aria fissa è diminuita per gradi da quel fluido, ed assorbita dall'acqua. L'acqua non è affatto priva di flogisto, e può flogisticar l' aria comune sbattuta in essa lungamente, e render men buona fino l'aria deflogisticata medesima. Deve adunque l'acqua flogisticare in parte l'aria fissa nell' atto di assorbirla; e siccome questa assorbizione si fa da noi in poco tempo, e l'acqua non ha che poco flogisto, non si flogisticherà che una piccola parte di aria fissa, come in fatti si osserva; e per questa istessa ragione si troverà una più gran quantità di aria fissa flogisticata quando si lascia assorbire dall'acqua lentamente, o quando si unisce ai processi flogistici immediatamente.

Vi è un'esperienza che par decisiva affatto. Ho fatto assorbire all'acqua una gran quantità d'aria fissa; ho precipitato la calce in terra calcarea colla medesima aria

fissa. Nè l'acqua, nè la terra calcarea avevano certamente assorbito il residuo naturale inassorbibile dell'aria fissa. Ho cavato dalla calce precipitata, e dall'acqua l'aria fissa, ed ho trovato il solito residuo d'aria inassorbibile comune men buona. Ho cavato l'aria fissa dall'acqua collo scuoterla appena un poco, l'ho cavata dalla terra calcarea coll'olio di vitriolo. Quando si volesse sospettare, che quell'aria era prima nell'acqua, sospetto poco ragionevole atteso il picciolo moto impresso nell'acqua nel cavarla, nulla si può opporre di questo all'esperienza della calce.

E' adunque un fatto d'esperienza, che non esiste necessariamente una porzione d'aria comune men buona coll'aria fissa, e che quell'aria non comincia ad esistere, che a proporzione che l'aria fissa è diminuita, e che le si unisce del flogisto.

Così risoluta questa quistione per quanto a noi pare, che a prima vista poteva sembrar più curiosa, che utile, si può ora dedurre da essa un corollario della più grande importanza: se quel residuo d'aria comune, che si ritrova nell'aria fissa non esisteva prima in essa, ma si è formato in seguito col semplice scuoterla nell'acqua, ne segue che l'aria fissa può diventare in parte aria comune, o aria respirabile.

Benchè il mezzo usato per operare questo maraviglioso cangiamento paja semplicemente meccanico, giacchè si può ottenere coll'acqua la più pura, o sia coll'acqua distillata, io sono però persuaso del contrario. Io credo che tutto questo si faccia per un principio puramente chimico, e che il flogisto solo operi tutti questi cangiamenti. Certo è che l'acqua distillata medesima può flogisticare le arie respirabili, onde potrà ancora dar del flogisto all'aria fissa medesima. Si vedrà in altro luogo come il flogisto possa render l'aria fissa inalterabile all'acqua, e come allora possa renderli aria comune respirabile.

Illustrata

Illuſtrata in queſta maniera la ſeconda quiſtione da noi propoſta, poſſiamo ora paſſare all' eſame della prima, che è ſopra l'aria fiſſa eſiſtente nell'atmoſfera.

Si crede dalla comune de' Fiſici d' oggidì, e dai più valenti Chimici, che nell'atmoſfera eſiſta una gran quantità d' aria fiſſa, e credono di provarlo col farci oſſervare, che moltiſſimi corpi ſi decompongono continuamente ſulla ſuperficie della terra tanto foſſili, che animali, e vegetabili, i quali ſon pieni di quel fluido aeriforme. Un' altra prova ſi adduce da eſſi, ed è che coi proceſſi flogiſtici ſi trova una gran quantità d'aria fiſſa nell'aria comune, a cui ſi ſono uniti, onde ſpiegano la produzione di quell' aria per una precipitazione chimica. Ma una prova di maggior forza cavano eſſi in favore delle loro ipoteſi dall'eſpoſizione nell'atmoſfera di ſali alcalini cauſtici, e dalla calce ſciolta nell' acqua; i primi criſtallizzano alla fine, la ſeconda cade in terra calcarea, e tanto i ſali, che la terra ſi trovano ricchiſſimi d'aria fiſſa. Io però ſon di parere, che le ragioni addotte di ſopra non baſtino per provare con tutta la ſicurezza l'eſiſtenza dell'aria fiſſa nell'atmoſfera. E' vero per riſpondere alla prima difficoltà, o prova, che ogni giorno ſi ſchiude dai corpi una gran quantità di quell'aria, ma è altresì vero, che infiniti corpi l'aſſorbono ad ogni iſtante. L'acqua, che cuopre forſe i due terzi del globo, è uno di queſti grandi agenti deſtinati ad aſſorbirla. Non volendo contare i fiumi, le fonti, le acque, ed i vapori cadenti ſulla terra, le piante ſteſſe ne aſſorbono continuamente, ſe ne danno continuamente, talchè non ſi prova da neſſun fatto ſicuro, che i corpi che l'aſſorbono non ſieno molto più di quelli che ne tramandano, e che non vi ſieno più principj e molto più attivi per aſſorbirla, che per iſchiuderla dai corpi.

Rifletto ancora, che l'aria fiſſa eſſendo molto più peſante dell'aria comune non può alzarſi, che pochiſſimo

dentro di essa, ma deve tenersi rasente il suolo. Una prova ne abbiamo nella grotta del Cane vicino a Napoli, dove l'aria fissa non si alza mai al di sopra di un piede, o poco più. L'istesso si osserva appresso a poco nei Tini dove fermenta la birra. L'aria a poca altezza e distanza dal Tino è pura, e saniſſima, e si respira senza incomodo alcuno: l'istesso si osserva nella grotta del Cane, e benchè sorta dalla terra un fonte perenne di quell'aria mefitica, non per questo si respira men bene l'aria di quella grotta, segno che non si mescola l'aria fissa coll'aria comune, e che in ogni istante ne viene assorbita quanta ne è tramandata. Io ho voluto esaminare col mio Evaerometro la bontà dell'aria vicino al suolo, e più lontana dal suolo, e non vi ho mai potuto scorgere differenza alcuna. Ho scosso quelle arie nell'acqua pura, e nella dissoluzione di calce, e non mi sono accorto, che differissero in nulla, nè che l'una fosse più diminuita dell'altra.

Una mia curiosità mi portò ad osservare la seguente esperienza. In uno stanzino versai circa 20000. poll. cub. d'aria fissa. Le finestre, e gli usci erano chiusi. Diedi moto all'aria della stanza con un drappo teso per 10. minuti, e dopo 30. altri minuti presi due bocce d'aria l'una all'altezza del suolo a 5. piedi, l'altra di mezzo piede. Scossi quest'aria nell'acqua, e non fu punto diminuita.

Apparisce adunque, che anche allora che si mescola una quantità molto notabile di aria fissa in una quantità limitata d'aria comune, poco dopo non si osservano più gli effetti, o le proprietà dell'aria fissa, segno che viene assorbita prestissimo dai corpi esterni.

Vi è un altro argomento contro la pretesa aria fissa natante nell'atmosfera, che par senza replica. Si scuota lungamente un pollice, o più di tintura di turnesole dentro di un gran recipiente pieno di aria comune della capacità di sette in ottocento pollici; il turnesole non can-

gerà per questo di colore. Si cambj l'aria comune per quante volte si vuole, e si scuota di nuovo, non per questo si cangerà in rosso il turnesole, che pure la più piccola quantità di aria fissa cangia nell'istante. Questa esperienza può portarsi sì in là volendo, che arrivi a dimostrare, che non vi è nè anco un millionetimo di aria fissa nell'aria comune, quantità, che si può trascurare nella presente ricerca, e che non ha nessun rapporto coi fatti rapportati di sopra dai Fisici.

Ma si dirà che forse l'aria fissa è unita all'aria comune in un modo particolare, e che allora non dimostra più le sue prime qualità. Se la prima opinione è comune a tutti i Fisici moderni, questa seconda lo è alla maggior parte dei Chimici, e dei Filosofi, e basterà nominare *Bergman*, e *Scheel* tra i Chimici per tutti gli altri, e *Priestley* tra i Filosofi. Nell'ipotesi di questi Filosofi il flogisto, che ha più affinità coll'aria comune, o respirabile, la lascia staccarsi da lei, e precipitare. Ma questo argomento suppone due cose non dimostrate ancora, l'una che l'aria fissa sia tale per decomposizione, l'altra che sia impossibile, che si formi l'aria fissa in quelle circostanze. Ma tutto questo non par molto verisimile se si considera che se si mette un poll. d'aria comune a contatto del mercurio, si trova il pollice d'aria fissa dopo qualunque tempo con tutte le sue qualità di prima.

L'esperienza mi ha dimostrato che l'acqua distillata se è esposta all'aria s'impregna di aria deflogisticata e non mai di aria fissa, eppure si sa che l'aria fissa ha più affinità coll'acqua dell'aria deflogisticata medesima.

Ma vi è un argomento, che par dimostrare che l'aria fissa, che si trova nell'aria comune, si produce allora, che noi la troviamo in quell'aria.

Le arie artificiali, che non sono state mai aria fissa, che non sono mai state aria comune, sbattute nell'acqua, e rese respirabili di nuovo, mostrano coi processi flogi-

ſtici l'aria fiſſa come prima; e ſe dopo di aver cavato l'aria fiſſa da eſſe ſi rendono reſpirabili di nuovo coll' acqua, danno della nuova aria fiſſa. L' iſteſſo ſi dica dell' aria comune ſpogliata la prima volta della ſua ſuppoſta aria fiſſa, ſe ſi renderà reſpirabile la ſeconda volta, darà nuova aria fiſſa, e così di ſeguito.

Qui ſi vede troppo chiaro che l'aria fiſſa non eſiſteva in quelle arie non mai compoſte di aria comune, e che nell' aria comune ſpogliata di eſſa la prima volta, ſi è formata di nuovo coi proceſſi flogiſtici. Qui non pare che ſi poſſa ricorrere a precipitazioni di arie fiſſe, giacchè ne' primi caſi non vi è mai ſtata tale compoſizione, e nell' ultimo caſo, ſe vi fu nel principio, fu poi levata in ſeguito.

Le coſe finora dette, ed oſſervate da noi ci ſomminiſtrano una riſpoſta contro la difficoltà de' ſali alcalini, che criſtallizzano all'aria aperta, ed alla calce, che ſi ſatura di aria fiſſa, che è l'argomento più forte che ſi poſſa addurre in favore di quella ipoteſi. Non trovo niente impoſſibile, che per il contatto continuato tanto de' ſali alcalini, quanto della calce coll' aria atmoſferica ſempre in moto, poſſa formarſi poco a poco dell' aria fiſſa, dove non ve n'era prima, e ſaturarſi quei corpi di eſſa. Si è veduto ſopra, quanto è facile il formar di quell' aria in mille circoſtanze. Non ſi prova poi che la calce ſia affatto priva di flogiſto, e il dotto Preſidente di Digione ha provato, che l'alcali cauſtico contiene beniſſimo di quel principio. L'iſteſſo ſi dica della terra ponderoſa, e della magneſia, che ſi ſaturano anche eſſe eſpoſte all'aria aperta. Non ſi ſaturano dell' aria fiſſa eſiſtente di prima nell' atmoſfera, ma bensì dell' aria fiſſa, che ſi forma in quelle circoſtanze per il lungo contatto di quelle materie ſciolte nell' acqua non mai priva affatto di flogiſto.

Se io non credeſſi di abuſarmi anche di troppo della voſtra compiacenza, potrei parlarvi di mille coſe impor-

tanti, che ho trovate nel ſecondo Tomo del voſtro Amico Illuſtre. Permettetemi almeno che io vi parli brevemente di alcune poche.

Il Sig. *Bergman* parlando dell' origine dell' aria fiſſa ſcrive: *modificationem acidi nitroſi credit Doct. Prieſtley, immo & nitroſam, & vitriolicam diverſas tantum variationes eſſe urget, nec refragabor, ſed fundamentum quo hae nituntur aſſertiones mihi valde lubricum videtur.* Confutate poi le ragioni del Filoſofo Ingleſe finiſce con dire " *alioquin non diffiteor mihi haud improbabilem eſſe conjecturare de ortu acidi aerei & nitroſi, uti mox fuſius explicabitur.* (a)

Se codeſto valente uomo aveſſe conoſciuto le mie eſperienze ſulla decompoſizione totale dell' acido nitroſo in aria fiſſa, in aria flogiſticata, ed in aria comune, avrebbe ſubito veduto, che quello che era un'ipoteſi appoggiata a fallaci principj in *Prieſtley*, ed una ſemplice congettura per lui medeſimo, era una verità di fatto. Queſte mie eſperienze ſull' acido nitroſo furono da me fatte a Parigi, e comunicate là ai due illuſtri Chimici i Sigg. *Darcet* e *Ruelle* fin d'allora, e dopo furono da me ripetute in Londra alla preſenza del mio Amico M. *Ingen-houſz*. I riſultati di eſſe ſi leggono ſtampati in Londra nel 1779. ed inſeriti nell'opera del mio Amico, che l'anno dopo egli ſteſſo traduſſe in franceſe col titolo di *Experiences ſur les vegetaux*, e pubblicò in Parigi. Se ne parla in queſta opera alla pag. 115., ma nulla vi ſi dice del metodo da me adoperato, nè delle quantità aſſolute, e relative dei prodotti, e delle arie da me ottenuti.

Io non conoſco neſſuno altro acido minerale, che ſi poſſa ridurre per intiero in ſemplice aria, benchè io poſ-

(a) Opuſc. Chem. & Phyſ. T. II. pag. 360.

ſa cavar delle arie da tutti gli altri acidi abbondantemente, e che una parte di eſſi ſieno ſtati da me decompoſti in arie. Gli acidi vegetabili, ed alcuni degli acidi animali, e foſſili analoghi ai vegetabili ſi decompongono anche eſſi in arie per intiero. Queſta importante verità ſomminiſtra un fortiſſimo argumento di induzione, che tutti gli acidi in ultima analiſi non ſieno che arie, o per meglio dire per fuggir qui qualunque diſputa e ipoteſi, dico che quegli acidi ſi preſentano ſotto forma di fluidi elaſtici aeriformi, o queſto ſegua per addizione, o per ſottrazione di qualunque ſoſtanza, non conoſcendo altra ſorta di trasformazioni ne' corpi. Tutto queſto io mi luſingo d' averlo provato in alcune Memorie ſtampate ſugli acidi vegetabili, ed animali nel Giornale dell' Ab. *Rozier*; ma è molto più ſorprendente, e nuovo affatto che ſi poſſa provare l' iſteſſo ſull' acido nitroſo, che è acido minerale.

Le mie eſperienze ſui vegetabili hanno fatto dire al celebre Traduttore di *Bergman* il Preſidente *Morveau*, che l' aria fiſſa è probabilmente l' acido univerſale tanto cercato dai Chimici antichi, e del paſſato ſecolo, e con sì poco ſucceſſo. Se egli aveſſe conoſciuto anche le altre mie eſperienze ſull'acido nitroſo, avrebbe potuto dare un grado molto maggiore di probabilità a quell' ipoteſi, la quale non ſarà mai portata a quel grado di evidenza, che ſi domanda nelle coſe Fiſiche, ſe non quando ſi ſarà provato, che tutti gli altri acidi ancora ſi decompongono per intiero in arie: diſſi per intiero, perchè la poca aria, che ſi cava de eſſi anche ora coi metodi già noti, non forma neſſuna prova, e rimane quell' opinione una ſemplice ipoteſi vaga e iſolata da qualſivoglia ragione. Le ſole mie eſperienze fatte ſopra tanti acidi creduti dai Chimici affatto diverſi fra di loro, ci ſomminiſtrano almeno una fortiſſima prova d' induzione, quando prima di eſſe non altro al più ſi poteva dire, ſe non che non era ancor dimoſtrato per impoſſibi-

le che l'aria fissa non potesse essere l'acido primitivo, l'acido universale, verità sterile, equivalente al nulla, e da sbandirsi dalla Fisica moderna.

Il desiderio di trattenermi con voi, e di parlare delle scoperte del vostro Amico Illustre mi rende più lungo di quello, che vorrei esserlo, onde passerò rapidamente ad un altro punto, che occupa da qualche tempo molti Filosofi esperimentatori, nelle di cui mani si è formato un ramo di nuova scienza in questi ultimi anni, che promette moltissimo, e fino de' vantaggi reali alla salute pubblica. Il Sig. *Bergman* alla pag. 369. della sua opera da noi citata parlando de' vegetabili si spiega così: *novimus vegetabilia in tenebris languescere, & colore spoliari, ita autem vitiata radiis solaribus exposita cito restituui. Scilicet lux constat materia caloris cum excessu flogisti. Hic excessus primus absorbetur, & dein sensim licet difficilius etiam illud inflamabile secernitur, quod materiam constituit caloris, nulla enim sine calore vegetatio, & hoc ipsum alterum principium, aer bonus laxatur. Itaque pro inæquali caloris gradu, pro varia vegetabilium positione respectu lucis & eorum diversa lucem coloremque decomponendi virtute, non possunt non dissimiles oriri effectus. Immo aqua ipsa, quae purissima videtur, subtilissima non raro fovet corpora organica, visum fugentia, quae in luce solari constituta eamdem vegetando decomponunt & bonum provocant aerem.*

Io ho voluto portare per esteso tutto quel passo, perchè contiene una nuova spiegazione sopra le diverse arie, che si ottengono esponendo i vegetabili alla luce, ed all' ombra. Intorno ai fatti principali che si osservano nelle piante esposte al sole, e all'ombra, io mi riporto intieramente alle belle, ed originali esperienze dell' illustre mio Amico, e Filosofo M. *Ingen-houſz*, per cui deve aver meritato giustamente la stima dei veri Fisici.

Ho voluto anche io sperimentar le mie forze sopra di questa materia sì vasta, e che ha fatto de' progressi sì rapidi in pochi anni; e credo di essere ben fondato dopo un' infinità d' esperienze da me fatte, e variate in mille maniere sopra più di 700 piante, a considerar questa materia, come ancor nuova; e credo di potere assicurare che l' esperienze riportate in generale fin qui dai diversi Scrittori sono ancora in troppo picciol numero, non abbastanza variate, e limitate a troppo poche piante, perchè non sieno sospette, o false le conseguenze, che se ne sono dedotte, e le teorie, che si è voluto immaginare per ispiegarle.

I risultati di alcune di queste mie esperienze sono stati comunicati qui a diversi miei Amici fino da due anni fa, e molte di esse esperienze ho io fatto vedere a più persone, che mi onoravano in casa della loro presenza. Basta che qui vi dica, che cangiata una sola circostanza nelle esperienze delle piante esposte al sole, circostanza, che le accosta ancora di più al loro stato naturale, tutto si vede cangiato, e l'aria, che doveva essere deflogisticata e sana, si trova per contrario micidiale, e mefitica. Non vi dico di più perchè spero fra poco di pubblicar le mie Esperienze in tutto il loro dettaglio. Da questo voi vedete che quel che si è pubblicato finora sopra questa materia è falso nella sua generalità, o per meglio dire non è vero che in qualche caso o accidente, o circostanza che si voglia dire, ed anche questi fatti sì limitati non sono i più naturali alle piante, che finisce di rovinare ogni cosa. Per riguardo al dettaglio delle esperienze fatte sulle piante, ed esposte al sole ed all' ombra, si deve consultare come dissi l'eccellente Opera sopra citata di M. *Ingen-housz*.

Finisco coll' assicurarvi che quei corpi organici, di cui parla il Sig. *Bergman*, e che si trovano nell' acqua dando dell' aria pura esposti al sole, sono spesso semplici animali, e non piante, come si è creduto finora da tutti.

tutti. Questi animali sono di due specie diverse, l'una è formata di minimi animali rotondi quasi sempre in moto; l'altra è fatta di animali oviformi e quasi fatti a baccelli con poco moto, ma molto più grandi de' primi. Spesso si trovano le due specie insieme nella stessa acqua, e qualche volta si trova la prima specie sola. La specie globulare è la medesima, che si trova nelle acque stagnanti, per cui quelle acque appariscono nella superficie verdi, e aranciate. Gli osservatori microscopici le han credute piantine minime: ma sono più di dieci anni, che mi sono assicurato, che quel colore non dipende da sostanze vegetabili, ma da piccoli animali, e che i Bottanici, e gli osservatori si sono ingannati.

E' per altro vero, che si trova più spesso nelle acque esposte al sole, oltre quelle due specie di animali di cui si è parlato, qualche altra pianta minima microscopica, come per esempio la Tremella ecc. ma voi sapete, che la Tremella è un corpo organizzato dotato di vita, e di sentimento, come vi feci osservare fin da quando passaste per Firenze nel vostro viaggio d' Italia, e come l' avrete letto nelle mie opere.

Ma quando ancora non si volesse considerare la Tremella come un animale-pianta da chi non sa osservare da sè, non si può dubitare un momento della natura animale delle altre due qualità di corpi; ed ecco che ci siamo aperti la via ad un bellissimo fenomeno, e nuovo, ed inaspettato, ed è che vi sono degli animali, che esposti al sole nell' acqua danno aria deflogisticata, come la danno le piante le più atte a produrre quell' aria. Tutti gli animali fin qui conosciuti, e comunque esposti al sole, ed all'aria, non danno che aria micidiale, e mefitica.

Non è adunque il solo regno vegetabile destinato a purificar l' aria atmosferica, ma vi sono ancora degli animali, che fanno l' istesso, benchè poi sia vero come

ſi vedrà dalle mie *eſperienze ſui vegetabili*, che va limitata anche la prima propoſizione contro tutto quello, che ſi è creduto finora dai Fiſici oſſervatori; che anzi farebbe tutto l'oppoſto, e le piante in generale nel loro ſtato naturale, o almeno in uno ſtato più vicino al naturale di quello, che fin qui ſi è praticato dagli altri, come io mi luſingo di aver fatto, danno aria meſitica, micidiale, benchè eſpoſti al ſole. Si devon bensì eccettuare le piante craſſe o ſucculenti, che danno aria deflogiſticata anche in quelle circoſtanze medeſime, in cui le altre la danno meſitica. Io credo di eſſermi ſpiegato abbaſtanza per far capire, che le mie eſperienze portano non ſolo a diſtruggere i fatti e le teorie immaginate fin qui ſopra queſta importantiſſima materia, ma che vanno a formare un nuvo ramo di Scienza ignoto ancora ai Fiſici, e non da alcuno previſto ancora.

DELL' IRREDUCIBILITA'

DELLA FORMULA CARDANICA A FORMA FINITA, ALGEBRAICA, E LIBERA DA ASPETTO IMMAGINARIO.

Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Direttore delle Scuole Militari di Verona.

INTRODUZIONE.

E' palese oggimai in che consista il nodo famoso dell' equazioni cubiche nell' Algebra Cartesiana. Le equazioni di terzo grado, siccome è noto, sono reducibili tutte alla forma seguente

$$(A)\ldots x^3 - px - q = 0$$

in cui p e q sono quantità razionali. Si tratta di determinare i tre valori di x in p e q, quando tutti e tre esser debbono reali e diseguali, e nessun divisore esatto dell' ultimo termine q soddisfa' all' equazione; il che vuol dire, che tutti e tre que' valori debbono anche essere irrazionali. *Scipion Ferri* Italiano fu il primo che ci desse la risoluzione generale dell' equazione (A) sotto questa forma

$$(B)\ldots x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

la quale poi assunta e divulgata da *Cardano* prese il nome di formula Cardanica. Ma quando tutti e tre i valori di x debbono essere reali e diseguali, si dimostra che $p^3 : 27$ è maggiore di $q^2 : 4$. Dunque nel caso delle tre radici reali e diseguali, la quantità sotto il segno radicale quadratico $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ diventa necessa-

riamente negativa. E come, atteſe le nozioni convenute circa i ſegni affermativi e negativi dell' Algebra, è impoſſibile la radice d' indice pari di quantità negativa, che perciò vien detta quantità immaginaria; così nel caſo delle tre radici reali e diſeguali la formula Cardanica involge ſotto ciaſcheduno de' radicali cubici una quantità immaginaria. Faremo vedere a ſuo luogo, che qualunque volta l' equazione (*A*) abbia radice razionale, caſo in cui queſta medeſima radice è pur diviſore eſatto dell' ultimo termine *q*, anche la formula Cardanica (*B*) ſi ſpoglia non ſolamente dell' aſpetto irrazionale, ma degl' immaginarj eziandio, che ſvaniſcono per contrarietà di ſegni, e ci riſulta il valore razionale, o la radice razionale dell' equazione. E così pure accade, ſe tutte tre le radici reali aveſſero da eſſere razionali, ſomminiſtrandole tutte ad una ad una la formula (*B*). Di modo che non una ſola, ma tutte tre le radici reali dell' equazione ſono rappreſentate puntualmente e compreſe nella formula Cardanica, ſiccome il volle dimoſtrare il Sig. d' *Alembert* direttamente (*Opuſ. Mat. T. V. Parte* 1. *pag.* 204), e può non difficilmente dimoſtrarſi. Ma allorchè non ha l' ultimo termine *q* alcun diviſore eſatto, che ſoddisfaccia all' equazione, non ſi è ſcoperto ancora alcun metodo, con cui ſi ricavino i tre valori, bensì irrazionali, come debbono eſſere, ma liberi da immaginarj. L' eſpreſſione di queſti valori per ſerie, e con un' infinità di termini, come che continuamente decreſcenti e reali, non fa al caſo; come non lo fa neppure l' eſpreſſione per ſeni, e coſeni di natura traſcendente, per quello che ſi ricercano valori finiti, com' è l' eſpreſſione Cardanica, valori algebraici, e valori in queſto ſolo da' Cardanici differenti, che ſieno liberi da aſpetto immaginario. Ancorchè ſi dimoſtri incontraſtabilmente eſſere di valor reale l' intera eſpreſſione Cardanica, cioè eſſere reale la quantità

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

che esprime la radice dell' equazione, ad ogni modo il non essersi giammai potuto esprimere alcuna delle radici dell' equazione (A), nel caso, che tutte e tre esser debbano reali, diseguali, e non razionali, e p q sieno razionali, sotto altra forma ugualmente finita, ed algebraica, ma fuor d' aspetto immaginario, ha fatto, che siasi sempre questo caso denominato irreducibile. Trattandosi pertanto di rintracciare una dimostrazione assoluta di questa irreducibilità, non basta il dimostrare, che nel caso proposto non è possibile di risolvere per alcun metodo cognito l'equazione (A), e di trovare una radice sotto le condizioni enunciate, perchè non resta mai esclusa la possibilità di farlo per metodi, che non sono ancor noti: nè rigorosamente basta, per una simile ragione, il dimostrare, che maneggiando e svolgendo l' equazione (A) per qualunque metodo conosciuto, l'ultimo risultamento sia sempre o l' espressione Cardanica (B), o altra simile, contenente sempre quantità immaginarie. Il modo incontrastabile di provare l' assoluta irreducibilità del caso in quistione è quello di dimostrare direttamente, ch' è assolutamente e per natura sua impossibile il ridurre l'espressione Cardanica a forma finita algebraica, e libera da aspetto immaginario. Siccome è fuor di dubbio, che quantunque ogni termine del Binomio sia in sè quantità assolutamente immaginaria, ciò non ostante la combinazione di tutti e due costituisce una quantità assolutamente reale, ed esprime sicuramente la radice reale dell' equazione; così sì fatta dimostrazione dell' assoluta irreducibilità di quel caso serve nel tempo stesso ad escludere necessariamente la possibilità di risolvere per alcun immaginabile cognito od incognito metodo l' equazione cubica nel caso in quistione, e di assegnarvi la radice finita, algebraica, ed immune

da immaginarj : altrimenti la radice Cardanica ſarebbe reducibile a forma finita, algebraica, ed eſente da immaginarj , contro la dimoſtrazione . Ed ecco come il tentare una dimoſtrazione dell'irreducibilità aſſoluta del Binomio Cardanico, dipendente dalla natura de' termini ſteſſi del Binomio, tende direttamente, e neceſſariamente a troncare ogni ulteriore perquiſizione ſu queſto propoſito. La ſtrada, che ho battuto in queſta breve Memoria per rinvenirla, può non ſenza fondamento giudicarſi più diretta dell'altra, che ho preſo in uno ſcritto pubblicato nel 1776., che ha per titolo *de Caſu irreducibili tertii gradus* ecc. *Exercitatio Analytica*. Giudicheranno i Geometri, ſe vi ſia riuſcito, e ſe ſia impoſto fine alla quiſtione.

DEFINIZIONI.

§. I. Irrazionale del grado n è quello, in cui neſſuna quantità moltiplicata $n-1$ volte per sè ſteſſa può produrre la quantità ſotto il vincolo radicale. Le quantità pertanto $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P+\mathfrak{Q})}$, $\sqrt[n]{(P+\mathfrak{Q}+R)}$ ecc. ſaranno tutte irrazionali del grado n, toſto che non v' abbia alcuna quantità, la quale moltiplicata $n-1$ volte per ſe ſteſſa, poſſa produrre le grandezze P, $P+\mathfrak{Q}$, $P+\mathfrak{Q}+R$ ecc. qualunque coſa ſia P, $\mathfrak{Q}$, R ecc.

II.

Irrazionale ſemplice è quello, che non è unito a quantità razionale, come $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P+\mathfrak{Q})}$ ecc. qualunque coſa ſieno, e in qual numero ſi vuole le quantità ſotto il vincolo radicale. In conſeguenza irrazionale miſto ſarà quello, ch'è accoppiato a quantità razionali, come $A+\sqrt[n]{P}$, $A+\sqrt[n]{(P+\mathfrak{Q})}$ ecc. A eſſendo qualunque quantità o compleſſo di quantità razionali.

III.

$\sqrt[n]{P}+\sqrt[m]{(P+\mathfrak{Q})}$ ecc. è un irrazionale binomio ecc. tosto che li termini $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[m]{(P+\mathfrak{Q})}$ ecc. sono irrazionali semplici, e però vi avrà irrazionale polinomio semplice, e misto, secondo che o non vi avrà, o vi avrà quantità razionale accoppiata al polinomio irrazionale.

IV.

Irrazionale immaginario è quello, in cui la quantità sotto il vincolo è negativa, e l' indice n dell' irrazionalità è pari.

V.

Immaginario semplice è quello, che non è unito a quantità reale, razionale, o irrazionale, ch' ella sia, come $\sqrt[2n]{-P}$, $\sqrt[2n]{(-P-\mathfrak{Q})}$ ecc. come pure $\sqrt[n]{\sqrt{-P}}$, che si riduce a $\sqrt[2n]{-P}$; e immaginario misto quello, in cui l' immaginario semplice è unito a quantità reale, come $A+\sqrt[2n]{-P}$, essendo A razionale, o irrazionale reale.

VI.

Immaginario composto può dirsi quello, in cui un immaginario misto è sotto vincolo radicale. Negl' irrazionali reali ognuno de' $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P+\mathfrak{Q})}$ ecc. è sem-

plice in sè. Ma negl' immaginarj non può confonderſi $\sqrt[n]{(A+\sqrt{-P})}$ con $\sqrt[n]{\sqrt{-P}}$, eſſendo A reale. Per diſtinguere dunque $\sqrt[n]{(A+\sqrt{-P})}$ dagl' immaginarj ſemplici e da' miſti, il diremo compoſto.

COROLLARJ.

I.

§. II. Non ſarà pertanto $\sqrt{(5+2\sqrt{6})}$ un irrazionale di ſecondo grado, poichè il binomio $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ moltiplicato una volta per sè produce la quantità ſotto il vincolo $5+2\sqrt{6}$ (*Def. I*), e così per qualunque altro grado.

II.

Se dunque la quantità compreſa ſotto il vincolo o ſegno dell' irrazionalità ſarà razionale, è manifeſto, che non vi avrà razionale dal di cui prodotto poſſa ella riſultare giammai.

III.

E ſimilmente ſe la grandezza ſotto il ſegno ſarà comunque compoſta di razionale, ed irrazionale dello ſteſſo, o d' altro grado, non vi avrà nè razionale, nè irrazionale, nè miſto di razionale ed irrazionale, che moltiplicato in sè $n-1$ volte poſſa produrla giammai.

IV.

La ſomma in conſeguenza, e la differenza di due o più irrazionali ſemplici, cioè un polinomio irrazionale ſemplice, ſarà ſempre quantità irrazionale.

V.

V.

E parimenti la ſomma, e la differenza di due o più irrazionali immaginarj ſemplici, ſarà ſempre un immaginario. Ma la ſomma, o la differenza di due, quattro ecc., o di tal numero pari d' irrazionali immaginarj compoſti che ſi vuole (*§. I Def. VI*) potrà eſſere quantità reale.

VI.

E non vi avrà mai altra quantità finita, che poſſa equivalere ad una quantità irrazionale ſemplice o miſta, reale o immaginaria, ſuorchè ella ſteſſa, che è quanto dire una quantità a sè identicamente uguale. Tutte le infinite forme, che può ella prendere, non ſono in fondo, che grandezze indenticamente uguali all' irrazionale trasformato; il che conſegue neceſſariamente dalla natura medeſima dell' irrazionalità.

SCOLIO.

§. III. Con queſte nozioni elementari ſotto gli occhi è difficile il prender errore al caſo, ch' è frequente, di ſupporre ne' calcoli tale o tal altra quantità come irrazionale, e nel trar conſeguenze dal paragone di quantità irrazionali sì reali, che immaginarie tra di sè, o con altre razionali, od irrazionali. E ſiccome il caſo in quiſtione non è, che un caſo particolare delle equazioni del terzo grado legato intimamente colla loro generale riſoluzione; così, dovendo trattarſi di quello, non è poſſibile di ſtaccarlo talmente dal tutto, che non convenga abbracciare ad un tempo la teoria generale. Ho premeſſo pertanto queſte poche nozioni ſugl' irrazionali a ſcanſamento d' ogni quiſtione di nome, e per

appianare nell' equazioni di terzo grado, risolubili tutte generalmente col metodo Cardanico, le difficoltà, che a' principianti singolarmente possono occorrere nel maneggio degl' irrazionali, e sviluppamento de' razionali apparenti sotto forme irrazionali.

PROPOSIZIONE I.

§. IV. *Se il Binomio* $A+\sqrt{B}$, *in cui* A, B *sono quantità razionali, e* $\sqrt{B}$ *è un irrazionale semplice quadratico, abbia radice cubica, ella dee almeno constare di due termini.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, se può la radice cubica di $A+\sqrt{B}$ constare di un solo termine z, razionale od irrazionale semplice, dovrà essere, elevando al cubo, $z^3=A+\sqrt{B}$. Se z^3 è razionale, dovrà essere $\sqrt{B}=z^3-A$ quantità razionale, contro il supposto. E se z^3 è irrazionale semplice, dovrà essere $z^3-\sqrt{B}=A$, quantità razionale che non può essere. Non potendo dunque la radice cubica di $A+\sqrt{B}$ constare di un solo termine nè razionale, nè irrazionale semplice, è manifesto, che ella dee essere composta almeno di due termini. Il che ecc.

PROPOSIZIONE II.

§. V. *Se* B *fosse razionale negativo, cioè* $\sqrt{B}$ *un immaginario semplice, la radice cubica dell' irrazionale misto* $A+\sqrt{B}$ *sarà anch' essa almeno binomia necessariamente.*

DIMOSTRAZIONE.

Se ella potesse constare di un sol termine z, dovrebbe, come precedentemente, aver luogo l' equazione z^3

$= A + \sqrt{B}$. La quantità z^3 non può essere razionale, perchè $\sqrt{B}$, come irrazionale, non può mai essere identicamente uguale a quantità razionale, nè come immaginario uguagliare una quantità reale. Ma non può nè pure essere z^3 irrazionale semplice, nè reale, nè immaginario, mentre dovendo sussistere l' equazione $z^3 - \sqrt{B} = A$, dovrebbe nel primo caso essere la differenza di due irrazionali semplici uguale a quantità razionale (*§. II Coroll. IV*), e un immaginario a quantità reale; e nel secondo essere una quantità razionale e reale uguale alla differenza di due immaginarj semplici. Se dunque non può essere monomia la radice cubica di $A + \sqrt{B}$, ella dovrà almeno constare di due termini, posto che $A + \sqrt{B}$ sia un cubo perfetto. Il che ecc.

PROPOSIZIONE III.

§. VI. *Dovendo essere almeno binomia la radice cubica di* $A + \sqrt{\pm B}$, *se sia ella estraibile, li termini della radice o saranno entrambi irrazionali, o razionale l' uno, e l' altro irrazionale.*

La Proposizione è per sè evidente.

PROPOSIZIONE IV.

§. VII. *Se si abbia una quantità, considerata linearе, composta di due parti* A, B, *qualunque esse si sieno; e abbiavi un quadrato* C^2 *uguale alla somma del quadrato* A^2 *e del triplo quadrato* B^2; *ed un altro quadrato* D^2 *uguale alla somma del quadrato* B^2, *e del triplo quadrato* A^2; *il cubo di quella quantità* $A + B$ *è sempre uguale a due solidi, uno de' quali ha per base il quadrato* C^2, *e per altezza la parte* A, *e l' altro ha per base il quadrato* D^2, *e per altezza l' altra parte* B.

Ciò è manifesto dalla genesi istessa de' cubi, e non ha bisogno di dimostrazione.

COROLLARIO I.

§. VIII. Essendo pertanto $(A+B)^3=AC^2+BD^2$, si rende pure manifesto, che qualunque cosa sia A e B, essendo considerate grandezze lineari, il cubo di $A+B$ è sempre composto di due solidi d' ognuno de' quali è dimensione, o parte aliquota una delle due quantità A B.

II.

Se una delle due parti B sia un irrazionale quadratico semplice $\sqrt{K}$, qualunque cosa sia K sotto il vincolo radicale, purchè $\sqrt{K}$ sia irrazionale, essendo $(A+\sqrt{K})^3=AC^2+D^2\sqrt{K}$; e C^2 essendo la somma del quadrato A^2 e del triplo quadrato di $\sqrt{K}$, il solido AC^2 sarà libero dal vincolo radicale quadratico, qualunque cosa poi sia K, riferendosi l' irrazionalità del secondo termine a questo vincolo, per rispetto al quale $\sqrt{K}$ si considera lineare, e il solo solido $D^2\sqrt{K}$ ne resterà affetto necessariamente.

III.

E' impossibile in conseguenza, che il binomio $AC^2+D^2\sqrt{K}$ abbia altra radice cubica fuorchè $A+\sqrt{K}$, essendo $C^2=A^2+3K$, $D^2=K+3A^2$ (*Prop. IV*).

IV.

Ma è parimente impossibile, che $A+\sqrt{K}$ sia radice cubica d' altro binomio $M+\sqrt{N}$, che non sia reducibile a questa forma $AC^2+D^2\sqrt{K}$, come è manifesto.

PROPOSIZIONE V.

§. IX. *Perchè il binomio* $M+\sqrt{N}$, *essendo* M N *quantità razionali, possa avere per radice cubica il binomio* $a+\sqrt{b}$, *essendo* a b *quantità reali,* $\sqrt{b}$ *un irrazionale quadratico semplice, bisogna che sia* a *divisore esatto di* M, *e* b *divisore esatto di* N.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè non può $a+\sqrt{b}$ essere radice cubica di binomio, che non sia reducibile alla forma $aC^2+D^2\sqrt{b}$, essendo $C^2=a^2+3b$, $D^2=b+3a^2$ (§. *VIII Coroll. IV*). Perchè dunque $a+\sqrt{b}$ sia radice cubica del binomio $M+\sqrt{N}$, bisogna ch' esso sia di quella forma, o a quella forma reducibile. Ma essendo M N quantità razionali, $\sqrt{N}$ un irrazionale quadratico semplice, se $M+\sqrt{N}$ non è attualmente di quella forma, non ammette per natura sua di esservi ridotto (§. *II Coroll. VI*). In conseguenza perchè questo binomio possa avere $a+\sqrt{b}$ per radice cubica, bisogna che sia attualmente $M=aC^2$ (§. *VIII Coroll. II*), $\sqrt{N}=D^2\sqrt{b}$. Ma a è una dimensione, o divisore esatto di aC^2, b lo è di bD^4. Bisogna dunque che a sia divisore esatto di M, b divisore esatto di N, come s' aveva da dimostrare.

SCOLIO.

§. X. Se sia $A+\sqrt{B}$ radice del grado n del binomio $M+\sqrt{N}$, suole comunemente assumersi $A-\sqrt{B}$, come radice del grado n di $M-\sqrt{N}$. Ma questa posizione non è giusta, se non se nel caso, che A, B, M, N abbiano una certa relazione tra di sè, fuori del quale la conclusione è falsa. Avendo pertanto da farne uso nel decorso di questa Memoria, non è fuor di pro-

posito il prendere in esame accurato quest' articolo, mettendo in chiaro la connessione vera tra le radici de' Binomj $M+\sqrt{N}$, $M-\sqrt{N}$, e la condizione, senza di cui, se sia $A+\sqrt{B}$ la radice $n.^{ima}$ del primo, non può essere $A-\sqrt{B}$ radice $n.^{ima}$ del secondo. Mi sarebbe forse sembrato superfluo il farlo, se non trovassi nel XIII. Vol. *de' vecchj Comment. di S. Pietroburgo* alla pag. 17., enunciata la cosa in modo, che può indurre in errore agevolmente.

Sia $z+y$ la radice quadrata, per esempio, del binomio $A+\sqrt{B}$. E' certo che dee necessariamente aver luogo quest' equazione.

$$(P)\ldots. A+\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2$$

Sin che si sta in questa generalità, z ed y sono indeterminate, e possono essere quel che si vuole, purchè si soddisfaccia all' equazione (P). E se si aggiunga negativamente da una parte e dall' altra l' irrazionale semplice $2\sqrt{B}$, risulta l' equazione.

$$(\mathbb{Q})\ldots. A-\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2-2\sqrt{B}$$

equazione necessaria al par della prima, e che lascia le z, y nella stessa indeterminazione. Soddisfacendo all' equazione (P), qualunque cosa risulti per z ed y, nell' atto che si conseguisce la radice di $A+\sqrt{B}$, è data pure dall' equazione $(\mathbb{Q})$ la radice di $A-\sqrt{B}$. Questa è la vera ed unica connessione necessaria tra le radici di questi due binomj, sì che essendo $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+y$, non lascia pure di essere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=\sqrt{((z+y)^2-2\sqrt{B})}$. Ma se si traggano dall' equazione (P) diverse paja di equazioni (I), (II), (III) ecc.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{B}=2zy+y^2\\ A=z^2\end{array}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{array}{l}A=z^2+2zy\\ \sqrt{B}=y^2\end{array}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{array}{l}A=z^2+y^2\\ \sqrt{B}=2zy\end{array}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{III})$$

ecc.

combinando a piacere i termini dell'equazione, non ha dubbio, che a qualunque di queſte combinazioni (I), (II) ecc. ſi ſoddisfaccia ſeparatamente, ſi è ad un tempo ſoddisfatto all' equazione (*P*). Se dunque ſia *M* il valor di *z*, *N* quel d'*y* della combinazione (I); *M'* il valor di *z*, *N'* quel d'*y* della combinazione (II) ecc.; poichè debbe ſempre eſſere $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+y$, ſarà neceſſariamente $M+N=M'+N'=M''+N''$ ecc. Ora ſi finga eſſere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=z-y$. Sarà $A-\sqrt{B}=z^2-2zy+y^2$, ed eſſendo $A+\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2$, ſe ſi ſommino, e ſi ſottraggano ſucceſſivamente queſte due equazioni, ſi ha

$$A=z^2+y^2$$
$$\sqrt{B}=2zy$$

che è appunto la combinazione (III). Queſta è la combinazione, che determina i valori di *z* ed *y*, ſicchè, eſſendo $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+y$, viene pure ad eſſere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=z-y$. Ma il ſupporre, che debba riſultare lo ſteſſo in qualunque delle rimanenti combinazioni, è lo ſteſſo che ſupporre, che, come diviſa una linea in due parti qualunque *M N*, poi in altre due *M'*, *N'*, e così ſucceſſivamente, è ſempre $M+N=M'+N'=M''+N''$ ecc., debba anche eſſere neceſſariamente $M-N=M'-N'=M''-N''$ ecc. che non può eſſere „ *Inter utramque formam* (così ſi eſprime l' illuſtre Sig. *Eulero* nel luogo ſopraccitato) *tam arctus intercedit nexus, ut inventa alterius formæ radice cujuſvis gradus, ex ea ſimul radix alterius formæ facillime formari queat* „. In fatti eſſendo $\sqrt[n]{(A+B)}=M+N$, ſarà $\sqrt[n]{(A-B)}=\sqrt[n]{((M+N)^n-2B)}$, come abbiamo indicato precedentemente, ma non per quello che vi ſi adduce in ſeguito „ *Si enim radix cujuſcumque poteſtatis ex binomio* A+B *fuerit* x+y, *tum reſpondentis reſidui* A−B *radix ejuſdem poteſtatis erit* x−y „.

Pigliamone un eſempio facile

Sia $\sqrt{(A+B)}=z+y$; farà $A+\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2$, ed assunta a piacere una combinazione, pongo $A=2zy$, $\sqrt{B}=z^2+y^2$. Sostituendo nella seconda equazione il valore di z tratto dalla prima, si avrà l' equazione $y^4-y^2\sqrt{B}+\frac{A^2}{4}=0$, la quale somministra $y=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{B}+\sqrt{(B-A^2)}}{2}\right)}=\mathfrak{Q}$, e però $z=\frac{A}{2\mathfrak{Q}}$, e $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=\frac{A}{2\mathfrak{Q}}+\mathfrak{Q}$. Ma essendo $A+\sqrt{B}=(z+y)^2$, e però necessariamente $A-\sqrt{B}=(z+y)^2-2\sqrt{B}$, perchè possa essere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}$ uguale a $z-y$, dovrà essere $(z+y)^2-2\sqrt{B}=(z-y)^2$, cioè $2zy=\sqrt{B}$. Ma $\sqrt{B}=z^2+y^2$: bisognerebbe dunque che avesse luogo l'equazione $2zy=z^2+y^2$, cioè che fosse $A=\sqrt{B}$, $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=\sqrt{4B}$, e $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=0$

Non è dunque lecito di conchiudere, dall' essere $\sqrt[n]{(A+B)}=z+y$, che sia pure $\sqrt[n]{(A-B)}=z-y$, se non abbiano luogo le due equazioni

$$A=z^n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^{n-2}y^2+\frac{n....(n-3)}{1\cdot 2\ldots 4}z^{n-4}y^4+\text{ecc.}$$

$$B=\frac{n}{1}z^{n-1}y+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^{n-3}y^3+\frac{n...(n-4)}{1.2....5}z^{n-5}y^5+\text{eec.}$$

cioè se non si determinino da queste relazioni i valori di z ed y. Ed è poi manifesto che a questa condizione è sempre legittima l' assunzione, come s' è detto da principio.

PROPOSIZIONE VI.

§. XI. *Se l' equazione* (Δ)

(Δ).... $64z^9-48Az^6+(27B-15A^2)z^3-A^3=0$

ammetta per z *un valore razionale, il binomio* $A\pm\sqrt{B}$, *essendo*

essendo A, B *razionali*, $\sqrt{B}$ *irrazionale semplice, avrà radice cubica binomia composta di razionale, ed irrazionale semplice di questa forma* $M \pm \sqrt{N}$.

DIMOSTRAZIONE.

Suppongasi che sia $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})} = z+\sqrt{y}$. Innalzando al cubo, dovrà essere $A+\sqrt{B} = z^3+3zy+(3z^2+y)\sqrt{y}$; e perchè risulti $\sqrt[3]{(A-\sqrt{B})} = z-\sqrt{y}$, assumiamo la combinazione necessaria (§. X.)

$$A = z^3+3zy, \quad \sqrt{B} = (3z^2+y)\sqrt{y}$$

Quadrando l' una e l' altra equazione, si otterrà

$$A^2 = z^6+6z^4y+9z^2y^2$$
$$B = 9z^4y+6z^2y^2+y^3$$

e sottraendo la seconda di queste equazioni dalla prima s' avrà $A^2-B = (z^2-y)^3 = \frac{(4z^3-A)^3}{27z^3}$, sostituendovi il valore di y tratto dall' equazione $A = z^3+3zy$. Quest' equazione ridotta somministra l' equazione (Δ)

(Δ) .... $64z^9-48Az^6+(27B-15A^2)z^3-A^3 = 0$

Se dunque si abbia un valore razionale per z da quest' equazione $= M$, poichè $y = \frac{A-z^3}{3z}$, sarà pure dato razionalmente il valore di $y = \frac{A-M^3}{3M} = N$, e però sarà $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = M \pm \sqrt{N}$, come s' aveva da provare.

COROLLARIO I.

§. XII. Siccome l' equazione $A^2-B = \frac{(4z^3-A)^3}{27z^3}$ può essere messa sotto questa forma

$$(8z^3 - 2A)^3 = (27A^2 - 27B)8z^3$$

dalla quale estratta la radice cubica s' ottiene l' equazione

$$(\Delta')\ldots.(2z)^3 - 3(2z)\sqrt[3]{(A^2 - B)} - 2A = 0$$

è manifesto, che se v' abbia per z valore razionale M nell' equazione (Δ'), si avrà, come prima, $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = M \pm \sqrt{N}$.

COROLLARIO II.

E se fosse il secondo termine del binomio un immaginario semplice ; ponendo nell' equazioni di condizione (Δ) (Δ'), $-B$ in luogo di B, sempre che abbiavi per z valore razionale nell' una, o nell' altra di quelle equazioni, sarà $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{-B})} = M \pm \sqrt{-N}$, siccome è manifesto.

COROLLARIO III.

E facendo considerazione all' equazione (Δ') del §. *XII*, nella quale non può avervi per z valore razionale, se non sia $\sqrt[3]{(A^2 - B)}$ quantità razionale, se ne ricava un comodo e nuovo criterio, ond'essere certi immediatamente, che il binomio $A + \sqrt{\pm B}$ non ha per radice cubica un irrazionale misto, subito che $A^2 \mp B$, quantità razionale, non è un cubo perfetto, di che è facilissimo l' accertarsi; e vicendevolmente $A^2 \mp B$ sarà sempre un cubo, allorchè sia un cubo $A + \sqrt{\pm B}$.

PROPOSIZIONE VII.

§. XIII. *Se nell' una, o nell' altra delle equazioni* (Δ), (Δ') *abbiasi per* z *un valore razionale, essendo* v *quantità razionale arbitraria*

$(\Delta)\ldots. 64z^9v^3 - 48Az^6v + (27B - 15A^2)z^3v - A^3 = 0$

$(\Delta')\ldots (2z)^3v - 3(2z\sqrt[3]{v}(A^2 - B) - 2A = 0$

il binomio $A \pm \sqrt{B}$ *avrà radice cubica binomia compoſta di due irrazionali ſemplici di queſta forma.*

$$M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{v^2N^3})$$

DIMOSTRAZIONE.

Suppongaſi $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})} = z\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2y^3)}$. Avremo, cubando, $A + \sqrt{B} = z^3v + 3zvy + (3z^2v + vy)\sqrt{y}$; e perchè ſia $\sqrt[3]{(A-\sqrt{B})} = z\sqrt[3]{v} - \sqrt[6]{(v^2y^3)}$, ſi aſſumano (§. X) le due equazioni.

$$A = z^3v + 3zvy$$
$$\sqrt{B} = (3z^2v + vy)\sqrt{y}$$

Quadrandole entrambe, e ſottraendo il quadrato della ſeconda dal quadrato della prima ſi avrà

$$v(A^2 - B) = (z^2v - vy)^3$$

e però $\sqrt[3]{v(A^2 - B)} = z^2v - vy$. Ma $y = \frac{A - z^3v}{3zv}$. Dunque ſoſtituendo, riducendo, e moltiplicando per 2, ſi avrà l'equazione

$(\Delta')\ldots. (2z)^3v - 3(2z)\sqrt[3]{v(A^2 - B)} - 2A = 0$

la quale, cubando, diventa

$(\Delta)\ldots. 64z^9v^3 - 48Az^6v^2 + (27B - 15A^2)z^3v - A^3 = 0$

Se dunque ſi abbia per z valore razionale $= M$ nell'una o nell'altra di queſte due equazioni, preſo per v un razionale opportuno, ſarà $y = \frac{A - M^3v}{3Mv} = N$, e però

$\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(v^2A^3)}$, come conveniva dimoſtrare.

COROLLARIO.

§. XIV. Se $\sqrt{B}$ foſſe immaginario ſemplice, baſta porre nell' equazioni di condizione $-B$ in luogo di B, sì che avendovi in tal caſo per z radice razionale, e per v valore razionale convenevole, ſi avrà $\sqrt[3]{(A\pm\sqrt{-B})} = M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(-v^3N^3)}$.

PROPOSIZIONE VIII.

§. XV. *Se l' equazione* (Δ)

(Δ) . . . . $x^3 - px - q = 0$

ammetta per x *un valore razionale, eſſendo* p q *razionali, il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$ *avrà per radice cubica un irrazionale miſto di queſta forma* $M \pm \sqrt{N}$, *eſſendo* M N *razionali, e* $\sqrt{N}$ *un irrazionale quadratico ſemplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Si ſupponga eſſere $z + \sqrt{y} = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}\right)}$. Sarà cubando

$\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})} = z^3 + 3zy + (3z^2 + y)\sqrt{y}$; e perchè ſia $z - \sqrt{y} = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}\right)}$, ſi aſſumano, come qui innanzi, le due equazioni

$$q = 2z(z^2 + 3y)$$

$$\sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})} = (3z^2 + y)\sqrt{y}$$

Quadrando queſte due equazioni, e ſottraendo al ſolito il quadrato della ſeconda dal quadrato della prima, ſi perverrà a queſta ridotta (§. §. *XI. XII.*) $A^2 - B = \frac{p^3}{27}$

$= \frac{(4z^3 - \frac{q}{2})^2}{27z^3}$, da cui eſtratta la radice cubica, e poſto x in luogo di $2z$, ſi otterrà l' equazione

$(\Delta) \ldots\ldots x^3 - px - q = 0$.

Qualor dunque ammetta queſt' equazione per x un valor razionale $= M$, ſarà y razionale $= \frac{4q - M^3}{12M} = N$, e però $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = M \pm \sqrt{N}$, come dovea dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

§. XVI. Che ſe foſſe $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, poſta y negativa, ſi avrebbe trovato $\frac{M^3 - 4q}{12M}$ pel ſuo valore $= -N$, e la radice cubica del binomio ſarebbe ſtata $M \pm \sqrt{-N}$, come deve eſſere.

PROPOSIZIONE IX.

§. XVII. *Se l' equazione* (Δ)

$(\Delta) \ldots\ldots x^3 - px - q = 0$

non ammetta radice razionale, il binomio $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica un irrazionale miſto della forma* $M \pm \sqrt{\pm N}$.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, se può averla, sia ella $a \pm \sqrt{\pm b}$. Operando come nelle Proposizioni precedenti, si perverrà alla ridotta

$$(\mu) \ldots\ldots (2a)^3 - p(2a) - q = 0$$

Dovendo pertanto essere a razionale, l' equazione (μ) avrà radice razionale. Ma l' equazione (μ) è lo stesso che l' equazione (Δ), posta x in luogo di $2a$. Dunque l' equazione (Δ) ammetterebbe radice razionale, contro il supposto. Non ammettendo dunque l' equazione (Δ) radice razionale, non può essere la radice cubica del binomio proposto un irrazionale misto della forma $M \pm \sqrt{\pm N}$. Il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE X.

§. XVIII. *Se il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non abbia per radice cubica un irrazionale misto della forma* $M \pm \sqrt{\pm N}$, *ma l' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \ldots x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

ammetta per x *un valore razionale, avrà il binomio per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$, *essendo* v *razionale arbitrario, e* $\sqrt{v}$ *irrazionale semplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Si supponga essere $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = z\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 y^2)}$. Cubando, e operando, come nelle Prop.

precedenti, si perverrà facilmente alla ridotta

$$(\Delta) \ldots . x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

posta x in luogo di $2z$. Se dunque possa trovarsi per v valore razionale, che non sia un cubo perfetto, tale, che l' equazione (Δ) ammetta per x radice razionale $= 2M$, è manifesto, che si avrà anche per $\pm y$ il valore razionale $\frac{\mp 4q \pm M^3 v}{12Mv} = \pm N$, e però sarà

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}, \text{ come}$$

dovea dimostrarsi.

Esempio.

Sia il binomio $52 + \sqrt{(2700)}$. Sarà $q = 124$, $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 2700$. Dunque $p = 3\sqrt[3]{4}$. Se pertanto l' equazione

$$x^3 v - 3x\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{v} - 104 = 0$$

abbia radice razionale, sarà $\frac{x}{2}\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 N^3)}$ la radice ricercata. Ma appunto posto $v = 2$, l' equazione

$$x^3 - 3x - 52 = 0$$

ha per radice razionale il 4. Dunque la radice cubica del binomio sarà $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{108}$.

PROPOSIZIONE XI.

§. XIX. *Se l' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \ldots . x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

non ammetta radice razionale, essendo v *quantità razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale semplice, il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$ *non ha per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$

DIMOSTRAZIONE.

Se può averla, sia ella $a\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 b^3)}$, b essendo positivo o negativo secondo che $\sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$ è reale o immaginario. Operando come in tutte le Proposizioni precedenti si perverrà a questa ridotta

$$(\Delta') \ldots . (2a)^3 v - p(2a)\sqrt[3]{v} - q = 0$$

la quale deve ammettere radice razionale per a, affinchè $a\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 b^3)}$ sia la radice cubica del binomio proposto. Ma l' equazione (Δ') è lo stesso che l' equazione (Δ), che non la ammette per supposizione, sol che si ponga $2a$ in luogo di x. Dunque l' equazione in a dovrebbe ad un tempo ammettere, e non ammettere radice razionale; il che non può essere. Se dunque l' equazione (Δ) ecc., come dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XII.

§. XX. *L' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \ldots . (2z)^3 v - 3(2z)\sqrt[3]{v}\sqrt[3]{(A^2 \pm B)} - 2A = 0$$

in cui v *esser dee razionale ad arbitrio,* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale,* A, *e* B *razionale; qualunque quantità si assuma per* v, *che non sia un cubo, non può ammettere mai radice razionale,*

razionale, se $\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$ *non sia irrazionale, e tale, che* $v(A^2 \pm B)$ *diventi un cubo perfetto.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, dovendo essere

$$\frac{(2z)^3 v - 2A}{6z} = \sqrt[3]{v}\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$$

e nello stesso tempo razionale il primo membro dell' equazione, bisogna che dal prodotto de' due irrazionali $\sqrt[3]{v}$, $\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$ risulti necessariamente una quantità razionale, cioè che $\sqrt[3]{v(A^2 \pm B)}$ sia una quantità razionale. Ma ciò non può mai essere, se $v(A^2 \pm B)$ essendo razionale, non sia ad un tempo un cubo perfetto. Dunque ecc. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

§. XXI. Se dunque $A^2 \mp B$ sia un cubo perfetto P^3, poichè non deve esserlo ad un tempo anche l' arbitraria v, altrimenti $\sqrt[3]{v}$ non sarebbe quantità irrazionale, come si richiede, non potrà mai $v(A^2 \mp B)$ essere un cubo razionale, dovendo risultare sempre $P\sqrt[3]{v}$, che non può esserlo. E però in tal caso non avrà l' equazione (Δ) della Prop. precedente radice razionale.

SCOLIO.

Accade ordinariamente ne' Problemi d' Algebra, che le soluzioni generali abbraccino più di quello, che immediatamente, e direttamente richiede la Quistione. A torto per altro se ne accusa la Scienza, quasi l' imper-

fezione foſſe dell' Arte non mai dell' Artefice. Due, per eſempio, ſono i valori, che neceſſariamente debbono aver luogo in una data Quiſtione. L' Algebra ne frameſcola bene ſpeſſo un compleſſo d'altri, parte reali, parte ancora immaginarj. Convengo, che queſt' è il caſo d' una ricchezza incomoda e perchè ci biſogna ſeparare le radici neceſſarie dalle ſtraniere all' aſſunto, e perchè non poſſiamo farlo talvolta per alcun modo. Ma o ci manchi il metodo di riſolvere le equazioni, che ne riſultano, o ſieno ſtate introdotte dall' Algebriſta relazioni ſtraniere, o non abbia ſvolte le relazioni date con la neceſſaria circoſpezione, queſta ricchezza non è mai un difetto della Scienza. Imperciocchè o il richiegga neceſſariamente l'eſtenſione delle relazioni date, o il comporti un inoſſervato, e non ſempre oſſervabile inſinuarſi di nuove condizioni, che vi ſi fa nello ſvolgimento della quiſtione, il finale riſultamento per parte della Scienza è ſempre neceſſario, e determinato dalle circoſtanze. Il metodo, per eſempio, che abbiamo tenuto precedentemente nel maneggiare le radici cubiche $z \pm \sqrt{\pm y}$ de' binomj irrazionali $A \pm \sqrt{\pm B}$ ci ha ſempre portato a equazioni di terzo grado direttamente, ſiccome la quiſtione il dimanda. Eppure abbiamo un eſempio memorabile nel V. Vol. degli Opuſc. del celebre, ed illuſtre Geometra Sig. d'*Alembert* pag. 192, e ſeq., che in queſto medeſimo caſo s'introducono nella ſoluzione ſei radici ſtraniere del tutto alla quiſtione, creando così una vera difficoltà da ſuperare, come dottamente ha egli poi fatto nel decorſo di quell' Opuſcolo. Di fatto ſia $A = \frac{q}{2}$, $B = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$, e poſto $\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} = z + \sqrt{y}$, $\sqrt[3]{(A - \sqrt{B})} = z - \sqrt{y}$, ſi perviene alle due equazioni.

$$q = 2z(z^2 + 3y) \qquad (1)$$

$$\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}=)}(3z^2+y)\sqrt{y}\ (11)$$

Togliendo l'asimetria, e maneggiando co' metodi comuni queste due equazioni onde ricavare il valore di z, si perviene ad una ridotta di nono grado. Parrebbe dunque (*così il Sig. d' Alembert*), che z dovesse avere nove valori possibili, ancorchè realmente non ne abbia che tre soddisfacenti all'equazione $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+\sqrt{y}$. Non sarebbe difficile il far conoscere, come abbiano potuto insinuarsi per questa via valori stranieri nella soluzione. All'opposto, si quadrino le due equazioni (1), (11). e si sottragga il quadrato della seconda dal quadrato della prima; ne risulta l'equazione $\frac{p^3}{27}=\frac{(+z^3-\frac{q}{2})^3}{27z^3}$, che è un cubo perfetto. Estratta pertanto la radice cubica ne viene la ridotta semplicissima $(2z)^3-p(2z)-q=0$ di terzo grado, che dà tre soli valori per z, come conviene.

Si potrebbero recare infiniti esempj di somiglianti soluzioni, se non fossero fuori del nostro assunto. Ho addotto questo, perchè vi si attiene strettamente, e n'ho profittato volentieri per mostrare, quanto disfenta, e non senza fondamento dall'opinione di molti, anche dottissimi uomini, che di tratto in tratto declamano contro sì fatte imperfezioni, ch'essi dicono, dell'Algebra. Si dovrebbe piuttosto prendere da questo motivo di ammirarne la perfezione. ficcome quella che all' interpolarsi in una quistione del più piccolo, per così dire, elemento straniero al soggetto o con elevazione a potenze, o con introduzione di qualche fattore, o per simile altra operazione, che non altera per verità l'eguaglianza de' membri, ma vale di fatto a moltiplicare le soluzioni, manifesta subito sintomi totalmente nuovi, e corrispondenti all'alterazione indottavi, inviluppando co' risul-

tamenti proprj della quiſtione una moltiplicità d' altre ſoluzioni, che le ſono improprie. Non può quindi dirſi più perfetta l' Algebra nel darci un' equazione di terzo, che è propria della quiſtione, che una di nono corriſpondente alle nuove condizioni tacitamente introdotte nel maneggiare le relazioni fondamentali.

PROPOSIZIONE XIII.

§. XXII. *Tutte le equazioni di terzo grado ſi poſſono ridurre all' equazione* (F)

$$(F) \ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

PROPOSIZIONE XIV.

§. XXIII. *Riſoluta l'equazione* (F) *col metodo di Cardano, ne riſulta generalmente una delle radici ſotto queſta forma*

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

PROPOSIZIONE XV.

§. XXIV. *Qualunque volta ſia* $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, *tutte e tre le radici dell' equazione* (F) *ſono reali, e diſeguali.*

Queſte tre Propoſizioni ſono ampiamente dimoſtrate nell' Algebra comune.

PROPOSIZIONE XVI.

§. XXV. *La formula Cardanica*

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

essendo p q *grandezze reali, in qualunque caso è sempre radice dell' equazione* (*F*)

$$(F) \ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

e radice sempre reale.

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia $\sqrt[3]{(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})})}+\sqrt[3]{(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})})}=x$.

Sarà cubando

$$x^3=\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}+3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}$$
$$\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}+3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}$$
$$\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}+\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}=q+3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}$$
$$\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}\times\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}}+3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}$$
$$\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}.$$

Ma $\left(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)\left(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)=\frac{p^3}{27}$. Dunque farà

$x^3=q+p\left\{\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}\right\}$. Ed è poi

$-px=-p\left\{\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}\right\}$

$-q=-q$.

In conseguenza, facendo l'aggregato degli omogenei di comparazione, farà $x^3-px-q=0$, che è l'equazione cubica (*F*). Dunque la formola Cardanica in qualunque caso è una radice di quest'equazione. Resta da provare, ch'ella sia sempre radice reale. Ma essendo $\frac{p^3}{27}$

minore di $\frac{q^2}{4}$, o eguale a $\frac{q^2}{4}$, la formola è sempre reale; e nel caso di $\frac{p^3}{27}$ maggiore di $\frac{q^2}{4}$, in cui appunto ella apparisce sotto aspetto immaginario, tutte tre le radici dell'equazione sono reali (*§. XXIV.*); non può dunque la formola essere radice dell'equazione (F) senza essere necessariamente radice reale. Dunque la formola Cardanica in qualunque caso è radice dell'equazione (F), e radice sempre reale. Il che ecc.

DEFINIZIONE.

§. XXVI. Caso irreducibile del terzo grado è quello, in cui le quantità p, q dell'equazione (F)

$$(F) \ldots\ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

essendo razionali, e $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, nessun divisore esatto dell'ultimo termine q può soddisfare all'equazione (F); oppure, che è lo stesso, Caso irreducibile del terzo grado è quello, in cui le quantità p, q dell'equazione (F) essendo razionali, tutte e tre le radici dell'equazione debbono essere reali, diseguali, e irrazionali.

SCOLIO.

§. XXVII. La condizione delle quantità p, q razionali, non attesa quanto basta, ha fatto equivocare più d'uno in questo argomento. V'ha un'infinità di equazioni di terzo grado aventi tre radici reali, diseguali, e irrazionali, le quali ciò non ostante non entrano nella Classe delle irreducibili. Basta tor via dall'equazione qualunque irrazionalità, perchè ella divenga tosto reducibile, ed abbiavi in conseguenza divisore dell'ultimo termine soddisfacente all'equazione. Ne ho fatto chia-

ro cenno al §. 88. nell' *Esercitazione Analitica* citata testè nell' Introduzione, di modo che quelle stesse equazioni del Sig. *Nicole* (*Mem.* 1738. 1740), e tutte le infinite simili, che possono trovarsi, le quali erano giudicate come casi rapiti all' irreducibilità (*Enciclop. Cas irred.*), non lo sono altramente, siccome può ognuno accertarsene agevolmente col ridurle alla forma (*F*) del §. precedente, con le quantità p, q razionali, al che non s' era posto mente.

PROPOSIZIONE XVII.

§ XXVIII. *Nel caso irreducibile il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica alcun irrazionale misto di questa forma* $M \pm \sqrt{-N}$.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè non avendo in questo caso l' equazione (*F*) (§. XXVI.) alcun divisore esatto dell' ultimo termine, che soddisfaccia all'equazione, non ha ella per x radice razionale. Ma in tal caso non ha il binomio proposto radice cubica di quella forma (*§. XVII*). Dunque ecc.

PROPOSIZIONE XVIII.

§. XXIX. *Nel caso irreducibile il binomio* $\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M \sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(-v^2 N^3)}$, *essendo* v *razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale semplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Se può averla, sia ella $z\sqrt[3]{v}+\sqrt[6]{(-v^2y^3)}$, essendo z ed y indeterminate. Operando come nella Prop. VII., si perverrà alla ridotta (I)

$$(I)\ldots\ldots(2z)^3v-p(2z)\sqrt[3]{v}-q=0$$

Se dunque quella è la radice cubica del binomio proposto, l' equazione (I) avrà per z radice razionale (*§. XIX.*). Ma essendo p quantità razionale, $\sqrt[3]{v}$ irrazionale, non può l'equazione (I) avere radice razionale, qualunque quantità razionale si assuma per v (*§§. XX. XXI.*). Non può dunque il proposto binomio avere nel caso irreducibile radice cubica di quella forma, come s' aveva da dimostrare.

PROPOSIZIONE XIX.

§. XXX. *In qualunque equazione del terzo grado*

$$x^3-px-q=0$$

in cui tutte tre le radici dell' equazione sono reali, e diseguali, il quadrato di qualunque delle tre radici è sempre minore di $\frac{+p}{3}$

DIMOSTRAZIONE.

Sieno a, $-a'$, $-a''$, oppure $-a$, a', a'' le radici dell' equazione. Mancando il secondo termine, sarà per i principj dell' Algebra, $a=a'+a''$, e però l' equazione prende questa forma.

$$x^3-(a'^2+a'a''+a''^2)x\pm a'a''(a'+a'')=0$$

Essendo

Eſſendo manifeſto, che $\frac{4}{3}(a'^2 + a'a'' + a''^2)$ è maggiore del quadrato a'^2, oppure a'^2 di ciaſcuna delle radici, reſta che ſi dimoſtri eſſere quello maggiore di $a^2 = (a' + a'')^2$. Ora eſſendo la ſomma de' quadrati di due quantità maggiore del doppio prodotto delle medeſime quantità, farà $a'^2 + a''^2 > 2a'a''$. Dunque $a'^2 + 4a'a'' + a''^2 > 6a'a''$, e però $4a'^2 + 4a'a'' + 4a''^2 > 3a'^2 + 6a'a'' + 3a''^2$.

In conſeguenza $\frac{4}{3}(a'^2 + a'a'' + a''^2) > a'^2 + 2a'a'' + a''^2 > (a' + a'')^2 > a^2$. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XX.

§. XXXI. *La formola Cardanica è reducibile a forma razionale in ogni caſo di* $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, *purchè l' ultimo termine* q *abbia diviſore eſatto, che ſoddisfaccia all'equazione* (*F*)

$$(F) \ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il binomio $\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)$ ha per radice cubica l'irrazionale miſto $M + \sqrt{} \pm N$, toſto che l'equazione (*F*) ammette per x un valore razionale $= 2M$ (§. §. *XV. XVI.*); cioè toſto che l'ultimo termine q ha diviſore eſatto, che ſoddisfà all' equazione, che è lo ſteſſo. Ma in tal caſo anche $\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ ha per radice cubica il binomio $M - \sqrt{} \pm N$. (*nello ſteſſo luogo*). Dunque la ſomma de' due radicali, cioè la formola Cardanica

$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=2M=x$

che è razionale. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XXI.

§. XXXII. *La formola Cardanica è reducibile alla forma irrazionale* $x\sqrt[3]{v}$ *in ogni caso di* $\frac{p^3}{27}>\frac{q^4}{4}$, *purchè l'equazione* (F')

$$(F') \ldots\ldots x^3v-px\sqrt[3]{v}-q=0$$

ammetta per x *radice razionale, essendo* v *un razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale semplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Tosto che l'equazione (F') ammette per x un valore razionale $2M$, il binomio $\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$ ha per radice cubica il binomio irrazionale $M\sqrt[3]{v}\pm\sqrt[6]{(\pm v^2N^3)}$ (§. *XVIII.*). Dunque la somma de' due radicali, cioè la formola Cardanica

$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=2M\sqrt[3]{v}$

$=x\sqrt[3]{v}$, come s'aveva da dimostrare

PROPOSIZIONE XXII.

La formola Cardanica nel caso irreducibile non è reducibile nè a forma razionale x, *nè a forma irrazionale mista* $x+\sqrt{v}$ *essendo* $\sqrt{v}$ *irrazionale semplice reale,*

nè a forma irrazionale ſemplice $x\sqrt[3]{v}$, *eſſendo* v *qualunque razionale ad arbitrio.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Parte. La prima parte della propoſizione è per sè evidente ſubito che l' equazione Cubica nel caſo irreducibile non ammette radici razionali.

II. Parte. Si ſupponga, ſe può eſſerlo,

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=x+\sqrt{v}$$

e ſi faccia $x+\sqrt{v}=r$, $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=T$. Poichè $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=\frac{p}{3}$, e per conſeguenza $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=p:\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, farà $r=T+p:3\,T$, $T^2-r\,T+p:3=0$, e $T=\frac{r}{2}\pm\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}$ $=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, ove $\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}$ è un immaginario ſemplice (§. XXX.). Dovrà pertanto eſſere $\frac{r}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{v}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left((x+\sqrt{v})^2-\frac{4p}{3}\right)}$ la radice cubica del binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$. Ma queſto binomio nel caſo irreducibile non ha per radice cubica un irrazionale di queſta forma (§. XXVIII.). Dunque ecc.

III. Parte. Suppoſto, come nell' art. preced.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=x\sqrt{v}=r,$$

e fatte le ſteſſe operazioni, ſi perverrà all'equazione $\frac{r}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(r^2 - \frac{4p}{3})} = \frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt{(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3})}$, la quale dovrà eſſere la radice cubica del binomio $\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$. Ma $\frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt{(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3})} = \frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3})^3}$; e il binomio $\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$ non ammette nel caſo irreducibile per radice cubica un irrazionale di queſta forma (§. *XXIX.*). Dunque ecc. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XXIII.

§. XXXIV. *La formula Cardanica nel caſo irreducibile non ammette altra forma algebraica finita, fuorchè la propria ſotto aſpetto immaginario.*

DIMOSTRAZIONE.

Se può ammetterla, comunque ella ſiaſi funzione di p ſolo, o di q ſolo, o di p e q inſieme, la ſi rappreſenti generalmente per ϕ. Sarà pertanto $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}\right)} = \phi$. Ma eſſendo $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}\right)} = \frac{p}{3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}\right)}}$ $= \frac{p}{3T}$, poſto $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}\right)} = T$; ſarà $\phi = T + \frac{p}{3T}$, e però $T^3 - \phi T + \frac{p}{3} = 0$. Dunque $T = \sqrt[3]{(\frac{q}{2}$

$+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p3}{27})}\Big) = \frac{\Phi}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Phi^2-\frac{4p}{3})}$; binomio in cui $\sqrt{(\Phi^2-\frac{4p}{3})}$ è un immaginario semplice, per essere il quadrato di qualunque delle tre radici Φ sempre minore di $\frac{4p}{3}$ (§. XXX.). Perchè dunque la formula Cardanica possa ammettere la forma Φ, bisogna che il binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$ ammetta radice cubica, che sia funzione di Φ di questa forma $\frac{\Phi}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Phi^2-\frac{4p}{3})}$. Ma perchè sia $\frac{\Phi}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Phi^2-\frac{4p}{3})}$ la radice cubica del binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$, essendo p q quantità razionali, è necessario, che Φ sia divisore esatto di q (§. IX.). Dunque in primo luogo la formula Cardanica ammetterà questa forma Φ, subito che Φ possa essere parte aliquota di q. Ma dalla supposizione di $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}$ $+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)} = \Phi$, operando come nella XVI. Prop., risulta l'equazione finale

$$(P) \ldots\ \Phi^3 - p\Phi - q = 0$$

E però la forma Φ deve essere radice di quest'equazione. Di nuovo pertanto la formula Cardanica ammetterà la forma Φ, subito che Φ sia e divisore esatto di q, e radice dell'equazione (P). Ma l'equazione (P) è precisamente l'equazione (F) del caso irreducibile (§. XXVI.); e nel caso irreducibile nessun divisore esatto dell'ultimo termine q può essere radice dell'equazione

(*F*) (*ibid.*). Non può dunque esser ϕ parte aliquota di q, e radice dell'equazione (*P*). E perciò la formola Cardanica non può ammettere nel caso irreducibile la forma ϕ. Ma ϕ rappresenta qualsivoglia immaginabile forma. Per conseguenza la formula Cardanica non ammette nel caso irreducibile altra forma algebraica finita, fuorchè la propria sotto aspetto immaginario. Il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XXIV.

§. XXXV. *Non è possibile di trovare per la radice* x *dell'equazione cubica* (*F*)

(*F*) ..... $x^3 - px - q = 0$

nel caso irreducibile un valore algebraico, finito, e libero da apparenza immaginaria.

DIMOSTRAZIONE.

Se è possibile, sia ϕ questo valore. Essendo la formula Cardanica in ogni caso radice reale dell'equazione (*F*) (§. *XXV.*), sarà necessariamente

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=\phi.$$

In conseguenza la formula Cardanica farà reducibile a forma algebraica finita, libera da apparenza immaginaria. Ma ciò non può essere (§. *XXXIV.*). Dunque non è possibile ecc., come dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

§. XXXVI. Non farà inutile, che sieno qui per ultimo recapitolate, e poste in serie le conclusioni capitali attinenti a questo sottile e difficile argomento, che non possono più revocarsi in dubbio senza offesa della verità, e senza introdur cavillazioni, che facciano ma-

nifeſto torto piuttoſto all' analiſta, che all' analiſi, alla quale non può ragionevolmente addoſſarſi il difetto di chi la maneggia. Poſſiamo pertanto tener per certo

I. Che la riſoluzione Cardanica è legittima; ſopra di che ragioneremo qui appreſſo.

II. Che la formula o il binomio Cardanico (D)

$$(D)\ldots\ldots \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

è ſempre la vera radice dell' equazione cubica generale (*F*)

$$(F)\ldots\ldots x^3-px-q=0$$

e radice ſempre reale (§. XXV.), cioè il vero valore di x in ogni caſo, tanto ſe l'equazione (*F*) non abbia che una ſola radice reale, quanto ſe le abbia tutte e tre reali, comunque poi eſſe ſi ſieno razionali o irrazionali, eſprimendole la medeſima formola tutte e tre, come ſi dimoſtra non difficilmente.

III. Che nel caſo poi denominato irreducibile, ſu cui non può naſcere equivoco (§. XXVI), ognuno de' termini del binomio (*D*) è quantità aſſolutamente immaginaria, la quale nè per trasformazioni, nè per artificioſe riduzioni potrà mai cangiar natura, e reſterà ſempre in fondo, ſe anche prendeſſe apparenza reale, quantità immaginaria. Ma preſi que' due termini inſieme la loro ſomma coſtituiſce una quantità reale, ed eſprime una vera e reale radice dell' equazione (*F*).

IV. Che è coſa ormai dimoſtrata a ſazietà, che quel binomio (*D*) nel caſo irreducibile non potrà mai conſeguire altra forma ugualmente algebraica, finita, e reale, la quale non implichi e involga aſpetto immaginario.

V. E che finalmente, dopo tutto queſto, reſta dimoſtrato, che non è poſſibile per alcun immaginabile metodo di trovare una radice dell'equazione (*F*), nel caſo irreducibile, algebraica finita e reale, la quale ſia nello ſteſſo tempo libera da aſpetto immaginario. In

fatti se ciò è possibile, bisogna necessariamente, ch'ella coincida con la radice (D), e le sia eguale, giacchè esprimono entrambe una medesima radice dell'equazione (F). Sarebbe dunque la radice (D) ridotta a forma algebraica finita e reale, nel caso irreducibile, senza implicanza d'immaginarj; il che si è dimostrato impossibile.

E quanto alla legittimità del metodo Cardanico vo' dichiararla qui nel modo che potrò migliore; il che non sarebbe necessario, se tutti potessero formarsi delle medesime cose le medesime idee. Ma qualche volta certi articoli non rischiarati ne' libri elementari danno luogo al germoglio di molti errori. Ed è strano soprattutto, che la si metta in dubbio in grazia del solo caso irreducibile. La formola esprime, e dà le precise radici dell'equazione in tutti i casi reducibili, senza ricorrere ad altri sussidj, che a quello dell'estrazione della radice cubica da ognuno de' due termini della formula; e dee ella cessare di essere legittima nel solo caso, che le radici dell'equazione (F) debbano essere tutte tre reali, diseguali, e irrazionali? Il metodo è questo.

Si faccia $x = z + y$. Sostituendo questo valore nell'equazione (F), prende ella questa forma (G)

$$(G) \ldots . z^3 + 3z^2y + 3zy^2 + y^3 - pz - py - q = 0$$

L'equazione (G) non è più determinata, come l'equazione (F), essendo due le indeterminate z y, delle quali bisogna definire il valore, onde conseguire quello di x, a cui è posto uguale l'aggregato $z + y$. Le due indeterminate z y non hanno certamente alcuna relazione necessaria tra di sè, fuorchè quella, che abbia da verificarsi l'equazione (G). Si traggano quante paja di equazioni si vuole dall'equazione (G), come sarebbe

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + 3z^2y = 0 \\ 3zy^2 + y^3 - pz - py - q = 0 \end{array}\right\} \ldots . . (A)$$

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + 3z^2y + 3zy^2 = 0 \\ y^3 - pz - py - q = 0 \end{array}\right\} \ldots . . (B)$$

$$z^3 - q = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} z^3-q=0 \\ 3z^2y+3yz^2+y^3-pz-py=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (C)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3z^2y+3y^2z-py-pz=0 \\ z^3+y^3-q=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (D)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3z^2y+3y^2z-q=0 \\ z^3+y^3-pz-py=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (E)$$

ecc.

Queſte combinazioni, e le altre che poſſono ſimilmente farſi, ſpezzando in due equazioni l' equazione (G), ſono tutte rigoroſamente legittime, perchè riſoluto qualſivoglia pajo di equazioni (A), (B) ecc. ſempre co' valori ritrovati di z ed y ſi ſoddisfa all' equazione (G), ch' è la ſola neceſſaria condizione da riempierſi, e verificarſi nella quiſtione.

La combinazione (D) pertanto non è men legittima di tutte le altre (A), (B), (C), (E) ecc. Ed è appunto dalla combinazione (D), ch' è tratto il valore di

$$z+y=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{2}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)},$$

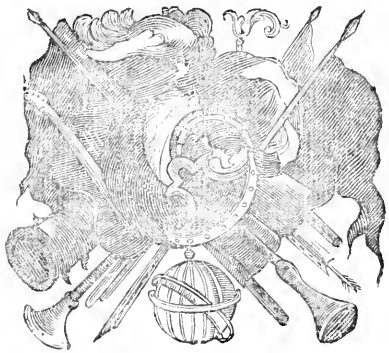
che è la formola Cardanica. Che non poſſa eſſere $3zy(z+y)=p(z+y)$, e nello ſteſſo tempo $z^3+y^3=q$, ciò appunto è quello che fa riſultare così z come y quantità aſſolutamente immaginarie, come è ſtato dimoſtrato da molti valentuomini, e l'ho dimoſtrato io ſteſſo nell' *Eſercitazione* citata qui innanzi. Ma $z+y$ è ſempre e neceſſariamente il vero valore di x, cioè la vera radice dell' equazione (F). Ed è irragionevole il pretendere, che il metodo per eſſere legittimo debba ſomminiſtrare non già il ſolo compleſſo $z+y$ reale, ma le parti eziandio z, y reali; mentre non altro è di aſſoluta neceſſità per natura della quiſtione, che ſia reale, fuorchè il valore di $x=z+y$, qualunque poſſa mai eſſere la forma delle parti.

Sarebbe lo ſteſſo ſe dalla combinazione (A), o da qualunque delle altre (B), (C) ecc. ſi traeſſe, ſe è poſ-

ſibile, il valore di z, e di y. Sempre la ſomma $z+y$ ſarebbe uguale ad x, cioè alla vera radice dell' equazione. Non ſarebbe z', tratto per eſempio dalla combinazione (A), lo ſteſſo z che s' è tratto dalla combinazione (D), nè y' lo ſteſſo che y; ma $z'+y'$ ſarebbe ſempre l' identica ſomma e quantità $z+y$, cioè la ſteſſa radice x dell' equazione.

Quindi è manifeſto, che da qualunque di quelle combinazioni ſi arrivaſſe a ricavare il valore di z', e di y', ſempre la ſomma $z'+y'$ involgerà neceſſariamente degl' immaginarj; altrimenti, dovendo ella indentificarſi colla ſomma $z+y$ tratta dalla combinazione (D), cioè colla Cardanica, potrebbe queſta eſſere liberata dall' aſpetto immaginario, contro ciò che s' è ſolennemente dimoſtrato.

Ma queſto baſti a compiuta dilucidazione della materia.



ESPOSIZIONE ANATOMICA

DELLE PARTI RELATIVE ALL' ENCEFALO DEGLI UCCELLI.

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acqueſi, e Chirurgo Maggiore del Reale Preſidio di Torino

Al Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. il Duca di Parma, Preſidente al Gabinetto di Storia Naturale, Profeſſore primario della medeſima, e di Notomia in quella Regia Univerſità.

SIGNORE.

MOſtrerei d' eſſer privo del bene dell' intelletto, ſe non mi aveſſe dolcemente commoſſo la generoſità, che voi manifeſtaſte nell' analizzare le mie oſſervazioni ſull' *Encefalo Umano*, e nell' additare ai numeroſi voſtri uditori dalla Cattedra in coteſta famoſa e dotta Univerſità da voi così degnamente occupata gli articoli delle opere del ſommo Notomiſta, e Filiologo *Alberto Allero*, nei quali di quella mia debole fatica ſi fa corteſe ed onorata menzione; e ſe dall' altra parte la cognizione, che ho già da parecchi anni della vaſtità dell' erudizione voſtra, e della felicità delle profonde voſtre ricerche nella Notomia, e nella Storia naturale, non mi aveſſe indotto a ſperare, che voi non isdegnerete ch' io ricorra a voi per lume, e per conſiglio intorno a quella parte dell' *Encefalotomia univerſale* da me abbozzata, che riſguarda gli uccelli, dintorno alla quale s' impiegarono dopo di *Tommaſo Willis* gli Accademici Parigini ſenza condurla però a plauſibile chiarez-

za ed eſtenſione infino a tanto che il lodato infaticabile *Allero* non ebbe creduto lo ſviluppamento del cerebro nella menzionata claſſe d'animali occupazione degna di sè, e della attenzione dei veri Filoſofi.

Vi è noto, eruditiſſimo Signore, che deſideroſo queſti di rendere vie più manifeſti al mondo i nodi, con i quali piacque all'*eterno* ſempre *adorabile Artefice* di concatenare la porzione animata delle ſoſtanze abitatrici del noſtro globo, ſi lagnava di non aver ancora trovato adequatamente deſcritto * il cerebro degli uccelli, ed avea riunite in una diſſertazione quelle verità, che l'eſame anatomico più attento gli avea rivelate ſu viſcera così eſſenziale in queſta claſſe d'animali, acciocchè ſerviſſero di ſtimolo agli altri Anatomici per dilatare anche da queſto canto i limiti delle noſtre cognizioni.

Non v'ha dubbio, che molti fra queſti vi abbiano fatto laudevoli progreſſi calcando le veſtigia di *Allero*, dietro alle quali oſai pure di muovere anch'io, di modo che l'anno MDCCLXXVI ſembrandomi già d'avere incontrato aſſai buona ventura nello ſpigolare per queſto campo, aveva penſato di traſmettere al promotore di tali ricerche i manipoli, che me n'erano toccati, riducendoli a foggia di comenti allo ſcritto *Alleriano*; ma non aveva condotto ancora il mio lavoro al termine prefiſſo, quando fui colpito dall'acerbiſſimo annunzio della perdita irreparabile, che per la morte di *Allero* la repubblica filoſofica ha fatto.

Privo così degli utili avviſi, che da uomo sì grande per ogni titolo avrei ottenuti, eſitai nel determina-

---

(*) *Avium cerebra nondum deſcripta hic recenſere viſum eſt, ut continuus ille tranſitus etiam hoc exemplo innoteſcat, qui eſt ex fabrica quadrupedum per aves in piſces, inve quadrupeda frigida, quæ multa piſcium habent ſimilia.* v. Opera Minora Alb. *Halleri* Vol. III. ſect. XXXVI.

re a chi comunicare i menzionati comenti affine di ricavarne e correzione ed ammaestramento, fin che non venni favorito da voi con quelle lettere, le quali m'incoraggiano a proseguire nella carriera anatomica, e con il prezioso dono dell' opera vostra celebratissima intorno alle tavole postume del *Santorini*, la quale mi servirà d'esemplare, e di guida, massime in quello, che concerne le vostre utilissime scoperte.

Tanta benignità vostra a favor mio non solo mi vi lega con vincoli indissolubili d'amicizia, e di gratitudine, ma sbandisce dall'animo mio ogni irresoluzione; e mi conferma nella sicurezza, che queste osservazioni sull'*Encefalo degli Uccelli* non potrebbono esser indirizzate ad uomo, che con più bel nodo vanti in suo cuore unite dottrina ed urbanità, schiettezza e discrezione, erudizione e modestia, tutte prerogative altrettanto rare quanto desiderate in chi dev'esser giudice e maestro in cose di Fisica, e di letteratura.

Eccovi pertanto in questo scritto compendiato, oltre alle osservazioni Alleriane, tutto quello, che se ne legge nelle opere del *Willis* sul cerebro e sui nervi, le quali se per non so quale sventura della Notomia non fossero grate troppo superficialmente lette, per non dire troppo vergognosamente neglette, questi organi sarebbero assai meglio sviluppati e conosciuti.

Vi riunisco altresì quello, che la lettura va somministrandomi di relativo all'oggetto principale acciò che la mia spozizione acquisti maggior chiarezza, accennando i fonti dai quali è ricavato perchè odio appropriarmi le ricchezze altrui. Anzi vi scongiuro di non ascondermi il nome, nè le opere di coloro, che avranno già descritte quelle parti, che v'accorgerete immaginarm'io d'avere prima di nessun altro sviluppato ed esposto acciocchè loro non venga involato l'onore della scoperta; perciocchè non sono abbastanza persuaso della so-

lidità del pensiere di quel Letterato Franzese, che pretende tutto essere già stato detto.

La natura è un fondo inesauribile, nel quale quanto si cerca più profondamente, tanto maggior dovizia trovasi di cose novelle: nè vogliam essere così ingiusti verso i nostri coetanei, nè verso i posteri con supporre gli uni, e gli altri incapaci di trovare nel fondo suddetto nuove ricchezze: onde eziandio che mi riconosca inabile a fare scoperte importanti, pur so che lo spirito dell'uomo ha fecondità pari alla insaziabilità del suo cuore, e che quando quello non può esser inventore, aggiunge e perfeziona valendosi dei lumi altrui e facendo nascere nuovi pensieri, nuovi metodi di osservare da quelli, che gli vengono altronde presentati.

Così vo tentando io, e se non mi riescirà d'esporre cose nuove, procurerò almeno di riunire le già conosciute sotto que' differenti punti di vista, che potranno sembrare più naturali; perciò troverete divisa quest' operetta in cinque trattati, nel primo de' quali verranno comprese in due parti le notizie indispensabili sulle pareti tanto esterne, quanto interne del cranio, che hanno relazione con il cerebro, e con i nervi cerebrali degli uccelli; nel secondo si descriveranno le meningi; nel terzo il cervello; nel quarto il cervelletto, e la midolla allungata; nell' ultimo i nervi, che escono dalle pareti del cranio.

Comprenderovvi pur anco le osservazioni anatomiche fatte da me su gli organi dei sensi in questa classe d'animali, non ancora da altri pubblicate, o non arrivate a mia notizia, o esposte differentemente da quel modo nel quale io le ritrovai.

In questo caso le mie osservazioni serviranno almeno per confermare la verità di quelle degli autori a me sconosciuti, verità sempre accette a coloro, che coltivano la gloria naturale con il genio, col quale la coltivate voi, e agli ingegni elevati, depositarj delle

cognizioni più preziose, e dei fondamenti più stabili del sapere umano. Sicchè nè a voi, nè agli altri Filosofi pari vostri disgradiranno, come alla stessa Maestà dei regnanti non disgradisce l'umile ma cordiale offerta di fiori odorosi e di saporite frutta in mezzo ai ricchi tributi delle più ubertose provincie.

Confessò il chiarissimo *Allero* di non avere notomizzati molti uccelli, * e le osservazioni principali che ci lasciò dintorno ai cerebri loro disse di averle tratte dall' esame di sei oche sole. * Su queste mi esercitai lungo tempo tenendo scrupolosamente dietro a sì gran Maestro, e quando ne ebbi notomizzate varie dozzine m' avvidi, che anche nelle oche s' incontrano moltissime parti essenziali non esposte nella dissertazione Alleriana, o differenti da quanto vi si legge; perciò mi sono invogliato di cercare se altre spezie di pennuti ne vadano provvedute, e se vi se ne potesse meglio scorgere la varietà.

Nè male mi apposi, perciocchè in quasi tutte le specie notai differenze essenziali nella direzione, nella figura, nel sito, e nel numero delle medesime; onde mi vidi obbligato di ripetere più e più volte le osservazioni su quanti individui di quella specie mi fu permesso; e degli individui stessi vi presento il catalogo adoperando la nomenclatura del celebre *Linneo*, giacchè le opere di sì diligente Naturalista facendo le delizie dei Professori, più facilmente si capirà quale uccello vi nomini; e caso che sbagliassi nel dargli il nome italiano, lo sbaglio mio verrà dalla cortesia vostra corretto.

(*) *Non numerosas aves incidi, vera erunt tamen quæ ex adversariis meis hic repeto V. Loc. citat.*

(*) *Anseris cerebrum ex sex animalibus V. L. citat.* per quello che ha riguardo al cerebro di questa specie d'uccelli.

CATALOGO.

Degli individui delle diverſe ſpecie d' uccelli ſtati notomizzati da me per verificare le oſſervazioni Alleriane, ed eſporne l' encefalotomia.

Numero degl'individui da me notomizzati.

42. Falco

Nibbio da noi Piemonteſi detto *la Pondrà*. Milvus 12. *Falco cera flava, cauda forficata, corpore ferrugineo, capite albidiore* 2.

Falcon gentile. Gentilis 13. *F. cera, pedibuſque flavis, corpore cinereo, maculis fuſcis, cauda faſciis quatuor nigricantibus.* 3.

Gheppio, o Smeriglio da noi Piemonteſi detto *la Crivella*. Tinnunculus 16. *F. cera, pedibuſque flavis, dorſo rufo punctis nigris, pectore ſtriis fuſcis, cauda rotunda.* 8.

Sparviere. Sparverius 20. *F. cera lutea, capite fuſco, vertice, abdomineque rubro, alis cæruleſcentibus.* 1.

43. Strix

Gufo. Bubo 1. *Strix capite auriculato, corpore rufo.* 2.

Due ſpecie di Civette. Otus 4. 5. *capite auriculato pennis ſenis.* / Scops 5. 5. *capite auriculato penna ſolitaria* 4.

La Dama de' Piemonteſi. Stridula 8. 5. *capite lævi, corpore ferrugineo, remige tertia longiore.* 2.

45. Pſittacus

Papagallo. Æſtivus 32. *Pſittacus brachyurus viridis luteo ſubmaculatus, fronte cærulea, humeris ſanguineis, orbitis incarnatis.* 1.

50. Corvus

Corvo. Corax 2. *Corvus ater, dorſo atro-cæruleſcente, cauda ſubrotunda,* 3.

Cornacchia. Corone 3. *C. atro-cæruleſcens totus, cauda rotundata, rectricibus acutis.* 5.

51. Coracias

Io la credetti una ſpecie delle *Meropi* ſegnate 63. da *Linneo*. Bengalenſis 5. *Coracias ſubfulva ſubtus cærulescens, collo ſubtus violaceo* (non ſtriato nec palido) *cauda integra* 1.

57. Cuculus

37. Cuculus

2. Canorus 1. *Cuculus cauda rotundata nigricante, albo punctata.* — Cucolo.

58. Yunx

2. Torquilla. — Torcicollo.

59. Picus

3. Viridis 12. *Picus vertice coccineo.* — Picchio.

64. Upupa

3. Epops 1. *Upupa cristata variegata.*

67. Anas

Anser 9. *Anas rostro semicilindrico, corpore supra cinereo, subtus pallidiore, collo striato.*

Più di cento.
- Strepera 20. *A. speculo alarum rufo, nigro, albo.*
- Clangula 23. *A. nigro, alboque varia, capite tumido, violaceo, sinu oris macula alba.*
- Boschas 40. *A. rectricibus intermediis (maris) recurvatis, rostro recto.*
- Domestica *B.*

} Oche ed Anitre

72. Pelecanus

3. Piscator 6. *Pelecanus cauda cuneiformi, rostro ferrato, corpore albo, remigibus omnibus, facieque nigris.* — Domenicano in val di Bormia.

84. Ardea

2. Grus 4. *occipite nudo papilloso, pileo, remigibusque nigris, corpore cinereo, rectricibus intimis laceris* — Gru.

1. Cinerea 11. *A. occipite nigro lævi, dorso cæruleſcente, subtus albida, pectore maculis oblongis nigris.*
2. Major. 12. *A. occipite crista nigra dependente, corpore cinereo, collo subtus linea, fasciaque pectorali nigris.*
2. Alba 24. *A. capite lævi, corpore albo, rostro fulvo, pedibus nigris.*

} Aghironi.

86. Scolopax

6. Rusticola 6. *Scolopax rostro recto, basi rufescen-* — Beccaccia.

te, pedibus cinereis, femoribus tectis, fascia capitis nigra.

Beccaccino. Gallinago 7. *S. rostro recto, tuberculato, pedibus fuscis, frontis lineis fuscis quaternis.* 8.

98. Pavo.

Pavone Cristatus 1. *Pavo capite crista compressa, calcaribus solitariis.* 1.

99. Meleagris.

Gallo d' India. Gallopavo 1. *Meleagris capite caruncula frontali, gularique, maris pectore barbato.* 20.

101. Phasianus.

Galli, Galline, e Fagiani. Gallus 1. *Phasianus caruncula compressa verticis, geminaque gulæ, auribus nudis, cauda compressa adscendente.* 50.

102. Numida

Gallina detta di Faraone. Meleagris. 1.

103. Tetrao

Pernice. Perdix 13. *Tetrao pedibus nudis calcaratis macula nuda coccinea sub oculis, cauda ferruginea, pectore brunneo.* 12.

Quaglia. Coturnix 20. *T. pedibus nudis, corpore griseo maculato, superciliis albis, rectricibus margine, lunulaque ferruginea.* 16.

104. Columba

Piccione. Domestica 1. 20.

Colombo Selvatico. Palumbus 19. *C. rectricibus postice atris, remigibus primoribus margine exteriore albidis, collo utrinque albo.* 4.

Tortorelle
- Turtur 32. *C. rectricibus apice albis, dorso griseo, pectore incarnato, macula laterali colli nigra lineolis albis.* 4.
- Risoria 33. *C. supra lutescens, lunula cervicali nigra.* 6.

105. Alauda

Allodola. Arvensis 1. *Alauda rectricibus extimis duabus extrorsum longitudinaliter albis, intermediis interiori latere ferrugineis.* 6.

106. Sturnus

8. Vulgaris 5. *Sturnus roſtro flaveſcente, corpore nigro, punctis albis.* Storno.

107. Turdus

10. Viſcivorus 1. *Turdus dorſo fuſco, collo maculis albis, roſtro flaveſcente.* Tordo.

4. Merula 22. *T. ater roſtro, palpebrisque fulvis.* Merlo.

109. Loxia

8. Coccothrauſtes 2. *Loxia linea alarum alba, remigibus mediis apice rhombeis, rectricibus latere tenuiore baſeos nigris.* Froſone, da noi detto *Berro-dino*

3. Chloris 27. *L. flavicanti-viresſcens, remigibus primoribus antice luteis, rectricibus lateralibus quatuor baſi luteis.* Se è il noſtro Verdone.

110. Emberiza.

18. Hortulana 4. *Emberiza remigibus nigris, primis tribus margine albidis, rectricibus nigris, lateralibus extrorſum nigris.* Ortolano.

2. Citrinella 5. *E. rectricibus nigricantibus, extimis duabus latere interiore macula alba acuta.* Zivolo.

112. Fringilla

1. Cœlebs 3. *Fring. artubus nigris, remigibus utring. albis, tribus primis immaculatis, rectricibus duabus oblique albis.*

3. Montifringilla 4. *alarum baſi ſubtus flaviſſima.* } Paſſera Solitaria.

1. Julenſis 5. *F. fuſca, pectore humeriſque rufis, alis nigris, macula rufa.*

6. Carduelis 7. *F. remigibus antrorſum luteis extima immaculata, rectricibus duabus extimis medio, reliquiſque apice albis.*

2. Serinus 17. *F. ſubviresſcens, mandibula inferiore albida, dorſo lateribus fuſco maculatis, faſcia alarum alba.* Cardellini.

6. Canaria 27. *F. roſtro, corporeque albo-flavicante, rectricibus, remigibusque viresſcentibus, roſtro albido.* Canarino

Passeri da muro e da Salcio. Domestica 36. *F. remigibus, rectricibusque fuscis corpore griseo nigroque, fascia alarum alba solitaria.* 30.

104. Motacilla

Usignuolo. Luscinia 1. *Motacilla rufo-cinerea armillis cinereis.* 2.

Cannavarola. Curruca 6. *M. supra fusca, subtus albida, rectricibus fuscis, extimo margine tenuiore alba.* 2.

Beccafico. Ficedula 10. *M. subfusca, subtus alba, pectore cinereo-maculato.* 6.

Cutretta da noi detta *Ballerina.* Alba 11. *M. pectore nigro, rectricibus duabus lateralibus dimidiato oblique albis.* 8.

Capinero. Atricapilla 18. *M. testacea subtus cinerea, pileo obscuro* 2.

Reattino. Trochilus 49. *M. cinereo-virens, alis subtus rectricibus flavescentibus, superciliis luteis.* 6.

117. Hirundo

Rondinella. Rustica 1. *Hirundo rectricibus, exceptis duabus intermediis, macula alba notatis.* 10.

Cul-bianco presso i Piemontesi. Urbica 3. *H. rectricibus immaculatis, dorso nigro cærulescente, tota subtus alba.* 3.

Rondone. Apus 6. *H. nigricans, gula alba, digitis omnibus quatuor anticis.* 7.

La serie delle mie osservazioni sulle teste degli uccelli è dunque fondata sull' esame di più di quattrocento individui. Felice me se tutte queste vittime sacrificate alla ricerca della verità, e all' aumento delle cognizioni nostre intorno alla più importante tra le viscere mi guideranno al conseguimento del fine principale, che mi sono proposto, il quale si è di rendere me stesso e i Lettori miei sempre più riconoscenti verso l' *ineffabile Increata Sapienza*, la quale tutto che abbia voluto provvedere d' organi in apparenza analoghi il cranio di moltissimi dei viventi, ha però in diversissima guisa costrutti nelle diverse specie gli organi medesimi a tenor dei loro bisogni, e si compiacque di fissare nel solo cerebro umano la sede principale di quella incom-

prenſibile maraviglioſa ſoſtanza, che ci fa ragionevoli, e capaci di adorarne (per quanto alla umana debolezze è conceſſo) la Maeſtà, e di ammirarne gl'immenſi a noi favorevoli attributi in qualſivoglia delle di Lei creature.

Con queſti ſentimenti do fine alla mia lettera di nuovo ſupplicando V. S. di non riſparmiare quanto ſtimerà opportuno a rendere meno diſettoſa la mia operetta, la quale ſervirà di teſtimonianza al mondo della amicizia onde voi mi onorate, e della ſtima inalterabile, che ſo e farò ſempre dei voſtri meriti, e del ſaper voſtro.

TRATTATO I.

Delle ossa del Cranio degli uccelli in generale, e particolarmente delle Oche e delle Anitre.

TESTO ALLERIANO *

„ Le presenti osservazioni sul cervello dell' Oca le „ ho fatte sopra sei individui di questa specie d' uccel- „ li, le ossa del cranio de' quali sono spesse, massime „ all' occipite, e cellulose.

PARTE PRIMA.

Esposizione delle parti esterne della testa degli Uccelli.

CAPITOLO PRIMO.

Descrizion generale della testa degli uccelli.

L'Esatta cognizione delle parti contenute nella cavità del cranio di qualsivoglia animale soltanto allora si ottiene quando se ne conosce la disposizione e la struttura delle contenenti, mancando la quale tanto men giusta idea si avrà dell'entrare e dell'uscire dei vasi e dei nervi nella cavità medesima; perciò resta indispensabile, che si faccia precedere la serie delle notizie più opportune a determinare il numero delle regioni, e i limiti delle ossa, che le occupano.

---

* *Anseris cerebrum ex sex animalibus. Cranium crassum, maxime ad occiput, & cellulosum.*

ARTICOLO I.

Parti esteriori della testa, e prima il Cranio degli Uccelli.

1. La testa degli uccelli si divide in *cranio*, ed in *Becco* ossia *Rostro*.

2. Il *cranio*, che in quasi tutte le specie ne fa la porzione più essenziale, se in tutti non ne fa la più estesa, occupa la region superiore e posteriore della testa, e vi si distinguono il *vertice* coperto di piume, i *lati* dove sono prominenti gli *occhi*, ed incavate le *orecchie*, e si attaccano molti muscoli destinati al movimento degli organi attigui; la *base* corrispondente alle *radici* del *becco*, e alla sommità anteriore carnosa del lungo flessibilissimo collo; la *fronte*, cioè la parte anteriore stretta e piana della testa, che discende leggiermente fra le *orbite*; l'*occipite*, che ne è la parte posteriore larga e gibbosa.

ARTICOLO II.

Il Becco.

1. Il Becco o rostro è differente nelle diverse specie volatili tanto in figura e in consistenza, quanto in lunghezza, in larghezza, e in direzione, poichè se ne vedono dritti, inarcati, ritorti, sottili, compressi ai lati, appiattiti, conici, angolati, solcati, fatti a foggia di lesina, di coltello, a volta, uncinati, adunchi, cilindrici, brevi, mezzani, lunghissimi, e grossissimi ecc.

2. Dividesi il becco in porzioni superiore ed inferiore, alle quali nelle Oche e nelle Anitre potrebbe darsi il nome di mascelle.

3. Vi si considera prima di tutto la corona del bec-

co, ossia il ceppo comune a tutte e due le porzioni, che è appunto nel sito dove le piume sono come una specie di peluria detta dai Naturalisti il *capestro*, il quale consiste in una linea stretta riguardo ad alcune specie, riguardo ad altre in un largo collare; havvene pure, che hanno la peluria del *capestro* rivolta in alto e indietro a seconda della direzione delle altre penne del capo; alcune lo hanno scarmigliato, altre rovesciato in giù sul becco come i Corvi, le Gazze, le Strigi; altre poi hanno il ceppo del becco coperto di pelle morbida e sgombra di penne, la quale ha presso *Linneo* il nome di *cera*.

4. Vi si nota il *corpo*, che riguardo alla porzione o mascella superiore si divide in *dorso*, nel quale sono scolpite le *narici* esteriori guarnite di peli nominati *vibrisse*, e in ale, o margini destro e sinistro, riguardo alla inferiore in lati, e in base.

5. Vi si osserva finalmente l'estremità ossia punta in molti uccelli retta ed acuta, in altri ottusa, tuberculosa, adunca, ricurva.

6. Nelle Oche e nelle Anitre l'estremità del becco è larga, arcata, munita d'un' unghia, in queste bruna forbita, e più larga verso l'orlo delle mascelle, nelle Oche bianca, liscia più larga, più convessa, quasi ovale, sodissima, e assai più aderente.

ARTICOLO III.

Dimension generale della testa delle Oche.

Spogliato degl' integumenti, e dei muscoli il cranio delle Oche, diviso da tutto quello, che s'appartiene al becco e al collo, trovasi comunemente lungo dalle 28 alle 30 linee parigine; e se fingasi una linea rasente la superficie esteriore convessa del cranio dalla apofisi nasale di mezzo alla occipitale, questa batterà fra le 46 linee, e i quattro pollici.

CAPITOLO

CAPITOLO II.

Divisione delle parti esteriori del cranio delle Oche.

Non discoprendosi facilmente nelle Oche adulte le divisioni naturali delle ossa del cranio, e non essendone contrassegnati i margini da futura, nè da apparenti armonie; e per altra parte vedendovisi la figura in parecchi luoghi distinta, oltre che con le differenti porzioni delle ossa medesime vengono formate regioni pur differenti, mi sembra indispensabile, che per chiarezza maggiore vengano indicate le porzioni principali per dividerle all'uopo in altre subalterne.

ARTICOLO I.

Porzioni principali della convessità del cranio delle Oche.

1. Su questa convessità si osservano tre porzioni principali per lato, le nasali, le frontali, e le parietali.

2. Le *porzioni nasali* quadrilunghe ascendono fino ad un forame scolpito nel vertice distante linee 9 dalla apofisi *nasale di mezzo*, e trovasi proprio nel centro di quella linea, che trar si potrebbe in traverso dalla *apofisi orbitaria superior destra* alla *apofisi orbitaria superior sinistra*.

3. Quel *foro* è alcune volte doppio senza però, che il destro sia parallelo, nè costantemente simmetrico con il sinistro, e che tuttedue comunichino con il *seno longitudinale* della *dura madre*.

4. Fra l'accennato forame, e quell'*arco* rilevato che è tanto apparente sulla sommità posteriore del cranio v'è uno spazio lungo lin. 20 circa, delle quali venti linee le dieci anteriori servono per misurare l'estensione delle *porzioni frontali*.

5. Queſte finiſcono in alto dirimpetto alla ſommità delle *orbite*.

6. Da tale altezza all'*arco* già menzionato ſi ſtendono per lo ſpazio delle altre dieci linee le *porzioni parietali*.

7. Tanto le porzioni naſali quanto le frontali e le parietali ſono diviſe in deſtra e ſiniſtra mediante una *linea incavata*, che dalla apofiſi *naſale di mezzo* aſcende fino alla ſommità dell'*arco*.

8. L'*arco* ſi curva ſui lati della ſommità e della faccia poſteriore del cranio, la quale diceſi *porzione occipitale*, che in alto in avanti e ai lati è circoſcritta dal medeſimo arco.

9. In baſſo ſtendeſi fino alla radice di due apofiſi paragonabili per la ſituazione più che per la figura loro alle *apofiſi maſtoidee* umane, e fino al *gran foro occipitale*.

10. Dalla ſommità dell'arco diſcende fino al *gran foro* ſuddetto una *ſpina piramidale*, oſſia *creſta oſſoſa*, che con la ſua baſe appoggia ſull'orlo ſuperiore di queſto foro.

ARTICOLO II.

Eminenze più conſiderabili alla baſe del cranio delle Oche.

I. Alla baſe del cranio delle Oche ſi vedono parecchie eminenze oltre a molte foſſe ed incavature, a numeroſi ſolchi e forami. Alcune delle eminenze ſono ai lati, altre ſull'aſſe maggiore della baſe iſteſſa, onde cominceremo a deſcrivere le ſimmetriche o laterali prima di numerar quelle di mezzo.

2. Al davanti ve ne ha due brevi, e piatte, dal ſito e dalle funzioni loro dette *apofiſi naſali* deſtra e ſiniſtra.

3. Dietro e ſotto queſte ſi allungano le due *orbitarie inferiori* una per lato alla parte anteriore delle orbite.

4. Ai lati della ſommità delle *porzioni naſali* ſi veggono le poco elevate apofiſi *orbitarie ſuperiori* diviſe dalle predette mediante una mediocre *incavatura*.

5. Dico poco elevate parlando delle Oche e delle Anitre; ma nel Nibbio, nello Sparviere, nel Gheppio, e nello Smeriglio, che noi Piemonteſi nominiamo *Crivella*, le apofiſi orbitarie ſuperiori ſono prolungate per due lamine piatte e ſottili, che ſi ſcoſtano alquanto dal margine dell' orbita, e per eſempio nel Nibbio traſcorrendo lo ſpazio d' un pollice laſciano un voto fra il margine loro interno, e la porzion naſale, occupato da una membrana ligamentoſa forte ed elaſtica, la quale unitamente all' accennato prolungamento di queſte apofiſi forma la parte anterior principale degli *archi delle orbite*, che ne terminano eſteriormente la *volta*.

6. Seguono alla parte poſteriore delle *orbite* le lunghe, obblique, ed acute *apofiſi orbitarie poſteriori*.

7. Finalmente alla parte inferior poſteriore dei lati del cranio ſi vedono le apofiſi *maſtoidee*, concave al davanti per dar ricetto ad uno dei capi del mobile *oſſo intermaſcellare*, e più ampiamente incavate all' indietro per dar luogo alla *lunata membrana del timpano*, per contenere alcuni degli organi appartenenti all' udito, e per dare uſcita ad alcune groſſe vene diſcendenti dall'encefalo.

8. Fra quelle, che occupano l'aſſe della baſe del cranio, v'è anteriormente la piatta e breve *apofiſi naſale di mezzo*,

9. La *parete oſſoſa obbliqua*, che ſoſtiene in alto e indietro il *tramezzo delle orbite*, e

10. La *creſta ſottile dentata*, ſoſtegno del *tramezzo delle narici*.

11. Alla eſtremità poſteriore dell' accennato *parete* ſi vedono elevate ſu due ſpecie di apofiſi due *faccette articolari* deſtinate ad agevolare i movimenti della *maſcella ſuperiore*, apparentiſſime nelle Oche e nelle Anitre

perchè vi si appoggiano due simili *faccette ovali* coperte di liscia cartilagine, proprie delle *appendici dei fucili interni* della medesima *porzion superiore del becco*.

12. Dietro alle *faccette articolari* dopo un breve intervallo vi è l' angolo anteriore della *tuberosità basilare*, eminenza considerabilissima fatta a guisa di triangolo, gli angoli posteriori della quale sono tronchi.

13. Tale *tuberosità* è longitudinalmente divisa per una *cresta* assai disuguale e scabra destinata all' attacco di varj muscoli, ed occupa un ampio sito fra le *faccette articolari*, le *apofisi mastoidee*, e la *occipitale*.

14. L' *apofisi occipitale* è liscia, pulita, quasi simile ad un *capezzolo ossoso*, coperta di cartilagine: sembra affissa al margine inferiore del *gran foro occipitale*, e alla base della *tuberosità occipitale* con la quale confina per mezzo d'una specie di *collo*.

15. Il *collo* della *apofisi occipitale* consiste in un *solco semilunare*, le corna del quale sono rivolte in su: vi si pianta un robusto *ligamento capsulare*, che unisce a tale apofisi la prima *vertebra*.

16. E' anche necessario, che vengano notate due piccole *spine ossose* sulla stessa linea delle *faccette articolari*, alquanto più verso la sommità della parte posteriore del *tramezzo*, fra questo e la faccia interna della radice delle *apofisi orbitarie posteriori*.

ARTICOLO III.

Cavità esteriori della faccia superiore del cranio.

1. Tra le cavità della faccia superiore del cranio delle Anitre si contano due grandi e profonde *incavature nasali* scolpite nella faccia inferiore delle porzioni nasali fra le apofisi dello stesso nome, le orbitarie inferiori anteriori, le orbitarie superiori, e la parte obbliqua, che le separa.

2. Due *foſſe naſali* ſulla parte anterior ſuperiore interna del tramezo delle narici ſotto la porzion naſale.

3. Due grandi foſſe dette le *orbite* ovali, profonde, ſeparate mediante il proprio loro tramezzo.

4. Le *incavature ſemilunari* tra le apofiſi orbitarie anteriori ſull' orlo delle orbite medeſime.

5. Seguono le *incavature traverſali* fra le apofiſi orbitarie poſteriori, e le faccette articolari.

6. Le *incavature temporali* tra le apofiſi orbitarie poſteriori, e le maſtoidee.

7. Le *articolari*, e

8. Le *auricolari*, *incavature* ſcolpite nella faccia concava delle apofiſi maſtoidee.

9. Le *incavature maſtoidee* tra le apofiſi di queſto nome, e i lati dell' ampia tuberoſità baſilare.

10. Vi ſono di più due ſtrette e lunghe *ſcanalature* con l'orlo eſteriore ſalbro, le quali cominciano tra le apofiſi naſali dei lati, e la naſal di mezzo, e ſi ſtendono ſulla volta delle foſſe naſali fino tra le apofiſi orbitarie ſuperiori, e il margine vicino anterior ſuperiore delle orbite.

ARTICOLO IV.

Cavità delle parti inferiori eſterne del cranio.

1. Alla faccia inferiore del cranio dei ſuddetti uccelli ſi veggono le *foſſe maſtoidee*, cioè due depreſſioni larghe e profonde che al davanti finiſcono in un angolo, laſciate da due *linee aſpre* aſſai rilevate, le quali partendo da una *creſta longitudinale tuberoſa*, regnante nel mezzo della tuberoſità baſilare, vengono ad unirſi con il lembo interno, ed anteriore delle apofiſi maſtoidee.

2. Queſte foſſe danno attacco a diverſi muſculi, e comunicano con la cavità del cranio mediante un *foro bipartito*, per la apertura anteriore del quale eſce il ner-

vo del *par vago*, per la diretana un groſſo ramo delle *vene jugulari*.

3. Le *aperture* diſtinte di due canaletti orizzontali deſtinati a dar uſcita dal cranio cadono ad un ramo principale del nervo del nono paro: aperture, che sboccano all'angolo anteriore della *tuberoſità baſilare*, e che poſſono prendere il nome dal nervo, che vi paſſa.

4. I *condotti* delle *carotidi* fatti a guiſa di corna: principiano al fianco eſterno dei canaletti ora deſcritti, e ſi circonflettono indentro, e in alto verſo la *foſſa pituitaria*. Guidano un ramo conſiderabile di tali arterie, che paſſando ſui fianchi della *glandula pituitaria* ſcorre obbliquamente indietro, e in alto per diramarſi nella baſe del cervello dietro all' *unione* dei *nervi ottici*.

5. La faccia poſteriore del cranio dietro dell' *arco oſſoſo* preſenta all' occhio un *triangolo* quaſi rettilineo, i lati del quale ſono fatti da due creſte, che dalla *ſpina occipitale* vengono a terminare nel lembo poſteriore delle *apoſiſi maſtoidee*.

6. Le parti poſteriori inferiori dei lati del triangolo radono il *foro occipitale*, il margine inferiore del quale è fatto dal *capezzolo occipitale* già mentovato.

7. Tra la *ſpina occipitale*, l' arco, e la radice delle *apoſiſi maſtoidee* vi ſono due larghe impronte muſculari aſſai incavate.

CAPITOLO III.

Soſtanza delle oſſa del cranio.

In tutte le deſcritte porzioni delle oſſa del cranio delle Oche, delle Anitre e degli altri uccelli in generale ſi diſtinguono due *tavole* ſode, fragili, bianche, e tra le medeſime un abbondante *meditullio*, eccetto nel centro del *tramezzo delle orbite*.

Il *meditullio*, detto pur *Diploe* dagli Anatomici, è negli uccelli un teſſuto ſpugnoſo più abbondante, e più raro alla *tuberoſità baſilare*, alla radice di tutte la apofiſi, ſu per tutta la *colonna*, che ſoſtiene il *tramezzo* delle *orbite*, maſſime dietro la *porzion naſale*.

Notabile altresì ne è l' abbondanza all' *arco*, dove (oltre che dà maggior leggierezza al cranio) ſerve anche a dare maggior energia all' organo dell' *udito* ampliandone i *labirinti*, e multiplicandone le concavità.

F I N E

Della prima parte del I. Tratt. dell' eſpoſizione anatomica delle parti relative all' Encefalo degli uccelli, la quale tratta delle parti eſteriori oſſoſe del cranio dei medeſimi.

ESAME CRITICO

Di un Problema di probabilità del Sig. DANIELE BERNOULLI, *e ſoluzione d'un altro Problema analogo al Bernulliano.*

Del Sig. GIO: FRANCESCO MALFATTI Profeſſore di Matematica nell' Univerſità di Ferrara.

1 DAppoichè i Matematici han conoſciuto il diritto, che ha la lor facoltà di eſtendere i ſuoi calcoli fin ſu la ſorte, e di preſagirne in qualche maniera gli eventi, aſſegnando a ciaſcuno il correſpettivo grado di probabilità, e dando un certo e determinato valore alla ſperanza e al timore, che l' uom dee avere ſu d'eſſi, non è mancato tra loro chi ſi applichi con tutta l'attenzione a queſta parte utiliſſima dell'umano ſapere; e noi ſiam debitori ai *Moivre*, ai *Monmort*, agli *Hugenj*, ai *Bernoullj*, e ad altri eccellenti ingegni de' veri principj, ſui quali eſſa è fondata, e delle regole, che coſtituiſcono l'equità in que' contratti, ne' quali entra il riſico e la dipendenza da ciò che ſi chiama caſo fortuito, accidentalità, fortuna. Di queſta ſpecie ſono i giuochi, maſſimamente d' azzardo, le aſſicurazioni, i vitalizj, le tontine, ed altre ſpeculazioni di ſimil tempera, che gli uomini ſi ſon tratte dal capo per non laſciar via intentata di migliorar le loro circoſtanze, e render più comodo il loro ſtato.

2. Avvegnachè però e molti ſiano ſtati i problemi di tal fatta che hanno ſciolto gli Autori, e parecchi ſian già i canoni che abbiamo, dotati di qualche generalità, ſotto cui tant' altri riduconſi che hanno affi-

nità

nità con quelli, de' quali è ſtata data la ſoluzione; sì è lontano che al dì d'oggi ſi poſſa dir la materia eſaurita, che non ſi cerca di conſiderar gli eventi della ſorte ſotto nuovi aſpetti, e s'immaginan nuovi contratti, e s'inventano nuovi giuochi, ſoventi volte pel ſol piacere d'indagar le leggi, con cui dovrebbero eſſere regolati in tale e tal caſo i depoſiti de' giocatori e i patti de' contraenti, affinchè ſi ſalvi interamente la giuſtizia e non intervenga alcuna leſione. Proporzionandoſi per sì fatto modo le corriſpoſte alle aſpettative degli eventi utili, ſi pareggiano di qua e di là le partite, e ſi coſtringe, dirò così, la fortuna ad eſſer giuſta nella diſtribuzione de' ſuoi favori.

3. Tra queſti inventori di nuovi problemi di probabilità ha voluto eſſere ancora annoverato il gran Geometra e Medico Sig. *Daniele Bernoulli*, ultimo de' tre illuſtri Fratelli, che hanno tanto arricchito le Matematiche colle ſublimi loro ſcoperte, del quale, tre meſi ſa, l'Europa letteraria ha pianto la morte ſeguita dopo una lunga carriera di meriti, e dopo ch' egli avea già sì doviziosamente provveduto colle ſue opere alla immortalità del ſuo nome. Il Problema, ch'ei ſi propone nel Tomo XIV. de' Comentarj della nuova Accademia di *Pietroburgo*, è uno de' più compoſti, ſe ſi conſidera in tutta la ſua eſtenſione, ma divien ſemplice, ſe ci fermiamo alla prima ipoteſi. Sentiam lui medeſimo, il quale così ci parla.

4. *Sint duæ, tres, pluresve urnæ, in quibus ſingulis ſchedulæ certo & æquali numero repoſitæ putentur, ſchedulæ autem uniuſcujuſque urnæ ſuo peculiari colore a ſchedulis reliquarum urnarum ab initio diſtinctæ ſint; tum porrò ſchedulæ ſucceſſive, ſorte tamen permutentur hac lege, ut quavis vice ex ſingulis urnis ſchedula una extrahatur, & deinde in urnam ordine ſequentem translocetur, illa autem, quæ ex urna ultimo loco poſita extracta ſit, in in primam reponatur: his ita poſitis, datoque permutatio-*

num præfato modo factarum numero, quæritur numerus schedularum cujusvis coloris, quæ probabiliter in quavis urna continebuntur. Quoties autem extractio ex singulis urnis simul facta fuit, simulque eo, quo dixi, modo in urnam sequentem schedula quævis transposita, integram istam operationem permutationis nomine indico. . . .

5. *Quamvis obvius sit calculus pro duabus urnis, eum tamen ob nexum, quem habebit cum sequentibus, apponam. Sint igitur in prima urna schedulæ albæ* n, *totidemque nigræ in urna altera. Erit secundum notas combinationum, atque probabilitatum regulas post primam permutationem numerus schedularum albarum in prima urna residuarum* $= n - 1$; *post secundam permutationem* $= \frac{(n-1)(n-2)}{n} + 1$; *post tertiam permutationem habebitur* $\frac{(n-1)(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1$; *post quartam* $\frac{(n-1)(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \frac{n-2}{n} + 1$; *post quintam* $\frac{(n-1)(n-2)^4}{n^4} + \frac{(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \frac{n-2}{n} + 1$, *& sic porro: inde colligitur, si generaliter numerus factarum permutationum fuerit* r, *atque ponatur brevitatis gratia* $\frac{n-2}{n} = m$, *fore numerum schedularum albarum in prima urna reliquarum* $= \frac{1 - m^{r-1}}{1-m} + (n-1)m^{r-2} = \frac{1}{2}n(1+m^r)$. *Dehinc reliquarum schedularum distributio per se intelligitur*. Da questa prima ipotesi passa poi alle altre più composte, e trova per queste pure le formole corrispondenti, nelle quali scopre infine una legge di progresso che gli fa stabilire il canone generale

per determinare il numero delle ſchedule colorate che rimangon nelle urne dopo qualſiſia numero di permutazioni.

6. Non dipartendomi dalla prima ſuppoſizione delle due urne, ſiccome l' Autore non accenna, per quale ſtrada ſia giunto a ritrovar le ſue formole, confeſſo di eſſermivi fermato ſopra alcun tempo, ſenza potere indovinare da qual raziocinio e da qual calcolo gli veniſſero ſomminiſtrate. Finalmente e' mi venne in capo, che poteſſe avere qualche analogia col ſuo problema delle ſchedole e delle due urne un altro problema di due botti A, B eguali di capacità, la prima delle quali ſia piena di vino e l'altra d'acqua. Levando dalla prima, e dalla ſeconda eguali miſure, poi fatta la permutazione, è chiaro che, ove la miſura ſi chiami 1, e n la quantità del fluido in ciaſcuna botte, riman nella botte A $n-1$ di vino e 1 d' acqua, accadendo preciſamente il contrario nella botte B. Per la ſeconda permutazione poi riflettendo, che nella miſura 1 di miſto, che cavo dal vaſo A, deve ſtare tutto il miſto al vino in quella proporzione medeſima, che oſſerva l'intero miſto al vino nella botte, trovo, che $\frac{n-1}{n}$ eſprime la quantità di vino tratto da A la ſeconda volta, onde il vin reſiduo in A alla metà dell' operazione diventa $n-1-\frac{(n-1)}{n}=\frac{(n-1)^2}{n}$. Paſſando poi al vaſo B, ſiccome in eſſo il vino è 1, l'analogia $n:1::1:\frac{1}{n}$ ci fa conoſcere, che $\frac{1}{n}$ è la quantità di vino tratto da B, il quale per terminare l' intera operazione va verſato in A. Dunque, eſeguita la ſeconda permutazione, avrò in A quantità di vino $\frac{(n-1)^2}{n}+\frac{1}{n}$, ovvero

$\frac{n^2+(n-2)^2}{2n}$, formola equivalente alla Bernulliana $\frac{(n-1)\,(n-2)}{n}+1$.

1. Replicando un simile raziocinio per la terza, quarta ecc. permutazione, si troverà per la terza il vino in $A=n^3\div\frac{(n-2)^3}{2n^2}$; per la $4^a=\frac{n^4+(-2)^4}{2n^3}$ ecc., onde pel num. indefinito r di permutazioni, sarà il vino residuo in $A=\frac{n^r+(n-2)^r}{n2^{r-1}}$, cioè (sostituito m in vece di $\frac{n-2}{n}$) $=\frac{n}{2}(1+m^r)$, che è appunto il canone del nostro Ch. Autore.

8. Assicuratomi per tal modo della identicità delle mie formole con quelle del num. 5., ho sospettato, che il Bernullio sciogliendo prima il problema delle botti, e appresso rivolgendosi all' altro delle schedole, abbia argomentato così. Distribuiscansi le schedole bianche e nere, che son nelle urne A, B dopo la prima permutazione, in tal maniera

A

bianche $n-1$: nere 1

B

nere $n-1$: bianche 1

E intraprendasi la seconda. Poichè in A sono le bianche $n-1$, e le nere 1, la parte probabile delle bianche che prendo è $\frac{n-1}{n}$, e la parte probabile delle nere è $\frac{1}{n}$, perchè queste due parti unite insieme fanno l'unica schedola che estraggo; e il quanto probabile delle bianche deve stare al quanto probabile delle nere, come il numero delle bianche al numero delle nere che son

nell' urna, nella qual ragione ſtanno appunto le parti $\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}$. Il perchè, ſottratto $\frac{n-1}{n}$ dal numero $n-1$ di bianche che eran nell' urna dopo la metà della 2ª operazione, ſarà probabile che reſtino in A ſchedole bianche $n-1-\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Con ſimile raziocinio, per l'altra metà dell'operazione, egli trova, che probabilmente ſi cava dall' urna B la parte $\frac{1}{n}$ di bianche, la quale meſſa in A coſtituiſce il numero probabile di ſchedole bianche in A, eſeguita che ſia la 2ª permutazione, $=n-1-\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{n}=\left(\frac{(n-1)(n-2)}{n}\right)+1$.

9. Proſeguendo poi alle permutazioni conſecutive, riſultano le altre formole e il canone del Bernullio, coſicchè altra differenza non vi ſarà tra il problema de' due fluidi e queſto delle ſchedole, che le formole nel primo rappreſentano le quantità certe e neceſſarie di vino che riman nella botte, laddove nel ſecondo colle medeſime formole ſi eſprime ſolo il quanto probabile delle ſchedole bianche che rimangon nell'urna.

10. Della giuſtezza di queſto o ſomigliante ragionamento, che poſſa aver fatto il Bernullio, fecemi dubitare un Corollario che ne diſcendeva, e ch'egli ſteſſo nota nel decorſo della ſua diſſertazione con queſte parole. *Quia* m *ſemper eſt unitate minor, evaneſcit terminus* m', *ſi* r *ſit numerus admodum magnus* (cioè infinito); *atque tum ſit numerus ſchedularum albarum in prima urna reſiduarum ſimpliciter* $=\frac{n}{2}$. *Status is eſt aſymptotos, ad quem, dum permutationes fiunt, magis magiſque pervenitur*..... Dunque, diceva io, ſe le ſchedole bianche nella prim'urna ſaran tre, ed una la ne-

ra ; e nella seconda abbianvi tre nere ed una bianca , vi vorranno infinite permutazioni, perchè io possa sperare di aver nella prim' urna due bianche, che sono precisamente la metà di tutte le bianche che abbiamo . Questa conseguenza mi parea duro di dover ammettere nel tempo che attesa la facilità di trar' una delle tre bianche dalla prim' urna , e simultaneamente una delle tre nere dalla seconda, non avrei dubitato di scommettere, che mi sarei ridotto alla metà dopo una sola permutazione.

11. S'accrebbe poi il mio dubbio , anzi terminai di convincermi della diversa indole de' due problemi , e dell' errore in che era caduto il Bernullio con questa semplice riflessione. Il problema de' due fluidi esige, che seguitando a permutare , il vino della prima botte vada necessariamente diminuendo; ed eseguita la prima permutazione , non son mai possibili i casi , che colle susseguenti si ritorni ad avere in essa quantità di vino $n-1$, e molto men tutto vino : al contrario nel problema delle schedole è possibile che nelle diverse permutazioni ora cresca , ora cali il numero delle schedole bianche , e dopo alcune operazioni potrebb' anche riuscir probabile, che rimanessero nella prim' urna schedole bianche $n-1$, o ad essa tutte le bianche venissero restituite. Ora tutti questi casi non potendo essere abbracciati, com'è evidente, dalla formola de' fluidi, perchè il problema li esclude, può mai darsi, che un' istessa formola regoli ambidue i quesiti, e mentr' essa esprime giustamente i residui di vino nella prima botte, possa valere eziandio ad esprimere gli avanzi probabili delle schedole bianche nella prim' urna?

12. L'uso del generale e incontrastabil principio, che regola siffatti problemi di probabilità farà anche veder più chiaramente l' inapplicabilità della suddetta formola. Egli è certissimo, per consenso di tutti i Geometri, che a stabilire il grado di probabilità competente a un

tale e determinato evento, voglionſi aver prima di tutto ſotto l'occhio tutti gli eventi poſſibili che appartengono al problema; ed aſſegnare poi a ciaſcun evento il numero delle combinazioni, che lo conducono. La proporzione, che paſſerà tra le combinazioni del dato evento, e la ſomma di quelle che appartengono agli altri, ſervirà a determinarne il grado di probabilità, coſicchè ſe eguali rieſcano queſti numeri di combinazioni, ſi potrà ſcommettere in pari e dir del tutto probabile quell'evento che s'è chiamato.

13. Ciò poſto, ſoſtituendo nel problema del Bernullio le palle alle ſchedole, che è il medeſimo, trattiamo il problema inverſo, e cerchiam quante combinazioni favorevoli, e quante contrarie ſi abbiano per laſciare nell'urna A un dato numero di palle bianche dopo aver compiuto qualſiſia dato numero di permutazioni; delle quali per me ſarà ſempre prima quella che ſi fa, quand'abbiam già nell'urna A palle bianche $n-1$ con una nera, e palle nere $n-1$ con una bianca nell'urna B.

14. Prima di tutto però premetto il ſeguente generaliſſimo

Lemma.

Siano in A palle bianche $n-p$, palle nere p; e in B palle nere $n-p$, palle bianche p. Cavando una palla da A, un'altra da B e permutando una volta alla maniera Bernulliana, può avvenire, che ſi trovino in A palle bianche $n-p-1$, ovvero $n-p$, o finalmente $n-p+1$. Fuori di queſti tre caſi, neſſun altro è poſſibile, ſiccome è chiaro. Ora io dico, che per ottenere in A palle bianche $n-p-1$, avrò combinazioni favorevoli $(n-p)^2$; per palle bianche $n-p$, combinazioni favorevoli $2p(n-p)$; finalmente combinazioni favorevoli p^2 per palle bianche $n-p+1$. Si diſpongan così le palle delle urne.

A

palle bianche $n-p$ nere p

B

nere $n-p$ bianche p.

Se da A cavo una bianca, e da B una nera, alla fine della permutazione io ho in A palle bianche $n-p-1$. Ma ciò si può ottenere, ove qualunque delle bianche $n-p$ di A si combini con qualunque delle nere $n-p$ di B; e il numero di queste combinazioni favorevoli è $(n-p)^2$. Dunque ecc. Similmente perchè in A rimangano palle bianche $n-p$, anche fatta la permutazione, è necessario o ch' io levi una nera da A, e un' altra nera da B, o una bianca da A e un' altra bianca da B. Ma per ciò abbiamo tante maniere, quante nascono dal combinare il numero di bianche $n-p$ che sono in A col numero di bianche p che sono in B, e dal combinare le nere p di A colle nere $n-p$ di B. Dunque $p(n-p)+p(n-p)$ cioè $2p(n-p)$ sarà il numero delle combinazioni utili per l' evento di bianche $n-p$ nell' urna A. Da ultimo ad aver palle bianche $n-p+1$, fa di mestieri che una delle nere p di A si associ con una delle bianche p di B; il che si può fare in numero p^2 di maniere. Dunque p^2 saranno i casi favorevoli a questo terzo avvenimento; e resta compiuta la dimostrazione.

15. Raccoglieremo dal presente Lemma, che chiamato un de' tre casi di palle bianche, che possono aver luogo nella permutazione, mi saranno contrarie tutte le combinazioni, che favoriscono gli altri due eventi. Avanti di permutare io chiamo, per esempio, in A palle bianche $n-p$, caso che ha di combinazioni utili $2p(n-p)$. Dunque le combinazioni, che mi sono contrarie, sono $(n-p)^2$, e p^2, le quali menano gli altri due casi $n-p-1$, $n-p+1$, e la probabilità, che ho d' indovinar l' evento nominato, alla opposta sta come $2p(n-p) : (n-p)^2+p^2$; la qual proporzione troverem pure con quest' altro semplicissimo raziocinio.

Poichè

Poichè n è l' intero numero delle palle bianche, e parimente n l' intero numero delle nere nelle due urne, ſarà n^2 il numero di tutte le poſſibili combinazioni. Sottratte pertanto da n^2 le combinazioni favorevoli a un dato caſo di bianche, ſi avran le contrarie. Onde le contrarie al caſo di bianche $n-p$, che ne ha di utili $2p(n-p)$, ſarà $n^2-2p(n-p)$, formola identica coll' anzidetta $(n-p)^2+p^2$. Sicchè dato il numero delle combinazioni favorevoli, ſi ha toſto il numero delle avverſe; e così al contrario.

16. Queſt' ultima maniera di trovare il numero delle combinazioni contrarie, dato quel delle favorevoli a un certo evento, per una ſola permutazione, può eſtenderſi ancora al caſo di qualſivoglia numero di permutazioni, ragionando così. Sono n^2 tutte le combinazioni di palle che appartengono a ciaſcuna permutazione in particolare; e ciaſcuna delle combinazioni, che ammette la prima permutazione, può combinarſi con ciaſcuna combinazione ricevuta dalla ſeconda permutazione. Dunque il numero totale delle combinazioni, che riſguardano due permutazioni, ſarà $n^2 \times n^2 = n^4$. Andando innanzi col diſcorſo, per tre permutazioni, troveremo eſſere il numero delle combinazioni $= n^4 \times n^2 \times n^2 = n^6$; per quattro, n^8, e generalmente n^{2m} per numero m di permutazioni. Quindi poſto che ſia N il numero *v. g.* delle combinazioni contrarie all' evento Φ in permutazioni m, ſarà $n^{2m}-N$ il numero delle favorevoli; e ſe N ſarà il numero delle favorevoli, $n^{2m}-N$ ſarà quello delle contrarie.

17. Un altro vantaggio trarrem dal Lemma, e da' ſuſſeguenti §§, che conſiſte nella maniera di rintracciare i numeri delle combinazioni o favorevoli o contrarie a un evento per un dato numero di permutazioni $= m$. Siano gli eventi poſſibili $\alpha, \beta, \gamma \ldots \Phi$. Conſideriamo in due diverſe maniere il Problema delle due urne. O ſi ſcommette, che almeno in una delle permutazioni m

ſi avrà in A l' evento ϕ, o ſi chiama lo ſteſſo evento ϕ dopo aver eſeguite tutte le permutazioni. Nel primo caſo, le combinazioni di ciaſcun evento α, β, γ.... per tutte le poſſibili ſucceſſioni di uno all' altro dovran combinarſi con quelle dell' evento ϕ, poſto in tutti quei luoghi di prima, ſeconda, terza ecc. permutazione, ne' quali può entrare: e l' aggregato de' prodotti di queſte ſteſſe combinazioni darà il numero delle favorevoli a ϕ. Ecco un eſempio. Suppoſte in A palle bianche $n-1$, nere 1, e al contrario in B, domando due permutazioni per avere in A o alla prima o alla ſeconda palle bianche $n-2$, e cerco, quanto ſia probabile queſto avvenimento.

18. Fatto nel Lemma $p=1$, ſi vedrà a un tratto, che gli eventi della prima permutazione non poſſon eſſer che tre

$$1.^{\circ}\ n-2$$

palle bianche in A $2.^{\circ}\ n-1$. Se nella ipoteſi del ri-

$$3.^{\circ}\ n$$

ſultato $n-2$, alla ſeconda permutazione ſi cava bianca, e ſi mette bianca, anche dopo la ſeconda permutazione ſi ha di bianche $n-2$. Devonſi pertanto accoppiare queſti due eventi e ſcrivere $\overset{n-2}{n-2}$. Il primo appartiene alla prima permutazione e l' altro alla ſeconda. Mantenuta l' ipoteſi del primo evento $n-2$, può accadere, che nella ſeconda permutazione io levi nera, e metta bianca. In tal caſo le bianche dallo ſtato $n-2$ paſſano allo ſtato $n-1$, e dovran così ſcriverſi $\overset{n-1}{n-2}$; e con ciò l' ipoteſi del primo evento $n-2$ reſta eſaurita, perchè a $n-2$ non può ſuccedere nè n nè qualunque altro numero ſuperi o manchi di due unità, riſpetto allo ſteſſo numero $n-2$

19. Accettiam' ora l' altra ipoteſi del primo evento $n-1$. Per ciò che s'è detto, è chiaro, che può eſſe-

re ſuſſeguito e dall'evento $n-2$, e dall'evento n, e dal nuovo evento $n-1$. Queſti due ultimi caſi non ſan per noi, perchè, non trovandoſi nè nella prima, nè nella ſeconda permutazione, il numero $n-2$, ci ſono eſſi contrarj. Si dovrà quindi tener conto della ſola union degli eventi $n-1$, $n-2$, e ſcrivere $n-1$.
$n-2$

2o. La terza ipoteſi ſuppone il primo evento n, cui non può mai tener dietro $n-2$ eſſendo neceſſariamente il ſecondo evento $n-1$. Dunque tre ſoli ſono gli accoppiamenti utili che riſultar poſſono dalle due permutazioni; $n-2$; $n-2$; $n-1$.
$n-2$ $n-1$ $n-2$

Reſta ora che troviamo i numeri delle combinazioni. Per far queſto, ci dobbiam ricordare, che lo ſtato primitivo delle palle bianche in A era $n-1$. Dunque volendoſi, che dopo la prima permutazione diventin le bianche $n-2$, in vigore del Lemma avrem combinazioni favorevoli $(n-1)^2$. Dallo ſtato $n-2$ paſſino le bianche nella ſeconda permutazione al novello ſtato $n-2$. Poichè il Lemma c'inſtruiſce che per averſi replicatamente in A palle bianche $n-p$ abbiam combinazioni propizie $2p\,(n-p)$, ſi fa chiaro, che $4(n-2)$ eſprimerà il numero delle maniere diverſe, con cui può ritornare lo ſtato $n-2$ nella ſeconda permutazione. Ai due ſucceſſivi eventi $n-2$ uniamo lateralmente in colonna i numeri delle combinazioni corriſpondenti
$n-2$ $(n-1)^2$, e argomentiamo così. In numero di
$n-2$ $4(n-2)$
maniere $(n-1)^2$ ſi può far tranſito dallo ſtato primitivo di palle bianche $n-1$ allo ſtato $n-2$. Ma a ciaſcuna delle maniere $(n-1)^2$ corriſponde un numero di maniere $4(n-2)$, per paſſare dallo ſtato $n-2$ della prima permutazione al nuovo ſtato $n-2$ della ſeconda. Dunque, componendo, per paſſare dallo ſtato primitivo $n-1$ ai due ſtati ſucceſſivi $n-2$, $n-2$, avrem

maniere o combinazioni utili, che si esprimeranno col prodotto delle combinazioni rispettive cioè con $4(n-1)^2(n-2)$. Un simile raziocinio ci farà conoscere, che al secondo accoppiamento $n-2$ corrispondono combinazioni utili $4(n-1)^{n-1}$; e al terzo $n-1$ combinazioni utili $2(n-1)^{n-2}$. Sarà quindi il numero totale delle combinazioni che menano l'evento $n-2$ o nella prima o nella seconda permutazione $= 4(n-1)^2(n-2) + 4(n-1)^2 + 2(n-1)^3$; e la probabilità del suddetto evento alla probabilità contraria farà come $4(n-1)^2(n-2) + 4(n-1)^2 + 2(n-1)^3 : n^4 - 4(n-1)^2(n-2) - 4(n-1)^2 - 2(n-1)^3$.

21. Ciò che s'è detto per due permutazioni può estendersi a tre, quattro ecc. fino al numero indefinito m. Si scriveranno pertanto in colonna tanti eventi successivi quanti porta il numero m, e in altra lateral colonna si porran per ordine i rispettivi numeri delle combinazioni, che conducono ciascuno de' suddetti eventi: si farà quindi il prodotto di questi numeri, e ciò che ne risulta, esprimerà le combinazioni favorevoli ad aversi i dati eventi secondo l'ordine con cui son posti per le successive permutazioni. All'ordine d'eventi $\alpha, \beta, \gamma \ldots \phi$ corrispondano le combinazioni $a, b, c \ldots p$; si formeran le colonne di questi numeri così $\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \\ \gamma & c \\ \vdots & \vdots \\ \phi & p \end{matrix}$, e il prodotto $abc \ldots p$ darà il numero delle combinazioni, che menano la successione degli eventi $\alpha, \beta, \gamma \ldots \phi$.

22. Ove poi si domandi di aver l'evento ϕ alla fine dell'intero numero m delle richieste permutazioni; che è la seconda maniera di considerare il problema delle due urne da noi accennata nel §. 17. ed è quella ap-

punto del Bernullio, converrà avvertire, che ad adempire queſta condizione più anguſta, nella formazione delle colonne talmente debbonſi aſſociare i ϕ o con sè ſteſſi, o cogli altri eventi α, β, γ ...., che un ϕ rimanga ſempre nell'ultima ſede che corriſponde all'ultima permutazione. Diſpoſti così gli eventi, le colonne laterali ci ſomminiſtreranno i numeri delle combinazioni favorevoli all'evento ϕ nell'urna A dopo che ſi ſon terminate tutte le permutazioni. E ſe piace di aver le combinazioni contrarie, prima di aver trovate le favorevoli, il che qualche volta è più comodo, talmente ſi formeran le colonne degli eventi, che non ſi trovi mai all'ultima ſede l'evento ϕ. Tutto ciò è chiariſſimo, nè ha biſogno che vi ci fermiam ſopra più lungamente.

23. Si domandi ora il numero delle combinazioni favorevoli ad averſi l'evento $n-2$ di bianche nell'urna A dopo che ſi ſono eſeguite due permutazioni. Scritte le colonne degli eventi ſucceſſivi coll'avvertimento del §. precedente, e anneſſevi le laterali delle combinazioni, abbiamo

$$\begin{array}{l|l} n-2 \quad (n-1)^2 & n-1 \quad 2.(n-1) \\ n-2 \quad 4(n-2) & n-2 \quad (n-1)^2 \\ n-2 \quad (n-1)^2, & \\ n-1 \quad 4 & \end{array}$$

La terza colonna che ci era utile quando il problema era eſpoſto nella prima maniera, qui ci è contraria, perchè non ci giova che ſia riuſcito $n-2$ nella prima permutazione, e ci fa danno il trovarſi l'evento $n-1$ alla fine della ſeconda. Dunque le combinazioni favorevoli all'evento $n-2$ dopo due permutazioni ſaranno $= 4(n-1)^2(n-2) + 2(n-1)^3$, e in conſeguenza le contrarie $= n^4 - 4(n-1)^2(n-2) - 2(n-1)^3$ $= n^4 - 6n^3 + 22n^2 - 26n + 10$.

24. Vogliaſi lo ſteſſo evento $n-2$ dopo tre permutazioni. Per ſaper le combinazioni favorevoli che menano queſto avvenimento, ſcriverem le colonne degli even-

ti a tre a tre con $n-2$ all' ultima fede, e le corrifpondenti colonne laterali.

Queſte fono n 1 | $n-1$ $2(n-1)$ | $n-1$ $2(n-1)$ | $n-2$ $(n-1)^2$
$n-1$ n^2 | $n-1$ $2(n-1)$ | $n-2$ $(n-1)^2$ | $n-1$ 4
$n-2$ $(n-1)^2$ | $n-2$ $(n-1)^2$ | $n-2$ $4(n-2)$ | $n-2$ $(n-1)^2$

$n-2$ $(n-1)^2$ | $n-2$ $(n-1)^2$ |
$n-2$ $4(n-2)$ | $n-3$ $(n-2)^2$ | . Onde le combinazioni favore-
$n-2$ $4(n-2)$ | $n-2$ 9 |

voli fono in tutto $n^2(n-1)^2+4(n-1)^4+8(n-1)^3+4$
$(n-2)+16(n-1)^2(n-2)^2=+2n^4+9-224n^3+446n^2$
$-388n+124$; e le contrarie $=n^6-42n^4+224n^3$
$-446n^2+388n-124$.

25. Chi avrà la pazienza di rintracciare i numeri delle combinazioni contrarie all'evento $n-2$ dopo 4, 5 ecc. permutazioni, cominciando da $2n-1$, che denota le combinazioni contrarie per una fola permutazione, troverà la feguente ſerie;

perm. 1; perm. 2 perm. 3
$2n-1$; $n^4-6n^3+22n^2-26n+10$; $n^6-42n^4+224n^3-446n^2+388n-124$;
perm. 4 perm. 5
$n^8-320n^5+2360n^4-6968n^3+10192n^2-7320n+2056$; $n^{10}-2715n^6+26410n^5$
$-107591.n^4+232780.n^3-279700n^2+175664n-44848$; ecc.

26. Queſta ſerie diventa una ricorrente di ſecondo grado, ove pongaſi $n=2$; i ſuoi termini ſono 3, 14, 52, 216, 848 ecc. i moltiplicatori, che la producono, 8, 2; e il termine generale $\frac{2^{m-1}}{3}(5.2^m+(-1)^m)$, ſignificando m il numero de' termini, oſſia delle permutazioni. Sicchè il numero generale delle combinazioni favorevoli ad averſi in A palle bianche $n-2$, cioè neſſuna bianca, farà $2^{2m}-\frac{2^m-1}{3}(5.2^m+(-1)^m)$. Per qualunque numero di permutazioni non può mai eſſer probabile il caſo, che non reſti in A alcuna palla bianca.

perchè sarebbe d'uopo, che uguagliandosi i numeri generali delle combinazioni favorevoli ed avverse, potesse risultare m reale e positivo. Con tale adeguamento siami guidati alla equazione $2^{m+1}+(-1)^m=0$, che è impossibile ed assurda, nella supposizione che m sia un numero positivo o intero o rotto, o finito o infinito. Dunque ecc.

27. In genere però la nostra serie è una ricorrente di grado sicuramente superiore al quarto, atteso l'esperimento che ne ho fatto, e in conseguenza di difficil maneggio. Nondimeno essa, anzi il suo primo termine solo può bastare a far conoscere l'error Bernulliano. Si faccia l'ipotesi di $n=4$, che dà $n-2=2$. Poichè 2 è la metà delle palle bianche, che abbiamo, per la Teoria Bernulliana, partendosi dallo stato primitivo delle 3 bianche e 1 nera nell'urna A, sarà necessario permutare infinite volte, affinchè si renda probabile, che rimangano in A due bianche; ed ogni numero finito di permutazioni renderà improbabile questo avvenimento. Ma la probabilità d'un evento induce l'eguaglianza tra il numero delle combinazioni, che menano quell'evento, e il numero delle contrarie; e l'improbabilità dello stesso evento importa che il numero delle sue combinazioni favorevoli sia sempre minore del numero delle avverse. Dunque per qualunque finito numero di permutazioni, le combinazioni favorevoli ad averli 2 bianche saranno meno delle contrarie. Veggasi ora che risulti dall'anzidetta serie. Fatto, come si è detto, $n=4$, avremo per la prima permutazione combinazioni contrarie 7; per 2 permutazioni, 130; per 3 permutazioni, 1972 ecc. Ora essendo l'intero numero delle combinazioni di tutte le palle, per una permutazione $=16$, per 2 permutazioni $=256$, per 3 permutazioni $=4096$ ecc., saranno le favorevoli per una permutazione $=16-7=9$; per 2 permutazioni $=256-130=126$; per 3 permutazioni $=4096-1972$

$= 2124$ ecc. Dunque tanto è lontano, che ſi eſigano per la probabilità delle due bianche infinite permutazioni, che anzi, eſeguita ſolo la prima, è più che probabile, che mi rimangano in A queſte due bianche, avendo per me 9 combinazioni propizie contro 7 contrarie. Queſto vantaggio di maggior probabilità, che mi manca in due permutazioni, perchè ho 126 combinazioni a favore, e 130 contro, mi ritorna nelle 3 permutazioni, e mi ſeguita per tutta la ſerie. Dunque ad indurre la probabilità per l'evento di due bianche, cioè a far naſcere l'eguaglianza tra le combinazioni proſpere e ſiniſtre, vi vorrà un numero di permutazioni che ſia medio o tra l' 1 e il 2, o tra il 2 e il 3, ma non già un numero infinito, come pretende il *Bernullio*.

28. Da tutto ciò parmi di poter concludere legittimamente, che il principio, di cui ſi ſerve il *Bernullio*, non è quello che dee preſiedere alla ſoluzione del ſuo problema; che le altre ſue formole eziandio, le quali dipendono dallo ſteſſo principio, e corriſpondono alle ſuſſeguenti ipoteſi di più di due urne, debbono eſſere conſiderate come illegittime, e inducenti ad errore; in una parola, che il problema delle ſchedole è di una natura ben differente da quello de' fluidi, e va trattato in una maniera molto diverſa dalla Bernulliana.

29. Ricuſata come inſuſſiſtente la riſoluzione del Geometra di Baſilea, potrebbe parere ad alcuno, che io non poteſſi diſpenſarmi dal ſoſtituirvi la vera; ed io pur veggo, che ciò ſarebbe aſſai conveniente; ma nè le mie occupazioni, nè il tempo preſcritto dall' illuſtre Raccoglitore delle preſenti Memorie alla edizione di queſto primo Tomo mi han permeſſo di applicarmi col comodo neceſſario ad una indagine, che debb'eſſere d'un' eſtrema difficoltà. Potrebbeſi però valutare come opera in qualche maniera ſatisfattoria dell' obbligo ch' m' impone la critica fatta al noſtro celebre Autore, il preſentarmi in queſto Libro colla ſoluzione del problema accennato

accennato al §. 17, il quale con poca differenza dal Bernulliano è ſtato da me immaginato anche prima di leggere il Tomo XIV. de' *Comm. di Pietroburgo*; dimenticato poi ne' miei quaderni ſtava aſpettando la mia reminiſcenza e l' occaſione di veder la pubblica luce. Queſt' è quello che or m' accingo di fare, ſperando che il metodo, di cui mi ſervo, poſſa eſſer utile a chi prendeſſe per le mani o il problema del *Bernoulli*, od altri che gli ſian ſimili. Se queſto metodo non è sì ſemplice, come avrei deſiderato, varrà a ſcuſarmene la difficoltà d' un queſito, che è del numero di que' problemi di probabilità, che ſi chiamano di eventi dipendenti, ordinariamente aſſai più ſcabroſi e intralciati de' problemi di eventi indipendenti, i quali ſpeſſo ſomminiſtran formole elegantiſſime e non ſperabili in quelli dell'altra claſſe.

30. Siano dunque due urne A, B, ciaſcuna delle quali abbia palle n, la prima bianche, la ſeconda nere. Ridotto lo ſtato delle palle colla prima operazione ad eſſer queſto che chiamerem primitivo; bianche in $A = n-1$; nere $= 1$, e al contrario in B, ſi cercano le combinazioni favorevoli e contrarie ad averſi nell' urna A un dato numero di palle bianche dentro un dato numero di permutazioni. Per procedere con ordine, comincio dal

PROBLEMA I.

31. *Si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad averſi in* A *con una ſola permutazione palle bianche* $n-2$.

Poichè ſon tre ſoli i caſi di bianche in A, che poſſono aver luogo; primo che torni $n-1$; ſecondo che ſi rimetta n; terzo che rimangano $n-2$; i caſi contrarj ſaranno i due primi; $n-1$, n. Ma pel Lemma, fatto in eſſo $p = 1$, all'evento $n-1$ corriſpondono combinazioni $2(n-1)$, e all'evento n combinazio-

ni 1. Dunque il numero delle combinazioni contrarie all'evento $n-2$ in una sola permutazione farà $2(n-1)+1$.

PROBLEMA II.

32. *Si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad averſi in* A *palle bianche* n—2 *o nell'una o nell'altra di due conſecutive permutazioni.*

Notiamo le colonne degli eventi contrarj e delle riſpettive combinazioni, com'è ſtato avvertito al §. 23.

$$\begin{array}{cc|cc|cc} n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & n^2 & n & 1 & n-1 & 2(n-1) \end{array}.$$

Fatti perciò i prodotti de' numeri delle combinazioni in ciaſcuna colonna, ſaprem ſubito, eſſere il numero totale delle combinazioni contrarie; $n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$.

PROBLEMA III.

33. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *palle bianche* n—2 *nel caſo di tre conſecutive permutazioni.*

Tutto ſi riduce a notar le doppie colonne per gli eventi infauſti, ſenza ommetterne alcuna. Pel noſtro problema eſſe ſon le ſeguenti;

$$\begin{array}{cc|cc|cc} n & 1 & n & 1 & n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & n^2 & n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1) \\ n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) \\ n & 1 & n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1) \end{array}.$$

Dunque il numero delle combinazioni contrarie è $n^3+4n^2(n-1)+4(n-1)^2+8(n-1)^3$.

PROBLEMA IV.

34. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *palle bianche* n—2 *nel corſo di quattro conſecutive permutazioni.*

Fatte al solito le colonne per gli avvenimenti finistri, esse risultano così.

n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	n	1
$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	n^2	n	1
n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2		

$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	$2(n-1)$

dalle quali si rileva, essere il numero delle combinazioni contrarie; $n^4 + 4n^2(n-1)^2 + 12n^2(n-1)^2 + 8(n-1)^3 + 16(n-1)^4$.

PROBLEMA V.

35. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *palle bianche* $n-2$ *nel corso di cinque consecutive permutazioni.*

Ecco le 13 colonne insieme colle laterali, che ci presentano la soluzione di questo Problema.

n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$				
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1				
n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2				
$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$				
n	1	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	n	1				

$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1

$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$

I prodotti de' numeri delle laterali somministrano le combinazioni contrarie con questa formola; $n^4+6n^4(n-1)+12n^2(n-1)^2+32n^2(n-1)^3+16(n-1)^4+32(n-1)^5$.

36. Ponghiam per ordine le combinazioni contrarie dalla prima fino alla quinta permutazione, e ci nascerà questa serie; $1+2(n-1)$; $n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$; $n^2+4n^2(n-1)+4(n-1)^2+8(n-1)^3$; $n^4+4n^2(n-1)+12n^2(n-1)^2+8(n-1)^3+16(n-1)^4$; $n^4+6n^4(n-1)+12n^2(n-1)^2+32n^2(n-1)^3+16(n-1)^4+32(n-1)^5$; ecc., la quale è una ricorrente di secondo grado; e i suoi moltiplicatori sono $2(n-1)$; n^2, cosicchè il primo $2(n-1)$ sia quello che moltiplica il termine antecedente al termine ricercato. Intendendo che la suddetta serie sia continuata anteriormente, supponiamo che siano u, t due termini innanzi al primo $1+2(n-1)$. Sarà dunque $n^2t+2(n-1)+4(n-1)^2=n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$, ovvero, eliminate le quantità che si distruggono; $n^2t=n^2$, cioè $t=1$. In oltre avremo $n^2u+2(n-1)=1+2(n-1)$, ovvero $u=\frac{1}{n^2}$. Onde i due termini innanzi al primo sono $\frac{1}{n^2}$; 1; e questi si denomineranno in appresso l' appendice della serie.

37. Divien facile in questa serie il passar dai moltiplicatori al termine generale. Poichè ella è di secondo grado, chiamato m il numero de' termini o delle permutazioni, il suo termine generale veste questa forma; ap^m+bq^m. Ora la teoria delle ricorrenti c' insegna, che vagliono queste due equazioni; $p+q=2(n-1)$; $-pq=n^2$, dalle quali si trae $p=n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)}$; $q=n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)}$. Sostituiti pertanto questi valori nel termine generale, si fa esso $a\left(n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^m+b\left(n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^m$.

Per la determinazione poi delle ſpecie a, b, farem ſucceſſivamente le due ipoteſi di $m=1$, e di $m=2$. Colla prima dovrà eſſere $a\left(n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)+b\left(n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)=1+2(n-1)$; e colla ſeconda; $a\left(n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^2+b\left(n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^2=n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$. Queſte due equazioni ci fanno conoſcere i valori delle due ſpecie a, b, e ſi trova $a=\frac{\sqrt{((n-1)^2+n^2)}+n}{2\sqrt{((n-1)^2+n^2)}}$; $b=\frac{\sqrt{((n-1)^2+n^2)}-n}{2\sqrt{((n-1)^2+n^2)}}$, così che il numero indefinito delle combinazioni contrarie ad averſi in A palle bianche $n-2$ almeno in una delle permutazioni m diverrà

$$=\frac{\left(\sqrt{((n-1)^2+n^2)}+n\right)\left(n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^m}{2\sqrt{((n-1)^2+n^2)}}+\frac{\left(\sqrt{((n-1)^2+n^2)}-n\right)\left(n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^m}{2\sqrt{((n-1)^2+n^2)}}.$$

Se queſto per comodo ſi chiami P, ſi avrà a un tratto il numero indefinito delle combinazioni favorevoli, che farà $n^{2m}-\Upsilon$, onde inſtituita l' equazione $n^{2m}-\Upsilon=\Upsilon$, oſſia $n^{2m}=2\Upsilon$, il valore di m eſatto o proſſimo eſprimerà il numero delle permutazioni che domandar ſi debbono, affinchè ſi poſſa ſcommettere eſattamente o proſſimamente in pari, che almeno in una di eſſe avrà luogo l' evento $n-2$.

38. Ciò però ſi può ancora ottenere nelle diverſe ipoteſi numeriche de' valori di n collo ſcrivere una ſotto l' altra le ſerie delle combinazioni favorevoli e contrarie, ſenza ricorrere ai termini generali. Sia $n=2$; in tale ipoteſi ſono i quattro primi termini delle combinazioni contrarie ; 3 , 10 , 32 , 104 ecc. e i corriſpondenti delle favorevoli 1 , 6 , 32 , 152 ecc. In queſte due ſerie i terzi termini ſono eguali. Dunque ſono eſattamente tre le permutazioni , che menano probabilmente una volta l' evento di bianche $n-2$, oſſia di

bianche zero nell' urna *A*. Sia $n=3$. Le due serie per questa ipotesi sono 5, 29, 161 ecc. Per una sola permutazione ho 5 combinazioni contrarie e 4 favorevoli; per due ne ho 52 di favorevoli e 29 di contrarie; 4, 52, 568 ecc.
conseguentemente giocando in pari, ho danno se domando una sola permutazione, e vantaggio se ne domando due; il che vuol dire, che il numero di permutazioni atto a render probabile l' evento $n-2$ ossia 1 di bianche è medio tra l' uno e il due.

PROBLEMA VI.

39. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averfi in* A *palle bianche* $n-3$ *in una fola permutazione.*

Poichè lo ftato primitivo dell' urna *A* è di racchiuder bianche $n-1$, fi vede fubito, che in una fola permutazione non è poffibile di paffare allo ftato di bianche $n-3$; e però tutte le combinazioni delle palle, che fono n^2, ci diventan contrarie, e il numero delle favorevoli farà $=0$.

PROBLEMA VII.

40. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averfi almeno una volta in* A *palle bianche* $n-3$ *o nell' una o nell' altra di due permutazioni.*

Tutti gli accoppiamenti degli eventi contrarj all' evento $n-2$ di bianche in due permutazioni fono anche contrarj all' evento $n-3$. In oltre tutti gli accoppiamenti favorevoli ad ottener bianche $n-2$ in due permutazioni, detratti quelli, ne' quali entra l' evento $n-3$, fon pur contrarj a queft' ultimo avvenimento. Ma in una fola maniera può affociarfi $n-2$ con $n-3$, che è queffa: $n-2$, cui corrifponde di combinazioni

$n-3$

$(n-1)^2$. Dunque la somma delle combinazioni con-
$(n-2)^2$
trarie e favorevoli pel caso di bianche $n-2$ in due permutazioni, meno il prodotto $(n-1)^2(n-2)^2$ darà la somma delle contrarie all' avvenimento $n-3$. Ma la somma delle contrarie e favorevoli per bianche $n-2$ in due permutazioni è n^4. Dunque le contrarie pel caso di $n-3$ sono $n^4-(n-1)^2(n-2)^2$, ovvero $6n^3-13n^2+12n-4$.

PROBLEMA VIII.

41. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *bianche* $n-3$ *nel corso di tre permutazioni.*

Ragionando, come abbiam fatto pel precedente Problema, concluderemo, che il numero delle combinazioni contrarie da noi ricercato sarà eguale a n^6 meno i prodotti delle combinazioni, che corrispondono alle colonne degli eventi, ne' quali entra $n-3$; le quali unite alle laterali son le seguenti;

$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$.

Il perchè le combinazioni contrarie diventano in tutto $n^6-2(n-1)^3(n-2)^2-4(n-1)^2(n-2)^3-9(n-1)^2(n-2)^2-6(n-1)^2(n-2)^2(n-3)-(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2$, ovvero $33n^5-126n^4+198n^3-144n+40$.

PROBLEMA IX.

42. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *bianche* $n-3$ *nel corso di quattro permutazioni.*

Sono 20 le colonne laterali a quelle degli eventi, in cui entra $n-3$, le quali ci somministrano i prodotti che si debbon sottrarre da n^8 per determinare le com-

binazioni contrarie richieste dal presente problema. Eccole per ordine:

n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	4	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	9
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-1$	4

$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-2$	$4(n-2)$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$(n-1)^2$

$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$
$n-2$	9	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-3$	16

$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-2)^2$
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$
$n-4$	$8(n-4)$	$n-5$	$(n-4)^2$

Si trarrà quindi, dopo la riduzione de' termini, il numero delle combinazioni contrarie $= 176n^5 - 943n^4 + 2132n^3 - 2484n^2 + 1472n - 352$.

43. Andando innanzi colla ricerca, ci verrà fatto di scoprire, che preso cominciamento dalla prima del Problema VI., le quattro formole ritrovate; n^2; $6n^3 - 13n^2 + 12n - 4$; $33n^4 - 126n^3 + 198n^2 - 144n + 40$; $176n^5 - 943n^4 + 2132n^3 - 2484n^2 + 1472n - 352$; sono i 4 primi termini di una ricorrente di terzo grado, i cui moltiplicatori posti ordinatamente sono; $6n - 10$; $-3n^3 + 16n - 12$; $-4n^3 + 8n^2$. Questa serie pure avrà l'appendice de' due termini $\frac{1}{n^2}$, 1 innanzi al primo così che la serie coll' appendice sarà $\frac{1}{n^2}$; 1; n^2; $6n^3 - 13n^2 + 12n - 4$. ecc.

PROBLEMA

PROBLEMA X.

43. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 4 *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni.*

Conſidero queſto Problema in tutta la ſua generalità, non potendoſi più ignorare dopo gli eſempj de' ſuperiori Problemi, come ſi debba procedere anche qui per inveſtigare le combinazioni contrarie che ſpettano alle ipoteſi di 1, 2, 3 ecc. permutazioni. Io le ho partitamente eſaminate ſino a quel ſegno che mi faceva conoſcere la legge della ſerie, della quale noto i primi 4 termini.

1; n^2

2; n^4

per permut. 3; $12n^5 - 58n^4 + 144n^3 - 193n^2 + 132n - 36$

4; $114n^6 - 888n^5 + 3159n^4 - 6216n^3 + 6952n^2 - 4128n + 1008$.

Queſta ſerie è una ricorrente di 4.° grado, i ſuoi moltiplicatori ſono;

$12n - 28$: $-30n^2 + 148n - 156$; $-4n^3 - 52n^2 + 216n - 144$; $15n^4 - 84n^3 + 108n^2$; ed ammette l' appendice de' due termini $\frac{1}{n^2}$, 1, che vanno avanti al primo termine n^2.

PROBLEMA XI.

44. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 5 *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni.*

Se ſi farà l' eſame di queſta ipoteſi colle regole ſopra indicate, ſi troverà una ſerie di combinazioni contrarie, che è una ricorrente di quinto grado, di cui queſti ſono per ordine i cinque moltiplicatori.

$20n - 60$; $-110n^2 + 660n - 908$; $140n^3 - 1460n^2 + 4376n - 3696$; $95n^4 - 340n^3 - 1124n^2 + 4608n - 2880$; $-56n^5 + 640n^4 - 2208n^3 + 2304n^2$: e i cinque primi termini; n^2; n^4; n^6; $20n^7 - 170n^6 + 800n^5 - 2273n^4 + 3980n^3 - 4180n^2 + 2400n - 576$; $290n^8 - 3800n^7 + 23927n^6 - 89480n^5 + 211800n^4 - 320000n^3 + 298224n^2 - 155520n + 34560$ ecc. Qui pure ha luogo la solita appendice $\frac{1}{n^2}$, 1.

45. Riandando quel che s'è detto dal §.31. fino ad ora si raccoglie primo, che tanto è il grado della ricorrente delle combinazioni contrarie, quanto, principiando da 2, è il numero delle bianche, che si vogliono estratte dalla prim' urna nel decorso di qualsiisia numero di permutazioni; secondo, che avendo tutte queste serie al principio alcuni termini che si succedono in serie geometrica continua, se vi aggiungerem l'appendice, tanti saranno i termini geometricamente proporzionali, quanto è il grado della serie delle combinazioni contrarie, vale a dire quanti sono i suoi moltiplicatori. Onde, conosciuta che fosse la legge generale de' moltiplicatori per la ipotesi indeterminata di palle bianche residue $n - z - 1$, siccome il numero de' moltiplicatori spettanti alla ricorrente di questo evento indefinito è appunto $z + 1$, e i termini della serie geometrica dal primo $\frac{1}{n^2}$ dell' appendice fino all' ultimo n^{2z-2} son pur essi $z + 1$, non vi sarebbe bisogno di formar colonna alcuna degli eventi (la qual cosa è molestissima; e atteso il numero grandissimo di queste colonne, quando cresce il numero delle permutazioni, sa sempre rimaner col dubbio di averle notate tutte), e basterebbero i moltiplicatori insiem coi termini della serie geometrica per investigare i susseguenti termini delle nostre serie. Laonde a questo scopo dobbiam dirigere le nostre

meditazioni ; e il Problema che c' importa di ſcioglie-re è il ſeguente.

PROBLEMA XII.

46. *Dato il numero* n — z — 1 *di palle bianche , che ſi vogliono almeno una volta rimaſte nell' urna* A *pel corſo di qualſiſia numero di permutazioni , trovar la ſerie generale delle combinazioni contrarie , ovvero determinare i ſuoi moltiplicatori , che ſono* z + 1 *di numero ,*

e unitamente alla parte geometrica $\frac{1}{n^2}$, 1 , n^2, n^4 .... n^{2z-2}

della ſerie generale ſervono a far naſcere tutti i ſuoi termini ſuſſeguenti .

Per darne la ſoluzione , fa di meſtieri metterſi ſott'occhio i moltiplicatori che corriſpondono alle ipoteſi de' precedenti problemi , onde agevolarſi l' indagine della legge , con cui procedono . Eccoli qui diſpoſti con ordine .

Per bianche reſidue $n-2$; 1.° moltip. $2n-2$; 2.° n^2

b. r. $n-3$; 1.° m. $6n-10$; 2.° $-3n^2+16n-12$; 3.° $-4n^3+8n^2$

b. r. $n-4$; 1.° m. $12n-28$; 2.° $-30n^2+148n-156$;

3.° $-4n^3-52n^2+216n-144$; 4.° $15n^4-84n^3+108n^2$

b. r. $n-5$; 1.° m. $20n-60$; 2.° $-110n^2+660n-908$;

3.° $140n^3-1460n^2+4376n-3696$;

4.° $95n^4-340n^3-1124n^2+4608n-2880$;

5.° $56n^5+640n^4-2208n^3+2304n^2$.

47. Diamo a queſti moltiplicatori un'altra forma equivalente , che riſulta dal laſciare le formole de' prodotti nati dalle colonne laterali così come ſtanno , ſenza ridurle al netto ; del che ſi vede un eſempio ne' primi cinque problemi . La nuova forma è queſta .

Per bianche reſidue $n-2$ 1° moltip. $2(n-1)$

2° n^2

b.r. $n-3$ 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)$

2.° $-8(n-1)(n-2)+4(n-1)^2+n^2$

3.° $-4n^2(n-2)$

b.r. $n-4$. 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)$

2.° $-24(n-2)(n-3)-12(n-1)(n-3)+9(n-2)^2-8(n-1)(n-2)+4(n-1)^2+n^2$

3.° $-6n^2(n-3)-24(n-1)^2(n-3)+48(n-1)(n-2)(n-3)-18(n-1)(n-2)^2-4n^2(n-2)$

4.° $24n^2(n-2)(n-3)-9n^2(n-2)^2$

b.r. $n-5$. 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)+8(n-4)$

2.° $-48(n-3)(n-4)-32(n-2)(n-4)-16(n-1)(n-4)+16(n-3)^2-24(n-2)(n-3)-12(n-1)(n-3)-8(n-1)(n-2)+9(n-2)^2+4(n-1)^2+n^2$

3.° $192(n-2)(n-3)(n-4)+96(n-1)(n-3)(n-4)-72(n-2)^2(n-4)+64(n-1)(n-2)(n-4)-32(n-1)^2(n-4)-8n^2(n-4)-64(n-2)(n-3)^2-32(n-1)(n-3)^2+48(n-1)(n-2)(n-3)-24(n-1)^2(n-3)-6n^2(n-3)-18(n-1)(n-2)^2-4n^2(n-2)$.

4.° $48n^2(n-3)(n-4)+192(n-1)^2(n-3)(n-4)-384(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+144(n-1)(n-2)^2(n-4)+32n^2(n-2)(n-4)(n-4)+128(n-1)(n-2(n-3)^2-64(n-1)^2(n-3)^2-16n^2(n-3)^2+24n^2(n-2)(n-3)-9n^2(n-2)^2$

5.° $-192n^2(n-2)(n-3)(n-4)+72n^2(n-2)^2(n-4)+64n^2(n-2)(n-3)^2$.

48. Le ſuddette formole col porre a maggior comodo $n-1=a$; $2(n-2)=b$; $3(n-3)=c$; $4(n-4)=d$, ecc.; $n^2=p^2$; $4(n-1)^2=q^2$; $9(n-2)^2=r^2$; $16(n-3)^2=t^2$, ecc. ſi trasformano in queſt' altre. Per bianche reſidue $n-2$; 1.° moltip. $2a$

	2.°	p^2
b. r. $n-3$;	1.° m.	$2a+2b$
	2.°	$-2b(2a)+p^2+q^2$
	3.°	$-2bp^2$
b. r. $n-4$;	1.° m.	$2a+2b+2c$
	2.°	$-2c(2a+2b)-4ab+p^2+q^2+r^2$
	3.°	$2c(4ab-p^2-q^2)-2bp^2-2ar^2$
	4.°	$2c(2bp^2)-p^2r^2$

b. r. $n-5$; 1.° m. $2a+2b+2c+2d$

2.° $-2d(2a+2b+2c)-4bc-4ac-4ab+p^2+q^2+r^2+t^2$

3.° $2d(4bc+4ac+4ab-p^2-q^2-r^2)+8abc-2cp^2$
$-2cq^2-2bp^2-2ar^2-2at^2-2bt^2$

4.° $2d(-8abc+2cp^2+2cq^2+2bp^2+2ar^2)+4bcp^2$
$-p^2r^2-p^2t^2-q^2t^2+4abt^2$

5.° $2d(-4bcp^2+p^2r^2)+2bp^2t^2$.

49. La legge, con cui procedono i primi moltiplicatori, è per sè chiariſſima, dovendo ciaſcun d'eſſi comprendere tanti termini della ſerie $2a$, $2b$, $2c$ ecc., ovver della ſerie $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)$ ecc.), quanto è il grado della ricorrente che appartiene alla data ipoteſi diminuito di un'unità. Volendoſi pertanto il primo moltiplicatore per l'evento di b. r. $n-6$, ci verrà eſſo fomminiſtrato dalla formola $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)+4(n-4)+5(n-5))$. Così per b. r. $n-7$ ſarà $=2(n-1+2(n-2)+3(n-3)+4(n-4)+5(n-5)+6(n-6))$; e generalmente per l'ipoteſi di b. r. $n-z-1$ avremo il primo moltiplicatore $=2(n-1+2(n-2)+3(n-3)\ldots z(n-z))$.

50. Riſpetto ai ſecondi moltiplicatori, di ciaſcun di eſſi ne faremo due parti: la prima verrà compoſta dall'aggregato di tutti que' termini, ne' quali entra l'ultimo termine del primo moltiplicatore corriſpondente; la ſeconda parte formeraſſi da tutti i termini rimanenti. Voglionſi per eſempio b. r. $n-3$? La prima parte del ſecondo moltiplicatore notato al §. 48. ſarà $-2b(2a)$; l'altra p^2+q^2. Così per l'ipoteſi di bianche $n-4$, queſta prima parte ſarà $-2c(2a+2b)$, e la ſeconda $-4ab+p^2+q^2+r^2$. Un leggiero eſame poi di queſte prime parti per le 4 ipoteſi del §. 48. ci ſarà conoſcere, che s'uguagliano eſſe al prodotto negativo dell'ultimo termine del primo moltiplicatore moltiplicato nel primo moltiplicatore dell'ipoteſi immediatamente precedente. Onde, chiamato il primo general moltiplicatore $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)\ldots z(n-z))$

$= \alpha$, e quello della proſſima antecedente ipoteſi, cioè $2(0 + n - 1 + 2(n-2) \ldots . (z-1)(n-z+1)) = \alpha'$, ſi potrà eſprimere queſta prima parte in genere colla ſeguente formola; $-2z(n-z)(\alpha')$.

51. Per le ſeconde parti rifletteremo, che la ſerie de' quadrati p^2, q^2, r^2, t^2 ecc., ovvero n^2, $4(n-1)^2$, $9(n-2)^2$, $16(n-3)^2$, $25(n-4)^2$ ecc., ha per termine generale $z^2(n-z+1)^2$; in oltre, che ciaſcuna di queſte ſeconde parti è compoſta di tutto il ſecondo moltiplicatore, che conviene all'ipoteſi del proſſimo evento anteriore e del quadrato, che immediatamente ſuccede nella ſerie de' quadrati $p^2 + q^2$ ecc., che entrano nella formazione dello ſteſſo precedente ſecondo moltiplicatore. Così al §. 48. per l'evento $n-3$, la noſtra ſeconda parte è $p^2 + q^2$, cioè tutto il ſecondo moltiplicatore per l'evento $n-2$ con di più il quadrato q^2, che nella ſerie de' quadrati tien dietro immediatamente a p^2. Per l'evento $n-4$, la ſeconda parte è $-4ab + p^2 + q^2 + r^2$, i tre primi termini della quale ſono preciſamente il ſecondo moltiplicatore $-2b(2a) + p^2$ q^2 per l'ipoteſi $n-3$, e l'ultimo r^2 è il quadrato che ſeguita in ordine q^2; e lo ſteſſo dicaſi per gli altri eventi. Sicchè chiamando generalmente γ il ſecondo moltiplicatore, che compete all'evento $n-z-1$, e γ' il ſecondo moltiplicatore, che ſpetta al precedente evento $n-z$, ſarà queſta ſeconda parte $= \gamma' + z^2(n-z+1)^2$; e tutto il ſecondo moltiplicatore
$\gamma = -2z(n-z)\alpha' + \gamma' + z^2(n-z+1)^2$.

52. Vengo ai terzi moltiplicatori, pei quali ſtabiliſco la ſeguente regola cavata dall'eſame delle quattro ipoteſi ordinate nel §. 48, e da altre di più ſulle quali ho inſtituito i miei calcoli. Sia α il primo moltiplicatore generale, che corriſponde all'ipoteſi dell'evento $n-z-1$; β il ſecondo, e γ ſia il terzo che domandiamo. Oltracciò rappreſenti α' il primo moltiplicatore, che appartiene all'ipoteſi dell'evento immediatamen-

te precedente $n-z$, e α'' il primo moltiplicatore che risguarda l' evento antepenultimo $n-z+1$. Così esprima β' il secondo moltiplicatore spettante ai penultimo evento $n-z$; e per lo stesso evento $n-z$ sia γ' il terzo moltiplicatore. Dico che sarà $\gamma=-2z(n-z)\beta'+\gamma'-z^2(n-z+1)^2(\alpha'')$. Prendiamo in mano l' ipotesi del secondo evento $n-3$, che ha per terzo moltiplicatore $-2bp^2$. Poichè in tale suppossizione il primo moltiplicatore è $2a+2b$; il secondo, $-4ab+p^2+q^2$, sarà $\alpha=2a+2b$; $\alpha'=2a$; $\alpha''=0$. Similmente $\beta=-4ab+p^2+q^2$; $\beta'=p^2$, e $\gamma'=0$, perchè appunto nell' ipotesi precedente $n-2$ non abbiam terzo moltiplicatore. Sostituendo pertanto nel superior canone questi valori, avrem $\gamma=-2(n-2).2p^2+0-4(n-1)^2(0)$, cioè, surrogando b invece di $2(n-2)$; $\gamma=-2bp^2$. Per l' evento $n-4$ diventa $\alpha=2a+2b+2c$; $\beta=-4ab-4ac-4bc+p^2+q^2+r^2$, onde $\alpha'=2a+2b$; $\alpha''=2a$; $\beta'=-4ab+p^2+q^2$, e $\gamma'=-2bp^2$, tale essendo appunto il terzo moltiplicatore per la precedente ipotesi dell' evento $n-3$. Quindi sarà $\gamma=-3(n-3)(-8ab+2p^2+2q^2)-2bp^2-9(n-2)^2(2a)$, ovvero (ponendo c in luogo di $3(n-3)$, e r^2 in luogo di $9(n-2)^2$) $\gamma=8abc-2cp^2-2cq^2-2bp^2-2ar^2$, come s' è ritrovato.

53. Questa corta ed elegante regola ha il vantaggio della massima generalità; ed ove α, β rappresentino i moltiplicatori che per ordine precedono γ, serve non solo per l' investigazione de' terzi, ma eziandio de' quarti, quinti ecc. moltiplicatori. Si voglia il quarto moltiplicatore γ, che corrisponde all' evento $n-4$. Dovendo essere α, β i due moltiplicatori antecedenti, sarà pel §. 48. $\alpha=-4bc-4ac-4ab+p^2+q^2+r^2$; $\beta=8abc-2cp^2-2cq^2-2bp^2-2ar^2$; $\alpha'=-4ab+p^2+q^2$; $\alpha''=p^2$; $\beta'=-2bp^2$; $\gamma'=0$. Quindi $\gamma=-3(n-3)(-4bp^2)-9(n-2)^2p^2$, ossia $\gamma=4bcp^2-p^2r^2$. Si domandi il quinto moltiplicatore γ, che ap-

partiene all' evento $n-5$. In tal caso sarà $\alpha = 8bcd + 8acd + 8abd - 2dp^2 - 2dq^2 - 2dr^2 + 8abc - 2cp^2 - 2cq^2 - 2bp^2 - 2ar^2 - 2bt^2 - 2at^2$; $\beta = -16abcd + 4cdp^2 + 4cdq^2 + 4bdp^2 + 4adr^2 + 4bcp^2 - p^2r^2 - p^2t^2 - q^2t^2 + 4abt^2$; $\alpha' = 8abc - 2cp^2 - 2cq^2 - 2bp^2 - 2ar^2$; $\alpha'' = -2bp^2$; $\beta' = 4bcp^2 - p^2r^2$, e $\gamma' = 0$. Onde in virtù della regola $\gamma = -4(n-4)(8bcp^2 - 2p^2r^2) - 16(n-3)^2(-2bp^2)$, cioè $\gamma = -8bcdp^2 + 2dp^2r^2 + 2bp^2t^2$, come debbe essere.

54. Adattiamo la teoria ad un esempio, e facciam vedere in pratica, come dato il numero totale delle palle bianche, e domandato un certo evento di bianche che deon rimanere nell' urna, si possano per mezzo della nostra regola rintracciare con sufficiente speditezza i moltiplicatori della ricorrente delle combinazioni contrarie, e determinar quindi il numero delle permutazioni, che sono necessarie per render probabile l' evento dato. Sia il numero delle palle bianche $n=8$, e si cerchino i moltiplicatori della ricorrente, che compete all' evento nell' urna di bianche residue 4. In questo caso conviene esaurire i tre eventi $n-2=6$, $n-3=5$, $n-4=4$. Cominciando dal primo $n-2$, e richiamando alla memoria, che $a=n-1$, $b=2(n-2)$, $c=3(n-3)$, cioè $a=7$, $b=12$, $c=15$; e che $2a$ è il primo moltiplicatore per l' evento $n-2=6$; $2a+2b$ pel secondo evento $n-3=5$; $2a+2b+2c$ pel terzo $n-4=4$, saprem tosto assegnare a ciascuno di questi eventi il primo respettivo moltiplicatore, e tutti e tre per ordine saranno, come nell' annessa figura, 7.2, 19.2, 17.2^2.

b.r.6. 1.° molt. 7.2		b.r.5. 1.° m. 19.2		b.r. 4. 1.° m. 17.2^2
2.°	2^6	2.°	-19.2^2	2.° -223.2^2
		3.°	-3.2^9	3.° -237.2^4
				4.° 99.2^8

Ripigliati poi i canoni $\gamma = -2z(n-z)$. $\alpha' + \gamma' + z^2(n-z+1)^2\gamma = -2z(n-z)$. $\beta' + \gamma' - z^2(n-z+1)^2$. α'',

il

il primo de' quali ſerve per ritrovare i ſecondi moltiplicatori, e il ſecondo per ritrovar gli altri, diſcorreremo così. Pel primo evento di b. r. 6 abbiam $z=1$, $\alpha=7.2$, $\alpha'=0$, $\gamma'=0$. Dunque il ſecondo moltiplicatore γ farà ridotto alla formola $z^2(n-z+1)^2$, oſſia coi valori di $n=8$, $z=1$; $\gamma=2^6$. Pel ſecondo evento di b. r. 5 diventa $z=2$, $\alpha=19.2$, $\alpha'=7.2$, $\gamma'=2^6$; e però il ſecondo moltiplicatore γ ſi fa $=-4.6.7.2+2^6+4.49=-19.2^2$. Pel terzo evento poi di b. r. 4 divien $z=3$, $\alpha=17.2^2$; $\alpha'=19.2$; $\gamma'=-19.2^2$; onde il ſecondo moltiplicatore $\gamma=-6.5.19.2-19.2^2+9.36=-223.2^2$. Si paſſi ora ai terzi moltiplicatori, e ſi dia principio dalla ſeconda ipoteſi, giacchè la prima ne è priva. Poichè α, β deon eſſere i due moltiplicatori immediatamente precedenti al terzo che cerchiamo, ſarà $\alpha=19.2$, $\beta=-19.2^2$; per conſeguenza $\alpha'=7.2$, e (non avendovi ipoteſi ſuperiore alla prima di b. r. 6) $\alpha''=0$. Di più $\beta'=2^6$; $\gamma'=0$. Laonde, introdotti queſti valori nel ſecondo de' ſuddetti canoni, riſulterà il terzo moltiplicatore $\gamma=-4.6.2^6=-3.2^9$. Alla terza ipoteſi di b. r. 4 corriſpondono queſti valori; $z=3$, $\alpha=17.2^2$; $\beta=-223.2^2$; $\alpha'=19.2$; $\alpha''=7.2$; $\beta'=-19.2^2$; $\gamma'=-3.2^9$, che fanno naſcere il terzo moltiplicatore $\gamma=6.5.19.2^2-3.2^9-9.36.7.2$, ovvero $\gamma=-237.2^4$. Non reſtando preſentemente altro che il quarto moltiplicatore della terza ipoteſi, perchè eſſo manca nelle altre due, farà, per queſt'ultima indagine, $\alpha=-223.2^2$; $\alpha'=-19.2^2$; $\alpha''=2^6$; $\beta=237.2^4$; $\beta'=-3.2^9$; $\gamma'=0$, e $z=3$. Dunque il quarto moltiplicatore $\gamma=6.5.3.2^9-9.36.2^6=99.2^8$.

55. Conoſciuti i quattro moltiplicatori per l'evento di b. r. 4, rimane che ſi trovino i termini della ſerie contraria, di cui coll'ajuto dell'appendice ci ſon noti i quattro primi termini $\frac{1}{2^6}$, 1, 2^6, 2^{12}, che oſſervano

la proporzione geometrica. Ponghiam sotto ad essi i quattro moltiplicatori, come nella presente figura;

$$\frac{1}{2^0}, 1, 2^6, 2^{12} \qquad 545\,11.2^2, 684\,751.2^4, 389\,888\,39.2^4, 498\,813\,699.2^6$$
$$0, 0, 11025.2^2, 363\,825.2^4, 28\,120\,025.2^4, 574\,928\,125.2^6.$$
$$99.2^8, -237.2^4, -223.2^2, 17.2^2$$

E facciam poi giusta la regola delle ricorrenti le solite moltiplicazioni. Esse ci daranno il quinto termine $= 54511.2^2$, il sesto $= 684751.2^4$, il settimo $= 38988839.2^4$, l'ottavo $= 498813699.2^6$ ecc. Per non andare innanzi senza proposito, sarà bene aver presente ciò che abbiamo avvertito al §. 15. sul numero totale delle combinazioni di tutte le palle nelle diverse permutazioni per potere, ad ogni termine della ricorrente delle combinazioni contrarie, scriver sotto di mano in mano l'analogo nella serie delle favorevoli. Così nel caso nostro si vedrà, che ai termini della serie contraria, principiando da 2^6 che è realmente il primo fino al termine 498813699.2^6 corrispondono nella favorevole i termini 0; 0; 11025.2^2; 363825.2^4; 28120025.2^4; 574928125.2^6. Ora ne' termini antecedenti al sesto le combinazioni avverse son sempre in numero maggiore delle propizie, ma queste nel sesto eccedon le prime, e quest' eccesso, come se ne può far l'esperienza, va sempre più crescendo ne' termini susseguenti. Dunque sarebbe cosa inutile l'andar più oltre nelle serie, avendosi già tanto che basta per concludere, che il numero delle permutazioni necessarie a render probabile l'evento di ridursi nella prim' urna alla metà di tutte le palle bianche, è un numero medio tra il 5 e il 6, non contando già, come abbiam fatto sempre, la prima operazione, che di 8 bianche che erano ne fa rimaner sette. Io mi accosterò più al giusto, se domando sei permutazioni piuttosto che cinque, perchè le combinazioni sinistre, e le utili in cinque permutazioni stanno fra lo-

ro :: 38988839 : 28120025 , cioè :: 1.38 : 1 proſſimamente ; laddove in ſei permutazioni la proporzione delle ſiniſtre alle utili è quella di 498813699 : 574928125, ovvero di 1 : 1.15 a un dipreſſo ; e s'accoſtan più all'eguaglianza i due numeri 1 , 1.15 di quel che facian gli altri 1.38, 1.

56. Non poſſo diſſimular l'incomodo, che reca al calcolatore il metodo che ho preſentato per il ritrovamento de' moltiplicatori , perchè a determinar qualunque moltiplicatore relativamente ad una qualche ipoteſi , è neceſſario che ſi ſappia il moltiplicatore analogo dell'ipoteſi precedente ; queſto ſuppone noto l'analogo della ipoteſi , che va avanti a queſt'ultima , e così via via ſinchè con paſſo retrogrado ſi arrivi alla prima ipoteſi dell'evento $n-2$. Onde ſe , per eſempio, dati i due moltiplicatori pel primo evento , ſi vogliano determinare i ſette moltiplicatori, che ſon richieſti dalla ipoteſi dell'evento $n-7$, ſarà d'uopo coll'ajuto de' due primi trovare i tre moltiplicatori per l'evento $n-3$, poi i quattro per l'evento $n-4$ ecc. ſino ai ſette moltiplicatori per l'ultimo che domandiamo . Queſt' incomodo però reſta di molto diminuito , ove diaſi un valor numerico alla ſpecie n , come ſi ſuol fare all' occaſione che vengano in pratica ſimili queſiti ; e in tal caſo , quando non ſiano aſſai grandi il numero di tutte le palle bianche , e quel delle bianche, che ſi voglion tolte dall'urna, con poche operazioni numeriche ſi fanno naſcere i moltiplicatori di tutte le ipoteſi che precedon queſt'ultima , e ſi aſſegnano a queſta ſteſſa i competenti moltiplicatori. Anche l'uſo de' logaritmi, maſſime nelle moltiplicazioni che far ſi debbono per trovare i termini delle ſerie delle combinazioni , potrà contribuire a facilitar vie più la faccenda ; e conſiderando inſieme ogni coſa, ſi dovrà per avventura concludere , che in un problema di non mediocre difficoltà , come il noſtro , l'eſpoſto metodo ſia effettivamente un de' più ſemplici e de' men laborioſi.

57. Per soddisfar nondimeno chi amasse una maggior generalità anche a costo della speditezza, e per la determinazione de' moltiplicatori che esige un evento dato non volesse aver bisogno di scorrere per le ipotesi di tutti gli eventi anteriori, ci riman da ultimo di trovar la maniera di generalizzare questi moltiplicatori medesimi, e di racchiudere in tante formole uniche i moltiplicatori che spettano a tutti i possibili eventi. Quest'è ciò che noi eseguiremo ne' susseguenti paragrafi; premessa però la soluzione del presente

PROBLEMA XIII.

58. *Sia la formola generale* (M) $\Phi = az^m + bz^{m-1} + cz^{m-2} + dz^{m-3} + ez^{m-4} + fz^{m-5} + gz^{m-6}$ ecc., *indi un' altra formola* (N) $\gamma = pz^{m+1} + qz^m + rz^{m-1} + sz^{m-2} + tz^{m-3} + uz^{m-4} + xz^{m-5}$ ecc. *Stabilito che* z *vada calando dell' unità positiva, onde, servendosi della maniera di scrivere le differenze finite, sia* $z - z' = \delta z = 1$ *; e supposto che sia* $\gamma - \gamma' = \delta\gamma = \Phi$, *si cerca* γ, *cioè si domandano i valori delle indeterminate* p, q, r, s ecc. *dati per* m, *e per le altre cognite* a, b, c, d ecc.

La soluzione di questo problema è facile, se farem uso del teorema notissimo compreso in questa equazione;

$$\delta\gamma = d\gamma - \frac{d^2\gamma}{2} + \frac{d^3\gamma}{2.3} - \frac{d^4\gamma}{2.3.4} + \frac{d^5\gamma}{2.3.4.5} \text{ ecc.}$$

in cui i d rappresentano le differenziazioni ordinarie, ciascuna delle quali eseguita, conviene cangiare la differenza dz, che ha ciascun termine in δz, cioè in 1. Imperocchè, in virtù di questo teorema, avremo

$$d\gamma = (m+1).pz^m + mqz^{m-1} + (m-1)rz^{m-2} + (m-2)sz^{m-3} + (m-3)tz^{m-4} + (m-4)uz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^2\gamma = m(m+1)pz^{m-1} + (m-1)mqz^{m-2} + (m-2)(m-1)rz^{m-3} + (m-3)(m-2)sz^{m-4} + (m-4)(m-3)tz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^3\gamma = (m-1)(m)(m+1).pz^{m-2} + (m-2)(m-1)(m)qz^{m-3} + (m-3)(m-2)(m-1)rz^{m-4} + (m-4)(m-3)(m-2)sz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$d^4\gamma = (m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-1} + (m-3)(m-2)(m-1)(m)qz^{m-4}$
$+ (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)rz^{m-5}$ ecc.
$d^5\gamma = (m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-4}$
$+ (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)qz^{m-5}$ ecc.
$d^6\gamma = (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-5}$ ecc.,
e quindi ecc.

$$(O)\ \delta\gamma = (m+1)pz^m + \left(-\frac{m.(m+1)}{2}p + mq\right)z^{m-1}$$
$$+ \left(\frac{(m-1)(m)(m+1)}{2.3}p - \frac{(m-1)(m)}{2}q + (m-1)r\right)z^{m-2}$$
$$+ \left(-\frac{(m-2)(m-1)(m)(m+1)}{2.3.4}p + \frac{(m-2)(m-1)(m)q}{2.3}\right.$$
$$\left. - \frac{(m-2)(m-1)r}{2} + (m-2)s\right)z^{m-3} + \left(\frac{(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)p}{2.3.4.5}\right.$$
$$\left. - \frac{(m-3)(m-2)(m-1)(m)q}{2.3.4} + \frac{(m-3)(m-2)(m-1)r}{2.3}\right.$$
$$\left. - \frac{(m-3)(m-2)s}{2} + (m-3)t\right)z^{m-4}$$
$$+ \left(-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)p}{2.3.4.5.6}\right.$$
$$\left. + \frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)q}{2.3.4.5} - \frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)r}{2.3.4}\right.$$
$$\left. + \frac{(m-4)(m-3)(m-2)s}{2.3} - \frac{(m-4)(m-3)t}{2} + (m-4)u\right)z^{m-5}.\text{ecc.}$$

Altro pertanto non reſta da fare che confrontare i termini di queſta equazione colla equazione $\Phi = $ ecc., e troveremo i valori delle ſuddette indeterminate p, q, ecc. Il confronto de' primi termini ci offre l'equazione $(m+1)p = a$, che dà $p = \frac{a}{m+1}$. Dal confronto de' ſecondi riſulta $-\frac{(m)(m+1)}{2}p + mq = b$, o, ſoſti-

tuito il valore di p, e fatte le dovute operazioni, $q=\frac{b}{m}+\frac{a}{2}$. Coi confronti poi de' termini ſuſſeguenti ci verran date le altre indeterminate, le quali io diſpongo per ordine, principiando dalla prima;

$$p=\frac{a}{m+1};\ q=\frac{b}{m}+\frac{a}{2};\ r=\frac{c}{m-1}+\frac{b}{2}+\frac{ma}{2.2.3};$$

$$s=\frac{d}{m-2}+\frac{c}{2}+\frac{(m-1)b}{2.2.3}+a.0;\ t=\frac{e}{m-2}+\frac{d}{2}+\frac{(m-2)c}{2.2.3}+b.0-\frac{(m-2)(m-1)(m)a}{2.3.2.3.4.5};\ u=\frac{f}{m-4}+\frac{e}{2}+\frac{(m-3)d}{2.2.3}+c.0-\frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{2.3.2.3.4.5}.b+a.0;$$

$$x=\frac{g}{m-5}+\frac{f}{2}+\frac{(m-4)e}{2.2.3}+d.0-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)c}{2.3.2.3.4.5}+b.0+\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)a}{2.3.2.3.4.5.6.7.}\text{ ecc.}$$

La legge de' due primi termini in tutti i valori di queſte indeterminate è chiara. Cominciando poi la ſerie de' rimanenti dai terzi termini, veggiamo, che i termini nelle ſedi pari ſon nulli, che quelli delle ſedi diſpari progrediſcono coi ſegni alterni, e che il numero de' fattori, ne' quali entra la m pei termini delle ſedi diſpari ſeguita la legge de' numeri diſpari 1, 3, 5, 7 ecc. Quanto alla legge de' coefficienti numerici, non biſogna laſciarſi ingannare da que' pochi valori delle ſpecie p, q, r ecc. che abbiamo determinato, coi quali potrebbe parere, che i numeratori de' termini non aveſſero altro coefficiente numerico che l' unità. Se ſi va avanti ſino al nono termine delle equazioni generali, coſicchè ſia $\phi=az^m\ldots.+bz^{m-7}+iz^{m-8}$ ecc., $\gamma=pz^{m+1}\ldots.+yz^{m-6}+\pi z^{m-7}$, ſi trova $\pi=\frac{i}{m-7}+\frac{b}{2}+\frac{(m-6)g}{2.2.3}$

$$+f.o-\frac{(m-6)(m-3)(m-4).e}{2.3.2.3.4.5.}$$

$$+d.o+\frac{(m-6)(m-5)(m-4)(m-3)(m-2).c}{2.3.2.3.4.5.6.7}+b.o$$

$$-\frac{3(m-6)(m-5)(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)a}{2.5.2.3.4.5.6.7.8.9};$$

ove si vede che apparisce il 3 nel numeratore dell' ultimo termine. La vera regola, colla quale si determinano questi coefficienti, è la seguente, come ciascuno può verificare. Si ponga per comodo $\frac{1}{2.2.3}=\omega$, e sarà $\frac{1}{2.3.2.3.4.5}=\frac{-3}{2.2.3.4.5}+\frac{\omega}{2.3}$. Quest' omogeneo di comparazione si faccia $=\omega'$, e risulta $\frac{1}{2.3.2.3.4.5.6.7}$ $=\frac{5}{2.2.3.4.5.6.7}-\frac{\omega}{2.3.4.5}+\frac{\omega'}{2.3}$, cui sia $=\omega''$; ed avremo $\frac{3}{2.5.2.3.4.5.6.7.8.9}=\frac{-7}{2.2.3.4.5.6.7.8.9}+\frac{\omega}{2.3.4.5.6.7}$ $-\frac{\omega'}{2.3.4.5}+\frac{\omega''}{2.3}$ ecc. colla legge, che è manifesta.

PROBLEMA XIV.

59. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il primo moltiplicatore generale della serie ricorrente contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Abbiam veduto al §. 49, che il primo moltiplicatore generale è eguale alla somma della serie $2(n-2)+4(n-2)+6(n-3)+\ldots\ldots+2(z-1)(n-z+1)+2z(n-z)$, che suppongo $=\gamma$. Or poichè questa serie diminuita dell' ultimo termine $2z(n-z)$ è quel che

diventa γ, se in esso in vece di z si pone $z-1$, farà $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)\ldots 2(z-1)(n-z+1) = \gamma'$, pel precedente Problema, e quindi $\gamma - \gamma'$, ossia $\delta\gamma = 2z(n-z) = -2z^2 + 2nz$. S' instituisca il paragone di questa equazione col canone (O) del §.58, ed avremo $m=2$; $(m+1)p=-2$, ovvero $p=-\frac{2}{3}$ col confronto de' primi termini. Quel de' secondi ci somministra l' equazione $-3p+2q=2n$, da cui colla sostituzione del valore di p si trae $q=n-1$. Perchè poi manca il termine costante nella nostra formola, sarà col paragone de' termini $p-q+r=0$, cioè $r= =-p+q=n-1+\frac{2}{3}=\frac{3n-1}{3}$. Introducansi ora questi valori nella formola generale (N) del §. 58, e si avrà la somma della serie $\gamma=\frac{-2z^2}{3}+(n-1)z^2 + \frac{(3n-1)z}{3}+s$. La specie s verrà determinata dalla condizione, che, quando $z=1$, sia la somma della nostra serie eguale al primo termine $2(n-1)$; onde nasce $-\frac{2}{3}+n-1+\frac{3n-1}{3}+s=2n-2$, ossia $-\frac{2+3n-3+3n-1}{3}+s=2n-2$ cioè $\frac{6n-6}{3}+s = 2n-2$, che dà $s=0$. Poichè $\delta\gamma=\phi$, poteasi pure fare il confronto del nostro termine generale $-2z^2 + 2nz$ colla formola (M) del §. 58, e trarne quindi i valori de' simboli m, a, b, ecc. Ecco ciò che ne sarebbe risultato; $m=2$, $a=-2$, $b=2n$, $c=0$. Dunque, per le generali determinazioni delle specie p, q ecc., $p=-\frac{2}{3}$, $q=n-1$, $r=\frac{3n-1}{3}$, come s'è già trovato.

trovato. Da ciò si deduce, che il primo moltiplicatore della ricorrente contraria pel generale evento di bianche $n-z-1$, sarà $= \frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3}$

$= (z+1)\left(zn - \frac{2z^2+z}{3}\right)$.

PROBLEMA XV.

60. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il secondo moltiplicatore della serie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Sia θ una funzione qualunque di z; θ' quel che diventa θ, se in esso si pone $z-1$ in vece di z; θ'' ciò che divien θ', se in θ si mette un'altra volta $z-1$ in luogo di z; ecc. La teoria delle differenze finite ci somministra altrettante serie quanti sono i θ', θ'' ecc., per mezzo delle quali vengon dati gl'istessi θ', θ'' ecc. pel primo simbolo θ; e si ha.

$$(P)\ \theta' = \theta - d\theta + \frac{d^2\theta}{2} - \frac{d^3\theta}{2.3} + \frac{d^4\theta}{2.3.4} - \frac{d^5\theta}{2.3.4.5} + \frac{d^6\theta}{2.3.4.5.6} \text{ ecc.}$$

$$(Q)\ \theta'' = \theta - 2d\theta + \frac{2^2d^2\theta}{2} - \frac{2^3d^3\theta}{2.3} + \frac{2^4d^4\theta}{2.3.4} - \frac{2^5d^5\theta}{2.3.4.5} \text{ ecc.}$$

ove i d significano le differenziazioni ordinarie. Delle due serie notate, la prima ci è utile per trovare il nostro secondo moltiplicatore; tutte e due per trovare i seguenti. Si richiami a tal fine la formola del §. 51. che è $\gamma = -2z(n-z)\alpha' + \gamma' + z^2(n-z+1)^2$, in cui γ rappresenta il secondo moltiplicatore, α il primo, e α' ciò che diventa α se in esso in vece di z si pone $z-1$. Sarà $\gamma - \gamma' = \delta\gamma = -2z(n-z)\alpha' + z^2(n-z+1)^2$. Or poichè $\alpha = \frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3}$, fatto $\theta = x$, e sostituito 1 in vece di dz, avrem pel canone (P)

$$\alpha' = \frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3} + \frac{6z^2-6nz+6z-3n+1}{3}$$
$$+ \frac{-6z+3n-3}{3} + \frac{2}{3}; \text{ ovvero } \alpha' = \frac{-2z^3+(3n+3)z^2-(3n+1)z}{3};$$
$$\text{e perciò } \delta\gamma = 2z(n-z)\frac{(2z^3-(3n-3)z^2+(3n+1)z}{3} + z^2(n-z+1)^2 =$$
$$\frac{-4z^5+(10n+9)z^4-(6n^2-18n-)z^3+(9n^2+8n+3)z^2.}{3}$$

Paragoniſi queſta formola colla generale (M), e riſulterà $m=5$, $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{10n+9}{3}$, $c=\frac{-6n^2-18n-8}{3}$, $d=\frac{9n^2+8n+3}{3}$, $e=0$, $f=0$, perchè manca il termine, in cui z ſia alla prima dimenſione, e il termine coſtante. Soſtituendo poi queſti valori di m, a, b ecc. nelle generali determinazioni de' ſimboli p, q ecc., ſi ha $p=-\frac{2}{3^2}$, $q=\frac{10n-1}{3\cdot5}$, $r=\frac{-9n^2+3n+5}{2\cdot3^2}$, $s=-n$, $t=\frac{18n^2-3n-1}{2\cdot3^2}$, $u=\frac{15n^2+10n+2}{2\cdot3\cdot5}$; onde

$$\gamma = \frac{-20z^6+60n-6z^5-45n^2+15n+25z^4-90nz^3+90n^2-15n-5z^2+45n^2+30n+6z.}{2\cdot3\cdot3\cdot5}$$

Non aggiungo alcun termine coſtante, perchè eſſendo la differenza finita $\delta\gamma$ un aggregato di termini moltiplicato per z^2, e annullandoſi eſſa quando $z=0$, nella ſteſſa ipoteſi anche l'integrale γ debb'eſſer zero. Sicchè ſarà noto il ſecondo moltiplicatore generale, che compete alla noſtra ſerie, e noi l'eſprimeremo in queſt'altra forma equivalente;

$$\frac{z(z+1)}{2}\left(-(z^2+z+1)n^2+\frac{(4z^3-3z^2-3z+2)}{3}n+\frac{-20z^4+14z^3+11z^2-11z+6}{3\cdot3\cdot5}\right).$$

PROBLEMA XVI.

61. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il terzo moltiplicatore della ſerie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Pel §. 51. abbiamo il terzo moltiplicatore $\gamma = -2z(n-z)\beta' + \gamma' - z^2(n-z+1)^2.\alpha''$, i ſimboli α, β denotando il primo e il ſecondo moltiplicatore già ritrovati: e quindi $\gamma-\gamma' = \delta\gamma = -2z(n-z)\beta' - z^2(n-z+)^2\alpha''$. Dal valore di $\beta = \frac{-20z^6+60n-6.z^5-45n^2+15n+25.z^4-90nz^3+90n^2-15n-5.z^2+45n^2+30n+6\times z}{2.3.3.5}$ ſi deduce col mezzo del canone (P)

$$\beta = \frac{-20z^6+60n+114.z^5-45n^2-285n-245.z^4+180n^2+450n+240.z^3-180n^2+255n-95.z^2+45n^2+30n+6.z}{2.3.3.5};$$

e dal valore di $\alpha = \frac{-2z^3+(3n-3)z^2+(3n-1)z}{3}$ col ſecondo canone (E) ſi trae $\alpha'' = \frac{-2z^3+(3n+9)z^2+(-9n-13)z+6n+6}{3}$. Colla introduzione poi di queſti valori nella ſuperior formola $\delta\gamma = -2z(n-z)\beta' - z^2(n-z+1)^2\alpha''$ ſi otterrà dopo le neceſſarie riduzioni

$$\delta\gamma = \frac{1}{3.3.5}\Big(-20z^8+(80n+144)z^7+(-105n^2-504n-440)z^6+(45n^3+585n^2+1250n+735)z^5$$
$$+(-225n^3-1125n^2-1560n-710)z^4+(315n^3+945n^2+1010n+381)z^3+(-135n^3-300n^2-276n-90)z^2\Big)$$

Queſta formola dovrà eſſere confrontata col canone (M) per le determinazioni delle ſpecie m, a, b ecc., onde ſi rendano anche noti gli altri ſimboli p, q, r ecc. e ſi abbia finalmente il ſuo integrale che ſarà il terzo moltiplicatore ricercato. Ma ſe a motivo de' coefficien-

ti delle podestà di z molto complessi si trovasse più comodo d'integrar per parti la suddetta formola differenziale, bisognerebbe in tal caso trasformarla in quest'altra equivalente

$$\delta\gamma = (z^5-5z^4+7z^3-3z^2)n^3 \div \frac{(-7z^6+39z^5-75z^4+63z^3-20z^2)n^2}{3} + \frac{(80z^7-504z^6+1250z^5-1560z^4+1010z^3-276z^2)n}{3\cdot 3\cdot 5\cdot} + \frac{-20z^8+144z^7-440z^6+735z^5-710z^4+381z^3-90z^2}{3\cdot 3\cdot 5}, \text{ e}$$

considerare che ogni fattore delle podestà di n sia una formola di differenze finite. Integrato pertanto ciascuno di questi fattori coll'ajuto del canone (M), senza aggiunger costante, che non ha luogo, si troverà il terzo moltiplicatore domandato dal Problema $=$

$$\frac{(z-1)z(z+1)}{2\cdot 3}\left((z^3-3z^2-z+2)n^3+\frac{(-6z^4-18z^3-15z+6)n^2}{3} + \frac{(60z^5-192z^4+78z^3+174z^2-102z+36)n}{3\cdot 3\cdot 5} + \frac{-280z^6+1008z^5-808z^4-693z^3+1061z^2-126z+144}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right).$$

PROBLEMA XVII.

62. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il quarto moltiplicatore della serie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Rappresentando γ secondo il solito questo quarto moltiplicatore, sarà α il secondo moltiplicatore, e β il terzo, che son già noti. Si passi dunque col canone $(\mathfrak{Q})$ dal valore di α a quello di α'', e dal valore di β a quello di β', e si sostituiscano questi nuovi valori nella formola generale $\delta\gamma = -2z(n-z)\beta' - z^2(n-z+1)^2\alpha''$. Si avrà $\delta\gamma$ dato per z e per n; e l'integrazione di que-

ſta formola o tutt' a un tratto, o per parti, eſeguita alla maniera de' precedenti Problemi ci farà conoſcere il quarto moltiplicatore, che domandiamo, e farà eſſo

$$= \frac{(z-2)(z-1)z(z+1)}{2.3.4}\Big\{(-z^4+6z^3-5z^2-8z+3)n^4$$

$$+(8z^5-50z^4+64z^3+36z^2-70z+12)\frac{n^3}{3}+$$

$$(-120z^6+804z^5-1437z^4+78z^3+1503z-792z+108)\frac{n^2}{3.3.5}+$$

$$(1120z^7-8232z^6+19108z^5-10212z^4-15476z^3+18228z^2-3816z+864)\frac{n}{3.3.3.5.5.7}-$$

$$\frac{1}{3.3.3.3.5.5.7}(2800z^8-22960z^7+65836z^6-64288z^5-30305z^4+83310z^3-37251z^2+198z-3240)\Big\}.$$

Si tenga lo ſteſſo metodo pel 5.°, 6.° ecc. moltiplicatori, e ciaſcun d' eſſi farà in noſtra mano, ſenza che per averli ſia d' uopo dalla ipoteſi dell' evento $n-z-1$ aſcendere a tutte le precedenti ſino all' ultima dell' evento $n-2$.

63. Faremo la riflеſſione, che il terzo moltiplicatore ha il fattore $z-1$, e divien zero, quando $z=1$; il che debb' eſſere neceſſariamente, perchè in tale ipoteſi la ſerie ricorrente delle combinazioni è appunto di ſecondo grado, e non ammette per conſeguenza che due ſoli moltiplicatori. Così il quarto moltiplicatore riceve il fattore $z-2$, e perciò ſi fa nullo nell' ipoteſi di $z=2$, perchè in tal caſo la ricorrente, che gli corriſponde, è ſolo di terzo grado, e dee realmente mancare queſto quarto moltiplicatore. Onde, adattato un ſimil diſcorſo ai moltiplicatori ſuſſeguenti, ſi raccoglierà, che chiamato m il numero de' moltiplicatori, l'ultimo denominato dal numero m avrà il fattore $z-m+2$. Oſſerviſi in oltre, che i fattori de' noſtri generali moltiplicatori coſtituiſcono una ſerie aritmetica, e che ſon tanti, quanto è l' eſponente maſſimo di n per ciaſcun

d' essi, ovvero quanto è l' esponente massimo di z nella formola, che moltiplica la podestà massima di n. Di più, che l' unico fattore del primo moltiplicatore è diviso per 1, i due del secondo per 1.2, i tre del terzo per 1.2.3; i quattro del quarto per 1.2.3.4; per conseguenza i fattori numero m del moltiplicatore denominato da m saranno divisi da $1.2.3.4....(m-1)m$: Finalmente che cresce successivamente di un' unità l' esponente massimo di z nelle formole moltiplicatrici delle podestà di n decrescenti successivamente d' un' unità in ciascun moltiplicatore; e medesimamente cresce di un' unità l' esponente massimo di z nelle formole che moltiplicano la podestà massima di n, ove si passi da un moltiplicatore al suo immediatamente susseguente.

64. Queste cose poste, per evitare di far tante divisioni ne' moltiplicatori trovati coll' anzidetto metodo, quanti sono i loro fattori, onde ridurli a forma più comoda, potrebbe cadere opportuna la soluzione del presente

PROBLEMA XVIII.

65. *Ritrovare per ciascun moltiplicatore le formole moltiplicatrici delle podestà di* n, *che unitamente costituiscono il quoziente dell' intero moltiplicatore diviso pe' suoi respettivi fattori.*

A questo fine stabilisco tre qualunque moltiplicatori generali, che si succedono l'un dopo l'altro. L'antepenultimo sia

$$A=\frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+4)}{1.2.3...(m-2)}\left(an^{m-2}+bn^{m-3}+cn^{m-4}+en^{m-5}+fn^{m-6}...\text{ecc.}\right).$$

Il penultimo

$$B=\frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+3)}{1.2.3...(m-1)}\left(\alpha n^{m-1}+\beta n^{m-2}+\gamma n^{m-3}+\varepsilon n^{m-4}+\ddagger n^{m-5}..\text{ecc.}\right).$$

L' ultimo, che si cerca

$$C=\frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\Big(sn^m+tn^{m-1}+un^{m-2}+xn^{m-3}+yn^{m-4}...\text{ecc.}\Big).$$

Le ſpecie a, b, c ecc., α, β, γ ecc., s, t, u ecc. ſono funzioni di z. Siano in oltre A', B', C', a', b', c' ecc., α', β' ecc., s', t' ecc. ciò che diventano A, B, C, a ecc., ſe in queſte ſi pone $z-1$ in vece di z; ed A'', B'', C'', a'' ecc. ciò che diventano A', B', C', a' ecc. ſe in eſſe ſi pone un' altra volta $z-1$ in vece di z. Sarà

$$A'=\frac{z(z-1)..(z-m+3)}{1.2.3...(m-2)}\Big(a'n^{m-2}+b'n^{m-3}+c'n^{m-4}+e'n^{m-5}+f'n^{m-6}..\text{ecc.}\Big);$$

$$A''=\frac{(z-1)(z-2)..(z-m+2)}{1.2.3..(m-2)}\Big(a''n^{m-2}+b''n^{m-3}+c''n^{m-4}+e''n^{m-5}+f''n^{m-6}..\text{ecc.}\Big);$$

$$B'=\frac{z(z-1)..(-m+2)}{1.2.3..(m-1)}\Big(\alpha'n^{m-1}+\beta'n^{m-2}+\gamma'n^{m-3}+\varepsilon'n^{m-4}+\Phi'n^{m-5}..\text{ecc.}\Big);$$

$$C'=\frac{z(z-)..(z-m+1)}{1.2.3...m}\Big(s'n^m+t'n^{m-1}+u'n^{m-2}+x'n^{m-3}+y'n^{m-4}..\text{ecc.}\Big).$$

Dunque $C-C'=\delta C=$

$$\frac{z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\Big(\big((z+1)(s-s')+ms'\big)\times n^m+\big((z+1)(t-t')+mt'\big)\times$$
$$n^{m-1}+\big((z+1)(u-u')+mu'\big)\times n^{m-2}+\big((z+1)(x-x')+mx'\big)\times n^{m-3}$$
$$+\big((z+1)(y-y')+my'\big)\times n^{m-4}\ \text{ecc.}\Big).$$

Ma, per la formola determinatrice de' noſtri moltiplicatori abbiamo anche $\delta C=-2z(n-z)B'-z^2(n-z+1)^2A''$, cioè, dopo la ſoſtituzione de' valori di B', A'', e l' opportuna riduzione;

$$\delta C=\frac{z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\Big(-\big(m(m-1)za''+2mz\alpha'\big)\times n^m$$
$$+\big(2m(m-1)(z-1)za''-m(m-1)zb''+2mz^2\alpha'-2mz\beta'\big)\times n^{m-1}$$
$$-\big(m(m-1)(z-1)^2za''+2m(m-1)(z-1)zb''-m(m-1)zc''+$$
$$2mz^2\beta'-2mz\gamma'\big)\times n^{m-2}$$
$$-\big(m(m-1)(z-1)^2zb''+2m(m-1)(z-1)zc''-m(m-1)ze''+$$
$$2mz^2\gamma'-2mz\varepsilon'\big)\times n^{m-3}\ \text{ecc.}\Big)$$

con ordine pe' seguenti termini simile a quello, che comincia nel terzo termine. Posto pertanto $\delta s, \delta t, \delta u$ ecc. in vece di $s-s'$, $t-t'$, $u-u'$ ecc., e di più $s-\delta s$, $t-\delta t$, $u-\delta u$ in vece di s', t', u'; ed agguagliati i due valori di δC, col levare gli eguali fattori risulta l' equazione;

$$\begin{aligned}
&\big((z-(m-1))\delta s+ms\big)\times n^m+\big((z-(m-1))\delta t+mt\big)\times n^{m-1}\\
&+\big((z-(m-1)(\times\delta u+mu\big)\times n^{m-2}+\big((z-(m-1))\times\delta x+mx\big)\times n^{m-3}\text{ ecc.}\\
&=\big(-m(m-1)za''-2mzx'\big)\times n^m\\
&+\big(2m(m-1)(z-1(za''-m)m-1)zb'+2mz^2\alpha'-2mz\beta'\big)\times n^{m-1}\\
&+\big(-m(m-1)(z-1)^2za''+2m(m-1)(z-1)zb''-m(m-1)zc''\\
&+2mz^2\beta'-2mz\gamma'\big)\times n^{m-2}+\big(-m(m-1)(z-1)^2zb''\\
&+2m(m-1)(z-1)zc''-m(m-1)ze''+2mz^2\gamma'-2mz\varepsilon'\big)\times n^{m-3}\text{ ecc.}
\end{aligned}$$

ove le formole, che nel primo membro moltiplicano le podestà di n debbono essere identiche colle formole, che moltiplicano le podestà analoghe di n nell' omogeneo di comparazione. Ora, siccome m è quantità nota, e son pur note le specie a, b, c ecc. α, β, γ ecc., perchè appartengono ai due cogniti moltiplicatori i quali immediatamente precedono il moltiplicatore C; e quindi, pei canoni (P) (Q) le altre, che ne derivano, a'', b'', c'' ecc. α', β', γ' ecc., non resterà a far altro, che dar per queste i simboli incogniti s, t, u ecc., onde esibire il ricercato quoziente del moltiplicatore C, e in conseguenza lo stesso moltiplicatore.

66. Ad ottener ciò, stabilisco in genere

$$S=Fz^r+Gz^{r-1}+Hz^{r-2}+Iz^{r-3}+Lz^{r-4}\text{ ecc.},$$

Sarà pel canone (O) del §. 58.

$$\begin{aligned}
\delta S&=rFz^{r-1}+\Big(\frac{-r(r-1)F}{2}+(r-1)G\Big)\times z^{r-2}\\
&+\Big(\frac{r(r-1)(r-2)F}{2.3}-\frac{(r-1)(r-2)}{2}G+(r-2)H\Big)\times z^{r-3}\ldots\text{ecc.},
\end{aligned}$$

da che si ricava, essere

$$(z-(m-1))\delta S+mS=\big((r+m-1)F+F\big)\times z^r$$

$$+\left(\frac{-r(r+2m-3)}{2}F+(r+m-2)G+G\right)z^{r-1}+$$

$$\left(\frac{r(r-1)(r+3m-5)}{2.3}F-\frac{(r-1)(r+2m-4)}{2}G+(r+m-3)H+H\right)z^{r-2}$$

$$+\left(\frac{-r(r-1)(r-2)(r+4m-7)}{2.3.4}F+\frac{(r-1)(r-2)(r+3m-6)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(r-2)(r+2m-5)}{2}H+(r+m-4)I+I\right)z^{r-3}\text{ ecc.}$$

La legge di queſta ſerie è di per sè manifeſta, e quando uopo il voglia, ſi potrà produrla ſino a quel numero di termini che eſigerà la natura delle formole, e il numero de' termini, dai quali vengono coſtituite.

67. Domandiſi ora pel moltiplicatore C denominato da m la formola che moltiplica n^m, ſarà $r=m$, $S=s$, e però $s=Fz^m+Gz^{m-1}+Hz^{m-2}+Iz^{m-3}$ ecc., ed avraſſi $(z-(m-1))\,\delta s+ms$, ovvero

$$\left((2m-1)F+F\right)\times z^m+\left(\frac{-m(3m-3)}{2}F+(2m-2)G+G\right)\times z^{m-1}$$

$$+\left(\frac{m(m-1)(4m-5)}{2.3.}F-\frac{(m-1)(3m-4)}{2}G+(2m-3)H+H\right)\times z^{m-2}$$

$$+\left(\frac{-m(m-1)(m-2)(5m-7)}{2.3.4}F+\frac{(m-1)(m-2)(4m-6)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(m-2)(3m-5)}{2}H+(2m-4)I+I\right)\times z^{m-3}\text{ ecc.}=$$

$$-m(m-1)z\,a''-2mz\,\alpha'.$$

Eſſendo note in queſto ſecondo membro le funzioni a'', α', che appartengono ai moltiplicatori precedenti, ſe ſi ſoſtituiranno i loro valori dati per z, naſcerà nell'omogeneo una formola, in cui ſarà m il maſſimo eſponente di z; e confrontando i termini che ne riſultano cogli analoghi del primo membro, ſi determineranno i valori di F, G, H ecc. onde reſterà nota la formola, che nel moltiplicatore C denominato da m moltiplica n^m.

68. Compiuta queſt' operazione, ſi dee procedere a trovar la formola t, che in C moltiplica n^{m-1}. Rammentiamci, aver noi detto al §. 63, che il maſſimo eſponente di z in t diventa $m+1$, e vedremo che ſi dovrà por $r=m+1$. Fatto poi $S=t$, è neceſſario che ſi verifichi queſta equazione: $(z-(m-1))\,\delta t+mt$, oſſia $(2mF+F)\times z^{m+1}+\left(\frac{-(m+1)(3m-2)}{2}F+(2m-1)G+G\right)\times z^m$
$+\left(\frac{(m+1)m(4m-4)}{2.3}F-\frac{m(3m-3)}{2}G+(2m-2)H+H\right)\times z^{m-1}$
$+\left(\frac{-(m+1)m(m-1)(5m-6)}{2.3.4}F+\frac{m(m-1)(4m-5)}{2.3}G\right.$
$\left.-\frac{(m-1)(3m-4)}{2}H+(2m-3)I+I\right)z^{m-2}$ ecc.
$=2m(m-1)(z-1)z\,a''-m(m-1)z\,b''+2mz^2\alpha'-2mz\beta'$.
Qui pure eſſendo note le funzioni a'', b'', α', β', colla ſoſtituzione de' loro valori in queſt' ultimo membro, coſtituiremo una formola, in cui il maſſimo eſponente di z arriva a $m+1$; e il confronto de' termini con quelli che lor corriſpondono nella prima parte dell' equazione darà i valori di F, G, H ecc. e renderà nota la formola t, che in C moltiplica n^{m-1}.

69. Al terzo termine del moltiplicatore C, in cui avvi n^{m-2}, corriſponde $r=m+2$; $S=u=Fz^{m+2}+Gz^{m+1}$ $+Hz^m+Iz^{m-1}$ ecc., onde $(z-(m-1))\,du+mu$, ovvero
$\left((2m+1)F+F\right)\times z^{m+2}+\left(\frac{-(m+2)(3m-1)}{2}F+2mG+G\right)\times z^{m+1}$
$+\frac{(m+2)(m+1)(4m-3)}{2.3}F+\left(\frac{-(m+1)(3m-2)}{2}G+(2m-1)H+H\right)\times z^m$
$+\left(\frac{-(m+2)(m+1)m(5m-5)}{2.3.4}F+\frac{(m+1)m(4m-4)}{2.3}G\right.$
$\left.-\frac{m(3m-3)}{2}H+(2m-2)I+I\right)\times z^{m-1}$ ecc. $=$

$-m(m-1)z(z-1)^2a''+2m(m-1)z(z-1)b$
$-m(m-1)zc''+2mz^2\beta'-2mz\gamma'$. La foſtituzione de' valori cogniti delle funzioni a'', b'', c'', β', γ', e il confronto de' termini analoghi ne' due membri dell'equazione faran conoſcere le indeterminate F, G, H ecc., e in conſeguenza il terzo termine del moltiplicatore C.

70. Modificata poi la ſuddetta ſerie al valore che riceve r nel quarto termine di C, ſi dee far l'eguaglianza tra eſſa, e $-m(m-1)z(z-1)^2b+2m(m-1)z(z-1)c'$
$-m(m-1)zc''+2mz^2\gamma'-2mz\epsilon'$; e la forma sì di queſto come dell'antecedente omogeneo di comparazione ſarà quella che mantengono tutti i ſuſſeguenti. Perilchè reſta trovata la maniera d'eſibire l'intero quoziente, e per conſeguenza l'intero moltiplicatore C che ſi cercava. Queſto metodo ſerve per tutti quanti i moltiplicatori della ricorrente generale, detratto il primo; e ſolo ſi dee notare, che quando ſi cerca il ſecondo moltiplicatore, diventa $a=-1$, e gli altri ſimboli b'', c'' ecc. ſon zero.

71. Per la compiuta ſoluzione del Problema, che ci ſiamo propoſti nel §. 30, ci rimangono ancora da conſiderare due eventi di palle bianche nell'urna A, i quali fan claſſe a parte, ed hanno le lor ricorrenti delle combinazioni contrarie fuor della ſerie generale, che s'è trovato appartenere all'evento di bianche $n-z-1$. Uno di queſti è $n-1$, l'altro n; cioè ſi può domandare quante permutazioni mi ſon neceſſarie, perchè, ridotta l'urna A allo ſtato di bianche $n-1$ che ho chiamato primitivo, rieſca probabile, che in qualcuna d'eſſe avrò l'evento di bianche in A eguale a quello dello ſtato primitivo; e quante ve ne vogliono, perchè ſia probabile, che in alcuna d'eſſe io rimetta tutte le palle bianche nella prim'urna.

72. Ho detto, che queſti due caſi eſcon fuori della regola generale degli altri eventi, e lo provo così. Se il generale evento di bianche $n-z-1$ abbracciaſſe

eziandio queſti due caſi, potrebbero aver luogo le ipoteſi di $z=0$, e di $z=-1$, che dà $z+1=0$. Colla prima la formola $n-z-1$ diventerebbe appunto $n-1$, e colla ſeconda ſi farebbe $n-z-1=n$. Ma ciaſcuno de' moltiplicatori generali della ſerie contraria all' evento $n-z-1$ avendo i due fattori z, $z+1$, e l'una e l'altra delle due ipoteſi li ridurrebbe tutti a zero; la qual coſa annullerebbe il numero delle combinazioni contrarie ai detti eventi per qualunque corſo di permutazioni. Dunque, o ſiam ſicuri nel permutare di aver ſempre quegli eventi, perchè tutte le combinazioni ci ſon propizie, o eſſi ſi ſottraggono alla legge degli altri. E' paleſe l'aſſurdo, che abbianſi coſtantemente i due ſuddetti eventi, anche pel ſol rifleſſo, che eſſendo tra lor diverſi, uno eſclude l'altro neceſſariamente; e perciò reſta a dirſi, che eſſi domandano altre formole regolatrici, e ci ſomminiſtrano argomento per due novelli Problemi. Sia pertanto

PROBLEMA XIX.

73. *Partendoſi dallo ſtato primitivo di bianche* $n-1$ *nella prim' urna, ſi cerca il numero delle combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta lo ſteſſo ſtato* $n-1$ *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni.*

Forminſi le colonne degli eventi contrarj e delle reſpettive combinazioni nella maniera praticata dal primo inſino al nono Problema; e avremo

per 1 permutazione; $n\ 1\ |\ n-2\ (n-1)^2$ |: quindi le combinazioni contrarie; $1+(n-1)^2$:

per 2 perm. $\begin{matrix} n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) \end{matrix}\Big|\begin{matrix} n-2 & (n-1)^2 \\ n-3 & (n-2)^2 \end{matrix}\Big|$: comb. contr. $(n-1)^2(n-2)(n+2)$:

per 3 perm. $\begin{matrix} n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) \\ n-2 & 4(n-2) \end{matrix}\Big|\begin{matrix} n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) \\ n-3 & (n-2)^2 \end{matrix}\Big|\begin{matrix} n-2 & (n-1)^4 \\ n-3 & (n-2)^2 \\ n-2 & 9 \end{matrix}$

ecc.	$n-2$ $(n-1)^2$	$n-2$ $(n-1)^2$	comb. contr.
	$n-3$ $(n-2)^2$	$n-3$ $(n-2)^2$	$(n-1)^2(n-2)^2(n^2+4n+8)$.
	$n-3$ $6(n-3)$	$n-4$ $(n-3)^2$	ecc.

Colla pazienza di andare avanti nella ricerca de' termini della ricorrente, si trova, che essi van con quest' ordine; $(n-1)^2+1$; $(n-1)^2(n-2)(n+2)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^2+4n+8)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^4+4n^3+8n^2-100)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^6+4n^5+8n^4-100n^2-760n+1736)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^8+4n^7+8n^6-100n^4-760n^3-4940n^2+32176n-39520)$ ecc., e l' esame di questa serie la farà conoscere una ricorrente di 4°. grado, che ha i moltiplicatori 1.° $(n-2)(-56n^4+528n^3-1152n^2)$; 2.° $79n^4-460n^3+156n^2+2208n-2304$; 3.° $-18n^3-21n^2+516n-796$; 4.° $n^2+18n-58$. Si avverta però, che il primo termine di questa serie non è già $(n-1)^2+1$, come porta il numero delle combinazioni, ma solamente $(n-1)^2$. Quell' unità di più deriva dalla possibilità dell' evento di bianche n in una sola permutazione, laddove esso non può mai aver luogo in nessuna delle susseguenti, perchè, ov' esso accada, l' altro $n-1$ gli tien dietro necessariamente: e qui si cercano i contrarj allo stesso evento $n-1$. Volendosi perciò stabilire il termine generale della nostra serie, che, giusta la nota regola delle ricorrenti deve aver questa forma; $ap^v+bq^v+cr^v+ds^v$, ad aversi il vero numero delle combinazioni contrarie per l' ipotesi di $v=1$, ossia pel caso d' una sola permutazione, aggiungerem l' unità al risultato esibito dalla formola; o anche, per aver sempre presente la necessità di quest' aggiunta, scriveremo il termine generale della ricorrente così: $o^{v-1}+ap^v+bq^v+cr^v+ds^v$. Per tal modo nella supposizione che sia il numero v delle permutazioni maggiore dell' unità, col primo termine o^{v-1} non si accrescerà niente al valore de' susseguenti, e sol nell' ipotesi di $v=1$ avrem $o^{v-1}=o^0=1$.

PROBLEMA ULTIMO.

74. *Partendoſi dallo ſtato primitivo delle due urne, ſi cerca il numero delle combinazioni contrarie a rimettere almeno una volta in* A *tutte le bianche* n *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni*,

Erette le colonne competenti a ciaſcuna permutazione, ſi avrà

per 1. permutazione: $n-1 \;\; 2(n-1) \mid n-2 \;\; (n-1)^2$; onde le combinazioni contrarie; $(n-1)(n+1)$;

per 2. perm. $n-1 \;\; 2(n-1) \mid n-1 \;\; 2(n-1) \mid n-2 \;\; (n-1)^2 \mid n-2 \;\; (n-1)^2$
$n-1 \;\; 2(n-1) \mid n-2 \;\; (n-1)^2 \mid n-1 \;\; 4 \;\; \mid n-2 \;\; 4(n-2)$
ecc. $n-2 \;\; (n-1)^2$
$n-3 \;\; (n-2)^2$; comb. contr. $(n-1)^2(n^2+2n+2)$. ecc.

Non noto altre colonne, perchè nelle ſucceſſive permutazioni creſce di molto il lor numero; e già ſi ſa come ſi debba formarle. La ſerie contraria, che da eſſe dimana, è la ſeguente;

$(n-1)(n+1)$; $(n-1)^2(n^2+2n+2)$; $(n-1)^2(n^4+2n^3+2n^2-8)$; $(n-1)^2(n^6+2n^5+2n^4-8n^2-40n+56)$; $(n-1)^2(n^8+2n^7+2n^6-8n^4-40n^3-188n^2+752n-608)$ ecc., che pure è una ricorrente di 4.° grado generata dai moltiplicatori:

1.° $(n-1)(-6n^4+72n^3-144n^2)$; 2.° $31n^4-142n^3+78n^2+216n-144$; 3.° $-12n^3-3n^2+148n-156$; 4.° $n^2+12n-28$.

75. Orniamo queſt'ultimo Problema di qualche eſempio. Sia il numero di bianche $n=1$. In tale ipoteſi ſi annullano tutti i termini della ricorrente contraria; il che ci dà una certezza di avere almeno una volta bianche 1 qualunque ſia il numero delle permutazioni che domandiamo. In fatti, eſſendo lo ſtato primitivo delle urne, che in A ſia ſolo una nera, e in B una ſola bianca, colla prima permutazione è manifeſto, che in A ſi trasferiſce la bianca, paſſando la nera nella ſe-

conda urna. Ciò avvenendo infallibilmente nella prima permutazione, poi nella terza, indi nella quinta ecc., è chiaro, che qualunque numero di permutazioni sia chiesto, sempre in una d' esse avrem sicuro l' evento dell' unica bianca; e quindi ogni combinazione ci sarà favorevole, e non ne avremo alcuna contraria.

76. Facciam transito all' altra ipotesi di bianche $n=2$: e per le due serie, contraria, e favorevole ci nasceran questi termini; 3, 10, 32, 104 ecc.,
1, 6, 32, 152 ecc.
che sono i medesimi con quelli che abbiam trovato al §. 38. per la probabilità dell' evento di bianche $n-2$, cioè di nessuna bianca nella stessa supposizione di bianche $n=2$. Dunque, ove tutte le bianche sian due, egli è lo stesso il cercare, quante siano le combinazioni, che menan l'evento di tutte le nere, e quante sian quelle che favoriscono il ritorno di tutte le bianche nella prim'urna: la qual cosa non sembrerà punto strana a chi fa la riflessione, che nello stato primitivo trovandosi una nera e una bianca in ciascun' urna, debb' essere egualmente difficile levar bianca dall' una, nera dall'altra, e condurre l'evento del §. 38., che levar nera dalla prima, bianca dalla seconda, e rimetter nella prima tutte le palle bianche.

77. Ma come conciliare nelle due ipotesi l' identicità del numero delle combinazioni coll' indole delle due serie, essendo quella del §. 38. sol di secondo grado, ed arrivando al quarto quella del presente Problema? Ciò si fa agevolmente. Imperocchè a tutti è noto che, chiamati p, q, r, s i quattro moltiplicatori di una ricorrente di quarto grado, l' equazione $x^4 - sx^3 - rx^2 - qx - p = 0$ comprende le quattro radici che io denomino P, Q, R, S, le quali entrano nella formazione del termine generale $aP^v + bQ^v + cR^v + dS^v$, che conviene alla serie. Ponghiamo ora, che in una data ipotesi l' equazione suddetta di quarto grado sia divisi-

bile in due di secondo, onde nasca $(x^2+ex+f)\times(x^2+gx+b)=0$; e sian P, Q le radici del primo trinomio, R, S quelle dell'altro. E' evidente, che tutte e quattro le radici di quadrato-quadratiche, che originalmente erano, diventan quadratiche; e che non hanno alcuna dipendenza dai valori de' coefficienti a, b, c, d, i quali vengono determinati dai confronti del termine generale modificato alle quattro ipotesi di $v=1$, $v=2$, $v=3$, $v=4$, coi quattro primi termini della serie. Se perciò avverrà, che tali confronti facciano svanire i due primi coefficienti a, b; possiamo considerare la formola generale ridotta ai due termini cR^v+dS^v, che di per sè portano solo a una ricorrente di secondo grado; e possiam tener conto ancora de' due termini aP^v+bQ^v, i quali si distruggono non perchè P, Q sian zero, ma perchè s' annullano a e b. Quindi apparisce, come debba essere indifferente per la formazione della serie il servirsi de' due moltiplicatori, che sono stati determinati nel §. 38, o far uso de' quattro, che ci dà il nostro Problema, e perchè le due serie s' identificano tra loro perfettamente.

78. Posto finalmente $n=3$, le due serie contraria e favorevole procedono in questa maniera:

contr. 8,68,580,4964,42484,363668,3112996,26647556,228105364,
fav. 1,13,149,1597,16565,167773,1699973,16399165,159315125,
contr. 1952603060,16714460740,143077320356,1224754999348ecc.
fav. 15441813 41,14666598869,139352216125,1317110828981ecc,

nelle quali si osserva, che fino al termine duodecimo inclusivamente le combinazioni contrarie superano le favorevoli, cominciando solo nel terzodecimo ad esser queste in maggior numero delle prime. Dal che inferisco, che, essendo due bianche e una nera in A, una bianca e due nere in B, per giocare prossimamente in pari sulla probabilità dell' evento di tutte le tre bianche nella prim' urna, debbo chiedere o 12, o 13 permutazioni.

NUOVO

NUOVO USO

DELLA CHINACHINA NEL VAJUOLO.

Del Sig. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI.

IN un mio Opuſcolo, preſentato ultimamente alla *Regia Accademia di Mantova*, e da eſſa approvato, trattaſi qual uſo debba fare il Medico della Chinachina ne' morbi Purulenti. Ho ivi dimoſtrato che gli effetti buoni o cattivi della Chinachina in queſto genere di malattie ſi debbono aſpettare, più che da altre ſue facoltà, dalla forza ſua ſtitica e corroborante. In queſto frattempo eſſendo qui in Verona inſorta una fiera epidemia di Vajuolo, ho avuto campo, dietro a' fondamenti da me in quell' Opuſcolo propoſti, di ſpiare gli effetti della Chinachina anche in queſto morbo. Ed avendoli trovati corriſpondere efattamente alla mia aſpettazione, ho riſoluto di pubblicare in queſta Memoria le mie oſſervazioni e rifleſſioni ſu di tal propoſito; la quale quindi ſi dovrà conſiderare come un' appendice di quell' Opuſcolo; e come una prova del modo di filoſofare da me in eſſo tenuto. E quel che più importa ſervirà eſſa moltiſſimo ad eccitare i Medici noſtri ancor dubbioſi e reſtii a tentare la Chinachina anche nel Vajuolo, come in altri paeſi lodevolmente ſi coſtuma di fare.

Due caſi pratici, fra molti che ſe ne potrebbono addurre, ſerviranno di baſe e norma al noſtro ragionare. Un de' quali, in cui non fu uſata la Chinachina, fu mortale; l' altro del tutto a quel ſimile, uſata la Chinachina, ebbe buon fine. Paſſeremo indi a dare un

Catalogo di Scrittori che hanno lodata la Chinachina nel Vajuolo ; ne esamineremo i motivi per i quali fu da essi prescritta; e saremo vedere che a tutt' altro fine l' hanno ordinata , da quello che noi proponiamo. Conchiuderemo con fissare il tempo più opportuno , e la maniera più adattata di servirsi di quest' ottimo medicamento: i di cui salutari effetti nel Vajuolo se fossero stati noti al *Trillero* , avrebbe avuto maggior ragione di esaggerare: *omnis in hoc solo cortice est salus , omneque præsidium & sacra quasi anchora : sed ad immensas hujusce febrifugi laudes merito decantandas profecto nec dies sufficit , nec mensis , nec annus , immo vix integrum seculum , sicuti ad describendas innumeras virtutes ipsius non paginæ , non libelli aut libri ; sed spatiosa potius volumina omnino requiruntur.* (*a*)

ISTORIA PRIMA.

La Signora *Teresa P.....* maritata , d' anni 20. il dì 16. di Giugno dell' anno 1779. fu presa dalla febbre, con forti dolori del dorso , e con inclinazione al vomito . Il terzo dì si spiegarono nella faccia moltissime pustulette somiglianti ai morbilli , con vaniloquio. Il quarto dì le pustule si fecero vedere per tutto il restante del corpo; e segnarono un Vajuolo chiamato *confluente* . In questo giorno prese un purgante , e le fu tratto sangue . Nel quinto dì le pustule si alzavano , ma aspre e rosse fuor dell' usato: crebbe la febbre nella sera con notabile affanno di respiro di breve durata. Nel sesto stette il male sul medesimo piede. Nel settimo d' improvviso biancheggiarono nella faccia le pustule , una nell' altra entrando e confondendosi con poca materia . Nell' ottavo biancheggiarono con poca mate-

(*a*) Disp. Pharm. R. Veget. cap. 7.

ria le puſtule del reſto del corpo. Nel nono ſi abbaſſarono, e cominciarono a diſſeccarſi nella faccia e per tutto. Quindi nel decimo inſorſe una nuova febbre, che rialzò le puſtule, e le riempiè di marcia, reſtandone alcune di ſanguigne e livide. Nell'undecimo tornarono nella faccia a diſſeccarſi; ſcorrendo a piccoli laghetti la bianca ſottil materia di ſotto alla cute. Nella ſera di queſto dì ſopravvenne un paroſſiſmo di febbre, per cui di queſta vita paſsò. Uſati in darno in tutto il decorſo del male i più appropriati rimedj diluenti e rinfreſcativi.

ISTORIA SECONDA.

La Signora Conteſſa *Bianca G*..... vergine, di anni 21. il dì 4. di Settembre dell'anno 1779. fu preſa da acuta febbre con forti dolori negli arti inferiori, per cui le fu tratto ſangue; ed il giorno dopo fu purgata. Il terzo dì apparvero nella faccia alcuni ſegni, come di morbilli, i quali dimoſtrarono apertamente nel quarto un Vajuolo del genere de' *confluenti*. Sino all'ottavo ſtette il male ſul medeſimo piede: allora d'improvviſo, una nell'altra entrando, biancheggiarono le numeroſiſſime puſtule: molte veggendoſene di livide e ſanguigne. Si aperſero gli occhi da prima chiuſi, e cominciava la pelle a corrugarſi ed appaſſirſi: reſtando viva la febbre e moleſte le veglie. Nel nono giorno preſcriſſi una ſorte decozione di due once di ſcelta Chinachina, da prenderſi in due giorni, più volte al giorno. Quantunque nella ſera ſi aumentaſſe la febbre, dormì tranquillamente; e la mattina del decimo giorno era alquanto ſollevata. Ma con mio ſtupore la trovai enormemente enfiata nella teſta, e nel reſtante del corpo tutto, come ſe foſſe idropica; con gli occhi nuovamente chiuſi, con le puſtule rialzate, e con laghetti di materia ſcorrente ſotto la cute. Nell'undecimo ſeguitò a migliorare in tutto benchè duraſſe la febbre; e

ſi manteneſſe gonfia la pelle. In queſto e ne' ſeguenti giorni preſe ſolamente due dramme di polvere di Chinachina; nel qual tempo ſi andò a poco a poco condenſando e diſſeccando la materia alla cute; caddero dal volto groſſiſſime ſcaglie, e poco dopo tutto il reſtante del corpo ſi mondò con intollerabil fetore, e con un moleſto prurito nel volto, dove furon trovati annidati ſotto alle croſte innumerevoli vermi. Non ſuccedè diarrea, non comparvero tumori, nè urine corrotte nella convaleſcenza; tantochè nei primi di Ottobre potè ſortire di caſa. Usò anche queſta nel decorſo del male rimedj diluenti e rinfreſcativi; e benchè queſta e quella cadeſſero inferme in diverſa ſtagione, era però nel tempo del loro male il caldo a un grado ſteſſo poco maggiore del temperato.

Queſti due caſi, quanto può eſſere morbo a morbo ſimile, erano fra di loro del tutto ſomiglianti, benchè di eſito felice l'uno, e l'altro fatale. Rappreſentavano una ſpecie ſteſſa di Vajuolo maligno e *confluente*, in una ſteſſa *Coſtituzion Epidemica*, in uno ſteſſo grado di calore, in perſone della ſteſſa età, ſeſſo e temperamento; e trattati furono amendue dal principio al progreſſo del male con metodo ſteſſo *antiflogiſtico*, anzi con la ſpecie ſteſſa di governo e medicamenti. Nel fine in ciò ſolo fu differente la cura, che in uno fu uſata la Chinachina, nell'altro non fu uſata. Il malo eſito del primo di queſti due caſi, ſucceduto nel tempo dell'infievolimento delle puſtule, già compiuta la ſuppurazione, ha fatto me ſollecito nel ſecondo del tutto ſimile, a cercare nella Chinachina un pronto ſoccorſo in queſto critico tempo pericoloſo, per cui la materia alla cute generata, o tutta o in parte almeno, foſſe impedita di rientrare a guaſtarne il ſangue e ad offendere le viſcere con la ſua venefica putridità. Quantunque io ſapeſſi che il gonfiamento del viſo e delle mani nel tempo della ſuppurazione del Vajuolo è un ottimo ſegno ſecondo

la pratica, e ſecondo l'avviſo degli Scrittori; pure l'effetto della Chinachina immediatamente ſucceduto, di rigonfiare per la ſeconda volta il viſo e le mani ed il corpo tutto enormemente, tennemi per alquanto tempo dubbioſo e ſoſpeſo; ſinchè veggendo ceſſare con eſſo gli altri ſintomi minaccioſi del Vajuolo, ſenza che ſuccedeſſero nuove febbri, o diarrea, o urine marcioſe, o tumori e aſceſſi nelle parti, fui aſſicurato che l'effetto della Chinachina da me tentato corriſpoſe veramente alla mia aſpettazione; e che la materia ritenuta ſempre alla cute, e al di ſuori addenſata e *concreta*, fu per la forza ſtringente della Chinachina impedita di rientrare.

Benchè nella volgare pratica di Medicina non ſia introdotto di uſare la Chinachina nel Vajuolo; non è però che da molti Autori non ſia approvato e raccomandato il ſuo uſo.

Riccardo Morton fu il primo a parlare della Chinachina nel Vajuolo. Se nel tempo della declinazione del Vajuolo, dic'egli, la febbre recidiva ſi ſveſte di malignità, e acquiſta periodi di eſacerbazione e remiſſione, per niun'arte meglio ſi cura, quanto coll'uſo della Chinachina. (*b*)

Il *Freind*, ſcrivendo ſull'uſo de' purgativi nella ſeconda febbre del Vajuolo, dice che alcuni Medici in quel tempo pretendevano di prevenir felicemente la ſteſſa febbre con l'uſo della Chinachina; di che egli però grandemente dubitava. (*c*)

Il *Frewin* riferiſce di un Vajuoloſo già mondato dalle croſte, e ancor febbricitante, cui la Chinachina non ſanò; ma guarì coi purgativi. (*d*)

(*b*) Op. tom. 3. cap. 10.
(*c*) De Purg. in ſec. Var. febr. p. 102.
(*d*) In *Freind*, de febr. com. 7.

Il *Bate* dice di aver usata la Chinachina in una febbre secondaria del Vajuolo, ma inutilmente. (*e*)

Questi quattro Scrittori fiorirono sul finire del passato secolo, e nel cominciamento di questo che corre. Onde errò *Morando Morandi* allorchè scrisse, che il Sig. *Monrò* fu quello che estese *la virtù della Chinachina sopra il Vajuolo, e primo ne ha sperimentato il buon esito* (*f*): mentre questo Scrittore di questo parlò poco prima del 1740. ne' *Saggi d'Edimburgo*, come ora vedremo.

Alessandro Monrò fu il primo ad usare la Chinachina nel Vajuolo per altro fine, che per frenare la seconda febbre di esso. „ L'effetto della Chinachina, dic' egli, „ in procurare una dolce suppurazione, mi ha fatto pen„ sare di poterla usare ne' Vajuoli di cattivo caratte„ re, tanto allorchè la suppurazione delle pustule non „ dimostrava stabilirsi, com'è necessario; quanto allor„ chè comparisconо con minaccie di cancrena. Ho avu„ ta la contentezza di vedere in molti malati di Va„ juolo l'effetto della Chinachina riuscire a seconda del „ mio proposito. Le pustule prima oppresse si sono riem„ piute di materia; la sania serosa si è convertita in „ una marcia spessa e bianca, e le macchie purpuree „ hanno mutato colore, sono divenute insensibilmente „ più pallide, e finalmente disparvero. Diedi da prin„ cipio la Chinachina in decozione, e poi in estratto: „ in seguito lasciai queste deboli preparazioni per appi„ gliarmi alla Chinachina polverizzata mescolata con „ qualche siroppo cordiale, e con acqua destillata aro„ matica, e in questa forma ne ordino dai dieci fino „ ai quaranta giorni, replicandola ogni quattro o cin„ que ore. Finora non ho data la Chinachina nel Va„ juolo se non dopo l'eruzione delle pustule, e ne ho

(*e*) In *Freind*, de Purg. ecc. p. 109.
(*f*) Della Cura del Vajuolo p. 21.

„ fatto continuare l'uſo fino a tanto che furono intie-
„ ramente diſſeccate ; ma ſono perſuaſo per gli effetti
„ che l'ho veduta produrre per mitigare i ſintomi del-
„ la febbre ſecondaria, che ſe ſi daſſe nel tempo dell'e-
„ ruzione , potrebbe contribuire a rendere il Vajuolo
„ di una ſpecie più favorevole. (*g*)

Il Dott. *Flemyng*, in un ſuo progetto, in cui s'impegna di far eſaminare e diſcutere da alcuni altri, tutto quello che i Medici proporranno per l'avanzamento della Medicina , e che ſtimeranno poter eſſer utile , propone di eſaminare gli effetti della Chinachina nel Vajuolo, e ne raccomanda l'uſo , che con ſuo piacere ha veduto praticare dal Sig. *Monrò*. (*h*)

Il Dott. *Wall* è l'unico che abbia ſcritto particolarmente ſu queſta materia , in una Memoria inſerita nelle Tranſazioni Filoſofiche d'Inghilterra (*i*). Come il ſuo Opuſculo è rariſſimo , e ſcritto in idioma a pochi noto, non ſarà diſutile il dar qui di eſſo una idea alquanto più eſteſa e circoſtanziata . Le aſſerzioni del *Monrò* e le ſue promeſſe moſſero il Dott. *Wall* a far uſo della Chinachina nel Vajuolo , ed in ogni tempo di eſſo , a fine di ottenere una buona e lodevole ſuppurazione. Ma egli è paſſato avanti : e conſiderando gli uſi della Chinachina in altri mali, dove la craſi del ſangue trovaſi rotta e ſcompoſta, ſingolarmente nelle febbri petecchiali e porporate , accompagnate da emoragie ed altri terribili ſintomi, ſperò che doveſſe eſſere molto utile nel Vajuolo, bene ſpeſſo da tali circoſtanze peſſime accompagnato. Veggiam ora a parte a parte i ſucceſſi delle ſue prove in alcuni caſi da eſſo narrati.

Caſo Primo. Un Gentiluomo di anni 24. ſi ammala dopo un violento ballo. Se gli cava ſangue infiammato;

(*g*) Saggi di Edimb. tom. 5. art. 10.
(*h*) Saggi d' Edimb. tom. 7. art. 1.
(*i*) The philoſophical Tranſactions abridged, vol. the tenth. p. 1035.

si purga con manna, e beve un decotto nitrato. Vien chiamato il terzo giorno il Dott. *Wall*. Le pustule erano numerosissime con porpora, scorreva il sangue dal secesso, sputava bene, ed il polso era frequente e debile: e gli dolevano i lombi. Prescrisse uno scrupolo di Chinachina ogni due o tre ore, e per bevanda ordinaria una tintura di rose acidulata. In quarantaotto ore disparve la porpora, cessò la emoragia; si sollevò il polso, e si se più raro, e le pustule si alzarono. Sino al nono dopo l'eruzione tutto andò bene, in qual tempo seguitò ad usare la Chinachina, e prendeva la sera lo sciloppo di Meconio. Dopo si se sonnacchioso, e morì nello stesso giorno.

„ Benchè, soggiunge l'Autore, in questo primo esem-
„ pio sia l'infermo miseramente perito, ciò non ostan-
„ te io son contento del buon effetto prodotto dalla
„ Chinachina.

Caso secondo. Vien chiamato il Dott. *Wall* da un Giovane di anni dodici, da sei giorni ammalato di Vajuolo. Questo era del genere de' *confluenti* con bolle sanguigne, con petecchie e porpora; e con un molesto prurito nel naso che minacciava emoragia. Per l'addietro avea delirato, e il suo polso era debile e tremolante. Gli ordinò ogni tre ore uno scrupolo di estratto di Chinachina, ed una bevanda con olio di vitriolo e sciloppo di sambuco. Dopo aver prese due dramme di Chinachina, disparvero le petecchie e la porpora; sicchè continuò dopo fino al fine della malattia l'uso della Chinachina. Crebbero le pustule in grandezza a tal segno che sembrava il Vajuolo del genere de' *discreti;* e la pelle molto si gonfiò per la quantità della marcia. Guarì felicemente l'infermo.

Caso Terzo. Ad un Giovane di anni 21. dopo il secondo dì comparve un Vajuolo con spessa porpora, con violenta uscita di sangue dal naso, e con atroce dolore di lombi. Fu medicato dal Dott. *Wall* con lo stes-
so

ſo metodo, col quale medicò l'infermo in ſecondo luogo deſcritto; e guarì com'eſſo felicemente.

Caſo Quarto. Un Giovane d'anni 24. dopo un violento eſercizio fu preſo da' ſintomi del Vajuolo: dolori di ventre e difficoltà di reſpiro. Il Dott. *Wall* chiamato nel terzo giorno, vide la ſua pelle coperta di porpora, ed avea un polſo piccolo e vibrante. Preſcriſſe un ſalaſſo dal braccio, ed ordinò l'eſtratto di Chinachina, con allume crudo, acqua di cannella, e ſciloppo di cotogni. Il dì dopo migliorò, facendoſi il polſo pieno e regolato, e levandoſi le puſtule del Vajuolo, e ſcomparendo la porpora. Succedè la diarrea con urine roſſiccie; onde laſciato l'allume, gli ordinò la terra Giaponica coll'eſtratto di Chinachina e ſciloppo di Meconio la ſera: continuando i quali rimedj guarì preſtamente.

Caſo Quinto. Un Giovane di anni 21, preſo dal Vajuolo era ridotto nel ſeſto giorno ad un peſſimo ſtato, avendo numeroſe petecchie, e una gamba intaccata di cangrena. In queſto giorno fu chiamato il Dott. *Wall*, e gli ordinò mezz'oncia di eſtratto di Chinachina con due ſcrupoli di allume crudo. Il dì dopo ſcomparvero le petecchie: ſi fermò, e ſeparò la cangrena; e continuando lo ſteſſo metodo di cura con null'altro guarì perfettamente.

Caſo Seſto. Una ſorella di queſto Giovine, di anni 19. fu attaccata dal Vajuolo *confluente* con petecchie e porpora, con emoragia uterina, dolor de' lombi, ed eſtrema debilità. Preſe la Chinachina coll'allume in tutto il decorſo del male, con lo ſteſſo metodo; e ſenz'altro guarì.

„ Uno però dei più rimarcabili eſempj, ſegue l'Au-
„ tore, di quanti mi occorſero, dimoſtrativi della effi-
„ cacia della Chinachina in queſta terribile malattia,
„ ed in tutto il tempo della ſteſſa, ſi è il ſeguente:

Caſo ſettimo. Una Fanteſca preſa da' ſintomi del Va-

juolo, fu falaſſata. Due giorni dopo l'eruzione chiamato il Dott. *Wall*, trovò le puſtule numeroſiſſime, piccole e rognoſe; con porpora frammeſſa. Gli occhi eran lagrimoſi, con un aſpetto di viſo triſte ed affannato (ſintomo non badato da' Medici, ma pur terribile e pauroſo ne' morbi acuti). Avea mal di gola, delirio, diarrea, emoragia uterina, con un polſo frequente e riſtretto, coſicchè parea vicina a ſpirare. Le fece prendere Chinachina con allume, quanta più ne poteva inghiottire. Dopo dodeci ore inghiottiva più liberamente, e preſe in un giorno mezz'oncia di eſtratto di Chinachina con due ſcrupoli di allume crudo. Continuò a prender la Chinachina ſenza allume per altri tre o quattro giorni: in quel tempo ſcomparvero la porpora e la emoragia, ſi alzarono le puſtule e ſputò aſſaiſſimo. Tutto andò bene ſino al ſedicesimo dopo l'eruzione. Allora ſotto falſi preteſti ingannando la cuſtode, annojata traſcurò di più oltre medicarſi. Fu portentoſo il danno ſeguito da queſta traſcuranza. Il ſuo polſo ſi fe frequente e debile, gli umori acquiſtarono un ſommo grado di corruzione, d'onde ella morì tutta sfracellata nel vigeſimo giorno del male.

„ Da queſti pochi eſempj, conchiude l'Autore, e da
„ altri molti che io potrei addurre, ſi poſſono cono-
„ ſcere i ſorprendenti effetti della Chinachina nel Va-
„ juolo. L'ho preſcritta a molte perſone nei primi
„ giorni del male, quando prima del Vajuolo erano da-
„ te fuori le petecchie; ed in altre nel tempo primo
„ della ſuppurazione, quando la materia era ancor cru-
„ da ed acquoſa, e poſſo dire con verità, quaſi ſem-
„ pre con buon ſucceſſo. Ora io ſon ſolito a continu-
„ are l'uſo per tutto il tempo della malattia, ſinchè
„ è ben netta dalle ſcaglie la pelle. In queſto ultimo
„ tempo occorrendo nettare le prime ſtrade, frammez-
„ zo ai purganti ordino io la Chinachina, ſinchè tro-
„ vo che le fibre ſono ſpoſſate, e gli umori tenui ed

„ acrimonioſi. Venendo io chiamato a viſitare infermi
„ con petecchie, porpora, miliare, emoragia, o che
„ trovi in eſſi la crasi del ſangue diſtemperata, o che
„ ſiano in pericolo di vita, immediatamente loro pre-
„ ſcrivo la Chinachina. Non bado che il polſo ſia pie-
„ no, credendola neceſſaria tanto nel polſo vigoroſo,
„ che nel debile; per eſſere coſa evidente che in queſti
„ caſi le fibre ſono rilaſſate, e gli umori tiranti ad una
„ putrida acrimonia. In molti di quelli, a' quali io ho
„ ordinata la Chinachina, ho trovato più pronta del
„ ſolito la maturazione delle puſtule, e tutto il corſo
„ del male di molto abbreviato; ch'è una particolari-
„ tà molto oſſervabile. Io d'ordinario uſo l'eſtratto del-
„ la Chinachina (compoſto con la bollitura della ſteſſa e
„ qualche ſale alcalino inſieme) e queſto lo ſtimo da
„ preferirſi alla Chinachina in ſoſtanza; perciocchè ſen-
„ za diminuire di forza ſi ha in eſſo il vantaggio di
„ aggravar meno lo ſtomaco degl' infermi. Ne' bambi-
„ ni, e nelle dilicate perſone che ſi potrebbono offèn-
„ dere dal ſapore di queſto rimedio, ſi può loro por-
„ gere dentro il cioccolatte; che ſe è compoſto con
„ molto zucchero ſerve più d'ogni altra coſa a conſon-
„ dere l'amarezza della Chinachina.

Il Dott. *Huxham* loda la Chinachina come rimedio di preparazione nel primo ingreſſo del Vajuolo; ma ſolo dove debili ſono le fibre, e dov'è tenue ed acquoſa la coſtituzion degli umori. Più volentieri la preſcrive nella declinazion del Vajuolo in certe ſpecie di eſſo. „ Io uſo, dic'egli, d'ordinario la tintura di Chinachi-
„ na aleſſifarmaca, reſa acida coll'eliſire di vitriolo, e
„ poi paſſo alla decozione di eſſa, ovvero al ſuo eſtrat-
„ to. Siami però lecito di avvertire che per neſſun mo-
„ do ſi preſcriva dove il reſpiro è affannato: e dove il
„ il ventre è ſtitico ed oſtrutto, finchè queſti ſintomi
„ non ſiano levati. Credaſi pure che la tintura di Chi-
„ nachina aleſſifarmaca nel Vajuolo, ſpecialmente lin-

„ fatico, è utilissima, purchè si dia dopo l'intiera com-
„ parsa delle pustule, a facilitare la maturazione di esse:
„ com'è pur certo che questo rimedio procura una lode-
„ vole suppurazione nelle ulcere di cattivo carattere. (*k*)

Il Dott. *Mead* loda la Chinachina in una certa specie di Vajuolo, da lui detto *sanguigno*, all'effetto d'ingrossare il sangue, affinchè non possa scappare da' minimi vasellini. Così la loda dove la terzana doppia o semplice al Vajuolo si aggiunge, ricordando che non nuoce essa alla maturazion delle pustule: a cui anzi giova frenando i movimenti febbrili, che la disturbano. (*l*)

Il *Roncalli* accorda che sul finir del Vajuolo la Chinachina possa adoperarsi, ma la crede dannosa nel principio: rimprovera però l'*Elvezio* perchè l'abbia al principio prescritta nella sua polvere febbrifuga. Ma l'*Elvezio* non è da numerare fra gli Autori che ricordano l'uso della Chinachina nel Vajuolo, mentre nella sua polvere febbrifuga non ha verun luogo questo medicamento, come crede il *Roncalli*. (*m*)

Morando Morandi ha stampato un libro con lo specioso titolo: *Della Cura del Vajuolo con la Chinachina e col bagno tiepido*. Poche parole però in tutto il decorso del libro si leggono in proposito dell'uso della Chinachina nel Vajuolo. Dic'egli che in una epidemia dell'anno 1737, ed in una dopo del 1741, non stette egli guari tempo a consigliar tutti gli amici, e fino le più abbiette cencìose madri, che ai loro figliuoli facessero giornalmente ingojare uno scrupolo di Chinachina entro un po' d'acqua o di vino; ed a quei bambini che nol volevano s'ingegnassero di porre un giorno sì e l'altro no un cristeo fatto coll'infusione della Chinachina al peso di una dramma bollita nell'acqua pura, e ne

(*k*) Dissert. de Variol.
(*l*) De Var. & Morb. cap. 3. & 4.
(*m*) Europ. Medic. p. 58.

continuaſſero giuſta la biſogna il buon uſo. Con che ſoggiunge, e con la cavata anche più volte reiterata di ſangue, e col bagno tiepido, e con eſattiſſima dieta, e con bere ſoventi fiate del latte bollito con entro un po' di zucchero, nel decimo o undecimo giorno, e ben rade volte più tardi, gli venne ſempre veduto cader riſeccate ſenza ſmania d'alcun prurito le croſte de flemmoni, e nel decimo quarto dì ſenza butteri nel viſo tutti pur anche gli ammalati perfettamente guarire. Paſſando poi il dotto Autore a render ragione de' vantaggi che ſi riportano dalla Chinachina nel Vajuolo così diſcorre. „Nel Vajuolo dal principio acre-ſtimolante „ infiammatorio non tentaſi che d'accoppiar ſoluzioni, „ le quali diminuiſcono il numero de' globetti pian„ ovali ſventandoli, e poſcia vanno a depoſitarſi tutte „ per mezzo di flemmoni alla pelle. Comechè però „ l'eſſenza di tali depoſiti è in ragione della qualità, „ e della quantità de' globetti ſteſſi, così egli è meſtie„ ri o mantenerli, o reclutarli. A ciò ottenere non „ avvi rimedio migliore della Chinachina, come ama„ ricante-ſtiptico, perchè con queſta, al dire del *Boe„ rhaave* nel ſuo Trattato della forza de' Medicamen„ ti, ridonasi la perduta elaſticità ai vaſi, s'accreſco„ no le velocità ai fluidi, e quindi quel natural calo„ re, che da' globetti pian-ovali vuolſi tutto dipen„ dere, e perchè ſecondo l'oſſervazione d'*Ecquet* nella „ ſua Patologia, s'aggiunge momento agli ſteſſi, e ſe „ ne aumenta il numero. (*n*)

Il *Lieutaud* dice che ove nel Vajuolo ſuccede una febbre doppia terzana, o altra intermittente, biſogna ricorrere alla Chinachina; della cui virtù in ſimiglianti caſi da replicati ſperimenti ſiam fatti baſtantemente ſicuri. (*o*)

(*n*) Della Cura del Vajuolo p. 72.
(*o*) Prax. Med. part. 2. ſect. 4.

Il *Vanſwieten* parla bensì della Chinachina nel Vajuolo; ma non adduce eſperienze proprie nè ragioni: e ſol riportaſi ad altri Autori. (*p*)

Nel Giornale Medico Franceſe vien lodata la Chinachina nel Vajuolo di una maligna natura. (*q*)

Boiſſer de Sauvages dice che ſe dopo l'efficazion delle puſtule reſti una febbre remittente, ſi debba uſare la Chinachina. (*r*)

Il de *Haen* racconta di una Fanciulla, che avea un Vajuolo *confluente* e maligno, cui fu data la Chinachina nell' undecimo giorno, e morì. Poi parla di un'altra che avea una ſuppurazione al petto, diſſenteria, ſcarlatina, miliare e Vajuolo inſieme, alla quale ha data la Chinachina due giorni dopo la comparſa del Vajuolo, e morì nel quinto. Nel primo di queſti due caſi, ſoggiunge l'Autore, mitigò la Chinachina il male, ma non giunſe a conſervare la vita: forſe per eſſere ſtata troppo tardi preſcritta. Nel ſecondo caſo preſcritta più per tempo, prolungò per poco la vita, che ſtava per eſtinguerſi, moderò i ſintomi del male, e le reſtituì tranquillità e forze. Segue un terzo caſo di una Donna maritata aſſalita dalla febbre, contro cui fu preſcritta la Chinachina: ſotto l'uſo della quale diede fuori un Vajuolo, che fu benigno e *diſcreto* e finì in bene. Dal qual caſo, ad opinione dell' Autore, due coſe s' imparano: la prima, che la febbre contagioſa del Vajuolo può eſſere del genere delle intermittenti. La ſeconda, che la Chinachina preſa nel più feroce corſo contagioſo di Vajuolo con ottimo ſucceſſo produſſe un Vajuolo di benigniſſima indole. (*ſ*)

Il *Torraca* narra di un fantolino preſo da un Vajuo-

(*p*) In Boerh. aph. 1402.
(*q*) V. *Sauvages*. Noſol. tom. 1. p. 226.
(*r*) Noſol. tom. 1. p. 224.
(*ſ*) Rat. Med. part. 2. cap. 6.

lo *confluente*, degenerato in una univerſale cangrena, brevemente e felicemente con ſuo ſtupore da lui curato con la Chinachina. (*t*)

Lo *Storchio* varie maniere di medicamenti preſcrive nel Vajuolo, ne' quali entra la Chinachina, non tanto per ovviare alla febbre, quanto per ravvivare le forze dell' ammalato, per fare oſtacolo alla putrefazion degli umori, e alla loro diſſoluzione: in que' caſi principalmente dove le puſtule ſi mantengono poco elevate, dove il colore di eſſe è roſſoſcuro, e fra eſſe la pelle è floſcia o livida, dove ſe pur elevate ſono hanno baſſa e piana la ſommità, o ben anche l' hanno livida o nera, dove puſtule ſi frammiſchiano livide e nere, dove l' urina puzza oltre l' uſato, o è torbida per miſto ſangue diſciolto, e neraſtra. (*u*)

Il *Tiſſotti* dice in un luogo d' aver provata inutile la Chinachina uſata come rimedio preſervativo nell' Inneſto del Vajuolo, anzi dannoſa. (*x*)

Ma altrove, nelle Lettere, così ne parla. „ Altri „ inſinuano la Chinachina, quale non vorrei che nel „ Vajuolo foſſe defraudata dalle ſue lodi: ma confeſſo „ che nella ſecondaria più grave dopo eſſer antecedu„ to un vero morbo infiammatorio, non ancora l' ho „ uſata, perchè giammai ho veduto poterſi ſicuramen„ te propinare. E nell' urinare cruento vorrei che ſi u„ faſſe con cautela. Al certo ſembra non corriſponde„ re a tutte le indicazioni della febbre ſecondaria, e „ ad alcune è manifeſtamente contraria. Ma giova mol„ to ſiccome nelle febbri maligne, così in quel mali„ gno Vajuolo, il quale moſtri le fibre laſſe, un ſan„ gue diſciolto e putrido, ed una ſomma debolezza,

---

(*t*) Specim. Experim. art. 5.
(*u*) Medicinisch-practiſcher Unterricht, erſter Theil, von den Pochen, oder Blattern. Seite 267.
(*x*) Dell' Inneſto prat. del Vajuol. cap. 1.

„ e continuamente minaccia cangrena per il ſangue vap-
„ pido e putredinoſo. Allora in tutto il decorſo della
„ malattia preſa ogni giorno alla doſe di tre, quattro
„ o cinque dramme felicemente il morbo cura. In un
„ ragazzo di dodici anni dopo una crudeliſſima ma-
„ lattia, eſſendoſene caduta una parte della maſcella in-
„ feriore, egregiamente terminava la cura, propinata
„ a frequenti e minime doſi; e nel tempo medeſimo
„ in luogo di alimento prendendo il latte di vacca, ed
„ a cucchiajate. Giova eziandio contro quella febbre
„ lenta, la quale rimane alle volte dopo qualche Va-
„ juolo, o graviſſimo, o malamente curato, o mali-
„ gno; e così allontana la tabe. In fine ſi preſcrive
„ con grandiſſimo utile, ſe ſiccome ho veduto al Va-
„ juolo vi ſi aggiunge la febbre intermittente: in tutti
„ gli altri caſi, purchè ne apporti qualche poca, è
„ ſempre di minor utilità. (*y*)

L' *Anonimo* Franceſe nel Dizionario Compendioſo di Sanità ricorda: che quando i bottoni cominciano a biancheggiare, ſopraggiunge una ſpezie di febbretta, che ſi chiama ſecondaria. Si uſi allora una decozione di Chinachina. La Chinachina ſi è propriiſſima per promovere la ſuppurazione, e per conſeguenza per maturare le puſtule. (*z*)

Il *Sografi*, parlando del modo di operare della Chinachina in certe malattie paſſa a dire: „ Non poſſia-
„ mo dubitare, che la Chinachina nel ſiſtema de' lin-
„ fatici con particolare virtù non diffonda i ſuoi prin-
„ cipj ſalubri. E quindi ci ſembra dover intenderſi,
„ perchè nelle febbri peſtilenziali, e maligne, nel Va-
„ juolo, ſiccome porta la ſperienza del *Morton*, l'uſo
„ della

(*y*) Della Cura del Vajuolo. num. 67.
(*z*) Verb. *Vajuolo*.

„ della Chinachina fia giovevole : eſſendo quelle ma-
„ lattie dipendenti dal diſordinato moto della linfa, e
„ dalla viziata qualità di eſſa, ed eſſendo quel rime-
„ dio con particolare qualità atto a diffondere per lo
„ ſteſſo ſiſtema de' vaſi le forze ſue. (*a*)

Queſti ſono i nomi degli Autori, i paſſi e i luoghi nelle lor opere, i quali mi è riuſcito di trovare e raccogliere nel propoſito della Chinachina nel Vajuolo. Vedeſi qui in un colpo d' occhio uſata la Chinachina prima d' inneſtare il Vajuolo, per ſarlo naſcere di una benigna indole. Vedeſi uſata a moderare le prime febbri, acciocchè queſte non impediſcano o ritardino la comparſa delle puſtule alla pelle. Vedeſi uſata, comparſe le puſtule, per ſollevarle ſe foſſero troppo baſſe e piccole. Vedeſi uſata per farle preſto paſſare ad una buona e lodevole ſuppurazione. Vedeſi uſata a fare che le croſte preſto cadano, e laſcino minori difformità nel viſo. Ad altri fini ancora ſi vede uſata nel tempo del Vajuolo : a togliere cioè e far ſcomparire le macchie di porpora o le petecchie che s' intrometteſſero alle puſtule; a riunire i globetti del ſangue rotti e ſtemperati dal fervore del morbo infiammatorio; a correggere non ſo quali diſordini nel moto e qualità delle linfe; a rinvigorire le fibre debili e laſſe, a dar corporatura agli umori rotti e diſciolti; a togliere ed impedire la cangrena delle puſtule e delle membra; a togliere in fine o moderare le ſuccedanee febbri o periodiche, o infiammatorie o lente. Vedeſi così adoperata nel principio, aumento, ſtato, e declinazione del Vajuolo; e ben anche nel tempo ad eſſo precedente, e ſuſſeguente : facendo fare ad un rimedio ſolo e ſempliciſſimo le varie e nobili figure di *profilattico*, d' *antiflogiſtico*, di *aleſſi-*

(*a*) Differt. ſopra il Queſito : *Se nel caſo* ecc. num. 27.

farmaco, d' *incraſſante*, di *cardiaco*, di *ſuppurativo*, d' *antiſettico*, di *correttivo*, d' *anticangrenoſo*, d' *antifebbrile*, di *coſmetico*; in un male ſolo e ſempliciſſimo, qual è il Vajuolo.

Io non ſon qui per fare encomio, o critica a veruno di queſti uſi; laſciando la coſa come ſta; e a chiunque libero l' appigliarſi a quella pratica de' nominati Scrittori, a cui più piace appigliarſi. Quel ch' io dico ſi è che io per niuna autorità di Scrittore, nè da perſuaſione di veruna loro opinione moſſo, ſon paſſato ad uſare la Chinachina nel Vajuolo; ma per un fine del tutto nuovo, da veruno di eſſi non preveduto: il quale, ho coraggio di aggiungere, ſi è inſieme il più deſiderabile e utile, ed il più naturale inſieme, e meno ricercato e dubbioſo.

Queſto è di oſtare con la forza ſtitica e coſtrettiva della Chinachina al riconcentramento della materia Vajuoloſa, compiuta la ſuppurazione.

Che una forza ſtitica e coſtrettiva nella Chinachina ſi trovi, non è da metterſi in dubbio; appaleſandoſi queſta al palato, ed all' occhio, nel reſtringere che fa e raſſodare le carni e pelli degli animali. Che con queſta ſua facoltà principalmente operi nel corpo noſtro i portentoſi effetti che ſi veggono in varj morbi operare, lo affermano concordemente i Pratici più eſperimentati. Alle autorità dell' *Ettmullero*, del *Baldinger*, del *Carteuſer*, altrove addotte (*b*), baſterà qui aggiungere quella dell' *Offmanno*: *Eſt vero inter hujus corticis elementa primo loco connumerandum adſtrictivum* (*c*). *Notiſſimum autem, corticem Chinæ vel ipſo ſapore teſte plurimas cuſtodire terreas, fixas, cum ſubtili acido nuptas partes, unde ſaporis etiam & virtutis adſtringentis eſt* (*d*). Non

(*b*) Diſſert. noſtra ſopra il Queſito: *Se nel caſo* ecc. p. 8. e 12.
(*c*) Diſſert. Seleſt. decad. 2. Diſſert. 4.
(*d*) Obſ. Praſt. ſup. tom. 10. p. 238.

vale opporre, che ſe gli ſtupendi effetti che in certi morbi produce la Chinachina proveniſſero dalla ſua facoltà coſtringente, gli ſteſſi effetti e migliori vedremmo ſeguire all'uſo di altri molti noſtrali rimedj, ſpecialmente nelle febbri periodiche e intermittenti; i quali ſenza dubbio ſono più forti ſtitici e coſtrettivi di eſſa: quel che però in pratica non ſi oſſerva avvenire. Perciocchè, come ſi eſprime il *Redi* (*e*), in Medicina non vale la regola del tre, perchè ſe quattro giova, otto può nuocere. Una moderata forza ſtitica può eſſere talvolta più giovevole che una eccedente; o perchè più tardi e dentro ſi ſpieghi nelle vene, o perchè non chiudi a sè ſteſſa l'adito di penetrare. Quanto alle febbri poi, che gli ſtitici non giovino come la Chinachina a fermarle; queſto è aſſolutamente falſo, paſſando eſſi pure per febbrifugi, e valendo qualche volta a fermare una febbre, contro cui la Chinachina non valſe. Sentiamo ancora l'*Offmanno*: *Confirmatur hæc ſententia vel ex eo quod alia ſtyptica adſtringentia ex fixa terra & acido compoſita ſimili fere virtute cum cortice Chinæ in debellandis febribus, vel earum paroxiſmis ſuſpendendis ſplendeant, ſicuti id notum eſt de radice pentaphylli, plantaginis, cortice fraxini, viſco quercino, radice & extracto tormentillæ, alumine, liquore martis ſtyptico, tinctura martis Haſſiaca, & hujus generis ſimilia.* (*f*)

Quanto al Vajuolo poi, univerſalmente parlando ſi oſſerva che il tempo di eſſo il più pericoloſo e fatale ſi è quando, compiuta la ſuppurazione, comincian le puſtule a reſtringerſi ed appaſſirſi: quel che avvien d'ordinario fra il ſeſto e l'ottavo giorno, da che ſono alla cute comparſe. Queſto pericolo v'è dunque ragion

(*e*) Lett. tom. 4.
(*f*) Obſ. Pract. ſup. tom. 10. p. 238.

di credere che proceda dal riconcentramento della materia delle puſtule : per cui ſi facciano mortali decubiti nelle viſcere, o le cavità s' inondino, o ſi corrompano gli umori, o s' intacchino le parti ferme e l' oſſa. Or in queſto più pericoloſo e fatal tempo del Vajuolo, qual ſarà il più indicato e valevol rimedio, ſe non cercar d' impedire al poſſibile, ed il più preſto che ſi poſſa, il concentramento della materia vajuoloſa? E qual medicamento a ciò può eſſere più pronto e più efficace di uno ſtitico temperato, confacente ad ogni età e temperatura di uomo, tenace della propria indole ; che poſſa quindi penetrar nelle vene, e chiudere gli oſculi e i vaſellini d' onde la peſſima materia può ritrocedere dalla cute, e dentro intruderſi, o venir aſſorbita? Queſto deſiderato rimedio e celeſte medicamento ſi è appunto la Chinachina.

Io ſo che qualche Autore ha avuto l' ardimento di negare aſſolutamente queſta ritroceſſione della materia del Vajuolo. *Quando circumferentia, ſive margo palleſcere incipit*, ſcrive il *Violante*, *malum portendit, materia enim quæ ad puſtulas afferri debuerat, ob craſſitiem inertiamque, minime in ipſas importatur* (*tunc variolas retrocedere aniculæ & indocti clamant, quaſi materia a peripheria ad centrum recedat*) *eo magis ſi puſtularum elevatio, quando margines jam palleſcunt, parum deprimatur : Sed evolat ac continuo detrahitur aliquid a puſtulis ; quibus cum nihil impoſterum addatur, depreſſæ apparent*. (*g*) Queſta ritroceſſione però, o per meglio dire queſta intruſione della materia vajuoloſa, (giacchè non è probabile che ſian piene le puſtule di ſola materia ad eſſe dal ſangue tramandata, come vuole il *Violante*, ma che più ſian piene di materia ivi alla cute generata, di che dan ſegno l' infiammazion previa, e le

(*g*) De Variol. & Morb. num. 92.

ſuſſeguenti cavità che reſtan nella cute) non è frivola credenza e volgare pregiudicata opinione ; ma oltrechè è pienamente dimoſtrata poſſibile dall' ordinario riconcentramento e paleſe della materia di altri tumori alla cute ſuppurati , che ſpeſſo eſce per urina , o altrove traſportati , è ben anche creduta ed affermata da quaſi tutti i Pratici più aſſennati e ſperimentati . Che propriamente non trattaſi qui di una materia delle puſtule craſſamentoſa ed inerte , qual ſuppone il *Violante* , ma di eſſa reſa ſottile per la putredine , o della parte ſottile e ſieroſa di eſſa ; che quantunque tale può eſſer dotata di ſomma acrimonia e velenoſità . Trattaſi in corto dire di quella ſteſſa materia che il *Violante* vuole che sfumi e ſvapori dalle puſtule quando ſi appaſſiſcono , e non vien loro altra materia dal ſangue tramandata . Che ſe , per opinione di queſto Autore , dalla cuticola trapela e sfuma eſſa materia , la qual cuticola dagli Anatomici è conſiderata , quaſi come un callo della cute , ferma e dura ; come non potrà penetrare all' interno in ſito molle e poroſo , e in canaletti per la ſuppurazione aperti e logori ? Che ſe l' impeto degl' interni umori che girano s' oppone ; l' aria eſterna , e la naturale elaſticità e contrattilità delle fibre favoriſcono alla intromiſſione delle materie che ſono alla pelle : altrimenti in iſtato di miglior ſanità i fluidi ſi diſperderebbono in pochi momenti sfumati e ſgorgati dovunque dalla ſuperficie del corpo .

Ma laſciamo da parte queſte teorie per quanto evidenti ſempre però in Medicina periglioſe e ſoſpette , e procedendo nel noſtro intrapreſo diſcorſo , paſſiamo a contemplare , e cogli occhi propri vedere gl' immediati e paleſi effetti che ſon ſeguiti alla Chinachina da noi nel propoſto caſo adoperata . L' effetto ſuo più viſibile e ſingolare fu quello di gonfiare la ſeconda volta le palpebre e chiudere gli occhi , di rigonfiare tutta la faccia e le mani , e l' altra ſuperficie del corpo , con rialzare

e riempiere di nuova materia le puſtule che già cominciavano ad appaſſirſi. Queſto effetto fu tanto rilevante e coſpicuo che mi tenne ſoſpeſo e dubbioſo del ſuo eſito, benchè corriſpondeſſe chiaramente alle mie intenzioni, e benchè ſapeſſi di certo che il gonfiamento della pelle è da riporſi nel Vajuolo fra i ſegni di un ottimo fine, e benchè in fatti fin d' allora ſcorgeſſi un ſenſibile miglioramento nell' inferma in tutti gli altri ſintomi e circoſtanze del male: viva ſolo rimanendo la febbre, per nulla ceduta al febbrifugo. A queſto così oſſervabile gonfiamento non ſeguì toſto ſecondo il conſueto un preſto appaſſimento, ma ſuſſiſtè per varj giorni, ſinchè a poco a poco ſcemò con rimanere tutta la materia dentro alle puſtule raccolta e condenſata, e la pelle tutta, maſſimamente del volto, bruttamente incroſtata; ſenza rimanerne però contraffatta la faccia, ma ſol difformata la pelle da un buttero ſpeſſo ed eguale. Fu quindi in breviſſimo tempo ſalva l'inferma, ſenzachè una minima porzione di materia ſi moſtraſſe ritroceſſa o dal ſortire per urina, o per ſeceſſo, o per decubiti d'interni aſceſſi, o altri tumori.

Queſto effetto di gonfiare la pelle è ſenza dubbio da attribuirſi alla Chinachina, perchè altro rimedio non fu in tal tempo uſato, e perchè ſucceſſe in un tempo in cui il natural corſo del Vajuolo portava anzi al contrario a far appaſſire le puſtule dopo il gonfiamento primiero. Queſto ſteſſo effetto oſſervato fu dal *Morton* (*h*), dal *Monrò* (*i*), e dal *Wall* (*k*), e per ventura da eſſi notato e ſcritto, benchè ad altro fine, ed uſo dal noſtro diverſo, abbian eſſi la Chinachina nel Vajuolo preſcritta. E credo io bene che altri pure l'avrebbon veduto e notato, ſe aveſſero a queſto badato, e ſe in

(*h*) De Feb. infl. cap. 6. hiſt. 23.
(*i*) Saggi d'Edimb. tom. 5. art. 10.
(*k*) The philoſophical Tranſactions Abridged, vol. The tenth. p. 1035.

tempo opportuno aveſſero la Chinachina praticata, e in doſi ſufficienti a queſto fine. Or per qual altro mezzo può la Chinachina quell' effetto operare, ſe non per quello ſteſſo da me cercato nell' uſarla; con fermare cioè e ſtringere le interne parti, perchè la materia nemica ſia coſtretta a reſtarſene alla cute, e venga impedita di riconcentrarſi? Le puſtule oltre l' uſato tempo ſempre piene e diſteſe, la denſità e ſpeſſezza delle croſte ſuſſeguite, con il preſto riaverſi dell' inferma in perfetta e ſtabil ſalute, ſenzachè deſſero le materie ſegno di eſſere in veruna porzione rientrate dalla loro comparſa per urine, per feceſſo, per decubiti o tumori, ſon tutte coſe che moſtrano evidentemente come nel caſo da noi narrato da principio e propoſto abbia veramente la Chinachina, con iſtringere le interne parti, impedito il riconcentramento della materia vajuoloſa, ſempre pieno di timore e pericolo, in ogni ſpecie e natura di Vajuolo: e con ciò fare abbia dato al male un eſito felice. Non ſi niega che uſata la Chinachina ſul finir del Vajuolo come rimedio antiſettico ed antifebbrile non poſſa buoni e lodevoli effetti produrre; ma nel caſo noſtro evidentemente appare che non per queſti effetti giovò: mentre anzi per l' una parte la materia per virtù della Chinachina alla cute ritenuta corrompendoſi tanto fetore menò, che accorſer le moſche a deporvi dentro i vermetti, o le uova d' onde queſti provennero; e per l' altra parte la febbre viva allor preſente non ſentì punto la forza della Chinachina, ma perſeverò coſtante per alquanti giorni dappoi.

A queſto noſtro nuovo metodo di uſare la Chinachina ſul declinare del Vajuolo come rimedio ſtitico e corroborante due oppoſizioni ſembrano contraſtare, le quali potrebbono ritirare i Pratici dall' abbracciarlo. L'una ſi è che molti antichi e moderni accreditati Scrittori lodano come utiliſſimo nel Vajuolo l' uſo del bagno, ch' è rimedio ammolliente e rilaſſativo, del tut-

to contrario ad una forza ſtitica e coſtrettiva che ſi eſalta. L' altra ſi è che appunto ſul finir del Vajuolo dove noi proponiamo un rimedio ſtitico, molti accreditati Scrittori dietro gl' inſegnamenti del *Freind* propongono al contrario i purgativi che un oppoſto effetto producono.

A queſte oppoſizioni in apparenza sì formidabili facilmente riſpondeſi con far oſſervare che queſte pratiche lodate dagli Autori in nulla ſi oppongono al noſtro metodo, che anzi lo ſecondano e confermano. L' intenzion noſtra è quella unicamente di fare che la materia del Vajuolo non entri a contaminare il ſangue. L' uſo del bagno a queſto ſteſſo fine direttamente conduce: la Chinachina con iſtringere le parti interne affinchè la materia non entri: il bagno con ammollire e dilatare la ſuperficie del corpo, affinchè reſti alla cute la materia e non ſi concentri. L' uſo de' purgativi è diretto a nettare il ſangue dalla materia riconcentrata: l' uſo della Chinachina a preſervare il ſangue da eſſa materia onde non ne reſti infettato. Tanto però è più pregevole e deſiderabile l' effetto della Chinachina ſopra quello de' purgativi, quanto è meglio chiuder la caſa affinchè il ladro non entri, che aſpettare a diſcacciarnelo, entrato che ſia.

Bensì opponeſi il noſtro metodo, e ſalutarmente ſi oppone alla temeraria pratica di alcuni Medicanti, che non temono di replicare il ſalaſſo anche ſul declinar del Vajuolo, perchè con eſſo ſi dà adito e luogo alla triſta materia alla cute generata di entrare nel ſangue, con grave pericolo che non tutta nè sì prontamente fuor n' eſca. Il *Diemerbroechio* fra gli altri ha oſſervate le peſſime conſeguenze di queſta pratica, e l' ha riprovata e condannata. (*l*)

Qualora

(*l*) De Variol. & Morb. cap. 8.

Qualora però fiafi perfuafo di ufare la Chinachina per queſto effetto d' impedire alla materia del Vajuolo di riconcentrarſi formata che fia, non è da preſcriverſi alla cieca in ogni tempo di Vajuolo: ma importa aſſaiſſimo incontrare il vero punto di ufarla. Queſto felice punto propizio non è fiſſo ſempre ad un giorno: ma ſiccome il Vajuolo varia nel ſuo corſo or più breve or più lungo; or più preſto, or più tardi conviene metterla in pratica. Generalmente parlando nel Vajuolo benigno e regolare il ſettimo giorno dal ſuo cominciamento metton materia le puſtule, ed all' undecimo cominciano ad appaſſire. Verſo il nono però ſta il colmo della ſuppurazione: e queſto appunto è il tempo opportuno di ufare la Chinachina. Nel Vajuolo confluente e maligno ſi trova della irregolarità nel ſuo corſo; e quantunque in sè ſteſſo ſia più precipitoſo e celere, pur le puſtule comparſe più tardano a metter materia. E queſta meſſa che ſia, celermente creſce e ſi matura. In queſta ſpecie però di Vajuolo ſarà meglio badare alla prima maturazion delle puſtule, ſpecialmente del corpo, per non tardare più oltre a preſcrivere la Chinachina: mentre le puſtule del volto ſi trovano poco oſſervabili, egualmente diſtendendo la pelle, l' una in l' altra accoppiate e confuſe.

Ma per errare il meno che ſia poſſibile in coſa di tanta importanza, ſarà ſempre meglio nel computo de' giorni del Vajuolo dell' una e dell' altra ſpecie cominciare a numerare dalla prima comparſa delle puſtule, e non dal primo apparir della febbre, che ad eſſe precede. Stantechè or nel ſecondo, or nel terzo, or nel quarto, e più tardi ancora, e talvolta dopo qualche giorno d' intermiſſione, danno fuori le puſtule. E perchè ancora abbracciando la noſtra medicina anche il Vajuolo più benigno e ſicuro, in queſta ſpecie maſſimamente il tempo antecedente alle puſtule è così poco morboſo ed oſſervabile, che ſfugge al ſenſo de' fantolini, ed

alla vista degli astanti. Lasciando dunque da parte questo tempo previo alla comparsa delle pustule, come poco rimarcabile, e come troppo vario nella sua durabilità, computeremo al nostro uopo il solo tempo della presenza delle pustule; e diremo che circa il settimo giorno sta il tempo opportuno di cominciare a metter in pratica la Chinachina nel Vajuolo, all' effetto desiderabilissimo di chiuder la via alla sua materia di riconcentrarsi.

L' anticipar questo tempo è inutile per il fine che si desidera; perchè non è ancor generata la materia che si vuol ritenere alla cute. Anzi potrebbe esser dannoso, incontrandosi ancor viva la infiammazione; ch' è quanto dire il lavoro della materia purulenta. Nel qual tempo usata la Chinachina, potrebbe, con frenare i salutari moti della natura, impedire quest' opera, senza di cui non sa essa nè può liberarsi dal Vajuolo. Tutte quindi le Scuole de' Medici dietro gl' insegnamenti del *Sidenamio* (*m*) fuggono con grande attenzione l' uso dalla Chinachina nelle febbri ardenti ed infiammatorie: ed il *Boeravio* si guardava dall' usarla nelle febbri stesse periodiche, nelle quali peraltro è sicuro medicamento, qualora per accidente fosse ad esse congiunto qualche morbo d' infiammazione, o fossero ascese a qualche grado di essa. (*n*)

Io so che alcuni Medici della Germania in questi ultimi tempi non hanno dubitato di tentare la Chinachina ne' morbi infiammatorj febbrili: sopra di che si trovano dati alla luce alcuni libri con i superbi titoli: *De virtute antiphlogistica Corticis Peruviani* (*o*). *De tempestivo Corticis Peruviani usu in febribus inflam-*

(*m*) Epist. Resp. 1.
(*n*) Aphor. 767.
(*o*) *Welchert*.

matoriis (*p*). E noi pure altrove qualche caſo abbiamo addotto che ſembra favorire queſta opinione (*q*). Eccone un altro ancor più rimarcabile e ſignificativo pochi giorni ſono da me oſſervato. Vengo io chiamato a viſitare un Fornajo, che avea una febbre ardente, cagionatagli dall' eſſerſi egli poco prima grandemente affaticato ed infiammato nello ſcaldare un forno nuovo non uſato. Il ſuo polſo era *ſtridulo* (quale io ho deſcritto nel mio libro *de' morbi purulenti*) ed avea gli occhi ſplendenti, le urine roſſe e crude, ſopore e ſete. Due cavate di ſangue, e copioſe bibite nitrate e rinfreſcative, non valſero a frenar l' impeto del morbo: il quale anzi verſo il ſettimo veſtiva caratteri minaccioſi e ſoſpetti. Mi ſon riſoluto di tentare la Chinachina: ſotto il cui uſo è preſto ceduta la febbre; e ſenz'altra ragione o criſi ſi trova in oggi ſalvo e libero l'infermo. Ma perchè pochi caſi e mendicate ragioni non baſtano a combattere una pratica ben fondata ed univerſale, reſteremo noi, ſinchè più convincenti fatti e migliori ragioni ſi adducano, nella volgare credenza, che non ſia da uſarſi la Chinachina nelle infiammazioni: ſe non foſſe una qualche volta in ſul declinare delle medeſime, come ſaggiamente coll' *Offmanno* (*r*) e col *Pringle* (*ſ*) concludono *Franceſco Reyes* (*t*) e *Criſtiano Auguſto Held*. (*u*)

Che ſe tanti riguardi ſi devono avere circa l'uſo della Chinachina ne' morbi ordinarj d'infiammazione, che portano ad una buona e lodevole ſuppurazione, acciocchè queſta non venga ſtraſtornata; quanto maggiori non dovranſene avere nel Vajuolo, la di cui materia ha per

(*p*) *Held*.
(*q*) Diſſert. ſopra il Queſito: *Se nel caſo* ecc. p. 46.
(*r*) Med. Syſt. tom. 4. ſect. 2. cap. 2.
(*ſ*) Oſſerv. part. 3. cap. 4.
(*t*) De Inflammaciones internas, tratado 2. cap. 2.
(*u*) De tempeſtivo Cort. Peruv. uſu in febr. inſl. num. 12.

sè ſteſſa ſpeciali caratteri di malizia e velenoſità? Si opporrà che il *Wall*, l'*Huxham*, ed il *Morandi* in ogni tempo di Vajuolo l'hanno preſcritta e lodata. Ma l'*Huxham* ed il *Morandi* oſſervazioni particolari non danno che la comprovino; ed i pochi eſempj del *Wall* di ſopra allegati, o nulla provano, o ben anche provano il contrario. Perciocchè nel caſo primo, e nel ſettimo, dov' egli preſcriſſe la Chinachina nel principio e progreſſo del Vajuolo, morirono gl' infermi: quantunque l'Autore ſi compiaccia d' averla uſata. Nè le ragioni da queſti Autori addotte molto provano, perchè ſi erigono ſu fondamenti dubbioſi e fallaci. Suppongono eſſi che nel Vajuolo il ſangue ſia sfibrato e diſciolto per la povertà dei globetti roſſi che lo compongono. Ma tutto al contrario per le oſſervazioni del *Sidenamio* (*x*), del *Baglivio* (*y*), del *Boeravio* (*z*), dell' *Haen* (*a*), e di altri molti ch'è ſuperfluo nominare, il ſangue tratto dalle vene nel Vajuolo, anche ſul finire di eſſo ſi trova denſo e coperto di croſta gelatinoſa, quale trovar ſi ſuole nelle infiammazioni; toltine alcuni pochi caſi, dov'è degenerato il morbo in cangrena.

Il tardar troppo oltre lo ſtabilito tempo a mettere in uſo la Chinachina nel Vajuolo, fa che coi giorni ſia fuggita via l'occaſion di giovare, con aver dato adito e tempo alla materia di riconcentrarſi; la quale ſi dovea con quel rimedio alla cute fermare e ritenere. Entrata che ſia in buona parte queſta materia a contaminare il ſangue, come avvenir ſuole ceſſato l'impeto interno degli umori col ceſſare del fervore infiammatorio, quale utilità ſi dovrà in tal caſo dalla Chinachina aſpettare? Sia pur che in qualche modo a gio-

(*x*) Obſ. Med. ſect. 2. cap. 2.
(*y*) Prax. Med. lib. 1. cap. 9.
(*z*) Aph. 1384.
(*a*) Rat. Med. part. 2. cap. 6.

var venga come *antiſettico*, non gioverà certo a cacciar dalle vene la triſta materia: a che anzi, rallentando le ſeparazioni, verrà ad eſſere d'oſtacolo. Bensì farà utile, cominciato che abbiaſene l'uſo in tempo opportuno, per più giorni ſeguitare ad uſarla dappoi, ſinchè indurita e ſeccata la materia, non ſia più a portata di entrare nel ſangue. Anzi affinchè l'occaſion di giovare, qui più che in altro morbo precipitoſa e fugace, non iſcappi, forti e replicate doſi di Chinachina ne' primi due giorni ſi richieggono al deſiderato effetto, regolate a miſura della pienezza e quantità delle puſtule. Negli adulti che hanno un copioſo Vajuolo due once almeno ſe ne richieggono per farne decozione, da prenderſi partitamente ne' due primi dì. Dopo di ciò farà ſufficiente una dramma di Chinachina uſata due volte al giorno ſino al totale diſſeccamento delle puſtule. Nei bambini, o dove le puſtule non ſono molto numeroſe e piene baſteranno doſi minori; e ſi potrà in queſti uſar per creſtiere, ſe ad ogni modo rifiutino di prenderla per bocca. Io amo meglio uſare dapprincipio la Chinachina in decozione, perchè credo che con la cottura s' immedeſimi maggiormente con l' acqua; e ſia quindi più atta a penetrar con eſſa dentro le vene: quantunque io ſappia che nelle ſebbri ed in altri morbi, dov' eſſa operar dee i ſuoi effetti principali nelle prime vie, ſia più forte ed efficace uſata in ſoſtanza.

Quanti medicamenti efficaciſſimi rieſcono vani in pratica, o ben anche dannoſi, perchè fuor di tempo adoperati! Di qui credo io, più che d'altronde, derivi l'infamia d'incertezza che eſſi, e con eſſi la Medicina tutta ſi ſono acquiſtata. *Neque vero ipſe ullum ſpecioſum medicamentum agnoſco, quin ſolo tempeſtivo uſu tale fiat*, diceva il *Boeravio* nella Prefazione a' ſuoi Aforiſmi.

FINE del Tomo primo.

ERRORI		CORREZIONI
pag. 1. l. 4.	Naime	Nairne *e così dipoi*.
l. 17.	da	ad
2. l. 26.	coricarſi	caricarſi
12. l. 15.	manca dopò il *che*	ſono la lunghezza della punta unita all'armatura, e fanno pollici dodici, linee nove, che
15. l. 19.	piedi	più di
l. 30.	fu	fa
16. l. 2.	comparandole	componendole
19. l. 18.	o : 4	1 : 6
22. l. 1. / 24. l. 4.	prima	piena
36. l. 18.	dopo la parola *poſſano* ſi aggiunga	non deſcrivere nello ſteſſo tempo, che ſpazj eguali, e ſe ſono le maſſe ineguali, ſi fa, che intorno allo ſteſſo centro del moto deſcrivano, e non poſſano
44. l. 15.	Teor. 10. 6. 4.	Teor. 10. *b. k*
51. l. pen.	miſura	miſtura.
62. l. 2.	$\frac{1}{2n}$2 farà=7,8534090	$\frac{1}{2n^2}$ farà = 9, 544530
183. l. 12.	negativa	poſitiva
733. l. 10.	$\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$	$\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$
574. l. ultima	nella not. metificità	meſiticità.
578. l. 4.	ne' è	n' è
582. nella nota	l. antepen. luo-	luogo
608. l. 24.	alle	alla